Алгебраические и трансцендентные числа

Подобно тому, как капля росы способна играть в лучах восходящего солнца всеми цветами радуги, так и числа являют нам свои бесчисленные свойства в зависимости от того, под каким углом зрения на них посмотреть. Мы различаем целые числа и дробные, положительные и отрицательные, рациональные и иррациональные, вещественные и комплексные... Если взглянуть на числа с точки зрения: могут или не могут они являться корнями многочленов с целыми коэффициентами, то тем самым мы проведем границу между *алгебраическими* числами (могут быть корнями) и *трансцендентными* (не могут). Таким образом, о трансцендентных числах можно сказать еще и так: они выходят за пределы множества чисел, представляющих корни всевозможных многочленов с целыми коэффициентами (по-латински *transcendentis* означает *выходящий за пределы*). Называть числа *алгебраическими* и *трансцендентными* предложил Леонард Эйлер (1707—1783) в далеком 1775 году, когда еще не было известно ни одного трансцендентного числа.

Все рациональные числа m/n, где m, n – целые, $n \neq 0$, – безусловно алгебраические, поскольку удовлетворяют уравнению $nx - m = 0$. Сообщество алгебраических чисел гораздо богаче, чем общество рациональных – оно включает также все иррациональные числа вида $\sqrt[n]{m}$ (n, m – целые, $n \geq 2$), поскольку $\sqrt[n]{m}$ – корень многочлена $x^n - m$. Сумма, разность, произведение и частное (при ненулевом делителе) алгебраических чисел – числа также алгебраические. Более того, оказалось, что алгебраическими числами являются корни многочленов, коэффициенты которых – алгебраические числа. Это свойство позволят конструировать алгебраические числа весьма затейливого вида. Так, число $\sqrt{\dfrac{1998}{\sqrt[19]{98}-\sqrt[199]{8}}}$ алгебраическое, потому что собрано, как из деталей детского конструктора, из алгебраических чисел с помощью основных арифметических операций и радикалов. Существуют такие многочлены, корни которых через их коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов *вовсе не выражаются*. Этот факт в истории математики связан с драматическим поиском формул, выражающих корни многочленов высоких степеней через их коэффициенты, и достоин отдельного повествования. Здесь же мы отметим, что он открывает необозримую ширь множества алгебраических чисел. Если это множество столь неохватно, что для изображения всех их не хватает даже привычных знаков операций, то где же могут обитать трансцендентные числа?

В 1744 году Леонард Эйлер выдвинул гипотезу, что числа вида $\log_a b$ почти при всех рациональных a и b не могут быть корнями многочленов с целыми коэффициентами (на самом деле, число $\log_a b$ рационально тогда и только тогда, когда существует рациональное число t такое, что $a = t^n$, $b = t^m$, где m и n – целые числа). Это предположение длительное время оставалось хотя и весьма правдоподобной, но все же зыбкой гипотезой. Более ста лет математикам не удавалось ни доказать гипотезу Эйлера, ни найти хоть какое-нибудь трансцендентное число. Поиски трансцендентных чисел напоминали поиски в темной комнате кота, причем без надлежащей уверенности в том, что усатый и полосатый в этой комнате непременно есть. Первый свет забрезжил в 1844 году, когда французский математик Жозеф Лиувилль (1809—1882) не только доказал, что трансцендентные числа существуют, но и построил примеры таких чисел. Точнее, он доказал, что алгебраические числа плохо приближаются рациональными, а именно, если α — алгебраическое число степени n (где n – наименьшая степень многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами такого, что $P(\alpha) = 0$), то для любой дроби p/q выполнено неравенство $|\alpha - p/q| > C/p^n$, где C – некоторая константа, зависящая только от α. Одно из чисел, построенных Лиувиллем, имело следующий вид: $\beta = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \ldots = 0{,}11000100\ldots$, где значком $n!$ обозначено произведение натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Для числа β утверждения теоремы Лиувилля неверны: в самом деле, пусть

$$\beta_n = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \ldots + \frac{1}{10^{n!}},$$

тогда

$$|\beta - \beta_n| < \frac{2}{10^{(n+1)!}} = 2\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n+1}.$$

Значит, число β не является алгебраическим.

(Теорема Лиувилля оказалась одной из первых теорем в теории приближения иррациональных чисел рациональными (так называемой *теории диофантовых приближений*). Одним из высших результатов этой теоремы стала теорема Рота (1955), усиливающая теорему Лиувилля: если α — алгебраическое число, а ε — любое наперед заданное положительное число (например, 0,0001), то неравенство $|\alpha - p/q| < 1/q^{2+\varepsilon}$ имеет лишь конечное число решений. Таким образом, алгебраические числа приближаются рациональными значительно хуже, чем по теореме Лиувилля.)

Пользуясь рецептом Лиувилля, трансцендентные числа стали обнаруживать и другие математики. Поначалу их было мало, и эти числа воспринимались как персонаж в известной басне И.А.Крылова: «По улицам Слона водили, как видно – напоказ…» И вдруг случилось нечто поразительное. В 1878 году немецкий математик Георг Кантор (1845–1918) доказал изумительный факт: каждому алгебраическому числу можно поставить в соответствие отдельное натуральное число (т.е. их можно как бы сосчитать), а вот трансцендентных чисел так много, что они даже в принципе такого подсчета не допускают. То их не могли найти, собирали по крупицам, то вдруг оказывается, что трансцендентных чисел – несчетная рать!

В 1873 году французский математик Шарль Эрмит (1822–1901) доказал трансцендентность замечательной константы $e = 2{,}71828\ldots$, служащей основанием натуральных логарифмов и представляющей предел последовательности чисел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, когда n устремляется к бесконечности, а в 1882 году немецкий математик Карл Фердинанд Линдеман (1852–1939) доказал трансцендентность числа π. Результат Линдемана поставил точку в многовековых потугах как профессиональных ученых, так и любителей математики решить задачу *о квадратуре круга*. Эта древняя задача о построении равновеликого данному кругу квадрата с помощью одних только циркуля и линейки без делений оказалась тесно связанной с алгебраической природой числа π.

К концу XIX столетия уже была доказана гипотеза Эйлера о трансцендентности чисел вида $\log_a b$ почти для всех рациональных a и b, а Карл Вейерштрасс (1815–1897) обосновал трансцендентность чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ почти для всех алгебраических α.

Выступая в 1900 году на II Всемирном конгрессе математиков, Давид Гильберт (1862–1943) сформулировал 23 знаменитые проблемы, которые девятнадцатый век оставлял в наследство двадцатому. Одна из этих проблем касалась доказательства трансцендентности чисел вида α^β, где α – отличное от 0 и 1 алгебраическое число, а β – иррациональное алгебраическое число. Наш соотечественник Александр Осипович Гельфонд (1906–1968) разработал метод, который позволил ему решить проблему Гильберта для случая, когда β является корнем квадратного трехчлена, а позже ему и немецкому математику Теодору Шнайдеру (род. 1911) удалось решить эту проблему полностью.

Но вот о числе Эйлера $C \approx 0{,}57726\ldots$, представляющим собой предел последовательности $\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right\}$, при n стремящемся к бесконечности, неизвестно даже, является ли оно иррациональным. К настоящему времени вычислено несколько тысяч десятичных знаков числа C, и никаких признаков периодичности не обнаружено. Однако еще никому не удалось доказать и иррациональность числа C. То же относится к числу $\pi + e$ и $C \cdot \pi$.

А.Жуков