ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Куда проскользнет палочка?

А.ЧЕРНОУЦАН

ПОСТАВИМ тонкую палочку вертикально на горизонтальную плоскость и отпустим. Палочка начнет падать, а ее нижний конец через некоторое время сдвинется с места и будет скользить по плоскости. Можно ли заранее предсказать, куда сдвинется нижний конец – в ту же сторону, куда упадет палочка, или в противоположную?

В одном случае ответ хорошо известен: если трения нет, то палочка сразу же начнет проскальзывать в сторону, противоположную падению. Объяснение очень простое – в отсутствие горизонтальных внешних сил центр масс палочки может смещаться только по вертикали.

Можно ожидать, что при малом трении направление проскальзывания будет таким же, причем начнется проскальзывание при небольшом отклонении палочки от вертикали. А вот при достаточно большом трении ответ уже не столь очевиден. Интуитивно чувствуется, что если палочка не начнет проскальзывать при небольших углах отклонения, то потом за счет приобретенной горизонтальной скорости она скорее проскользнет вперед, по движению (верхняя часть палочки «потянет» за собой нижнюю). Чтобы проверить такое предположение, проведем расчет движения палочки и найдем, при каком наклоне палочки начнется проскальзывание и куда будет в этот момент направлена сила трения (она всегда направлена против направления проскальзывания).

Для проведения расчетов нам понадобятся некоторые простые сведения из динамики твердого тела. Во-первых, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси выполняется уравнение динамики $M = I\varepsilon$, где M — момент внешних сил относительно оси вращения, ε — угловое ускорение, а I – момент инерции тела относительно оси. Это уравнение для описания вращательного движения играет такую же роль, как второй закон Ньютона – для поступательного. В случае если ось вращения проходит через конец палочки, ее момент инерции равен $I = ml^2/3$, где m – масса и l – длина палочки. Во-вторых, кинетическая энергия вращающегося твердого тела равна $I\omega^2/2$, где ω — угловая скорость вращения.

Построим решение следующим образом. Сначала будем считать, что нижний конец палочки прикреплен к плоскости шарниром, и найдем зависимость силы реакции в шарнире от угла наклона палочки α (не беспокоясь о проскальзывании или отрыве от плоскости). Вертикальную составляющую

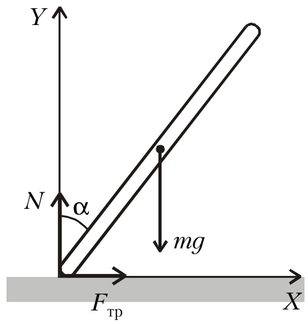

Рис. 1

силы реакции обозначим $\vec{N}$, а горизонтальную $\vec{F}_{тр}$ (рис. 1). Положительное направление для $\vec{N}$ выберем вверх, а для $\vec{F}_{тр}$ — вправо, в сторону падения. Найдя зависимости $N(\alpha)$ и $F_{тр}(\alpha)$ при всех α, мы сможем установить, при каком угле в первый раз выполнится условие проскальзывания

$$\left|F_{тр}(\alpha)\right| = \mu N(\alpha),$$

где μ — коэффициент трения.

Чтобы найти $F_{тр}$ и N, запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси X и Y:

$$F_{тр} = ma_x, \quad N - mg = ma_y.$$

При падении палочки ее центр масс движется по окружности радиусом $l/2$. Пусть в тот момент, когда палочка составляет угол α с вертикалью, ее угловая скорость равна ω, а угловое ускорение равно ε. Тогда нормальное (центростремительное) ускорение центра масс равно $a_n = \omega^2 l/2$, а тангенциальное ускорение (направленное по касательной к окружности) – $a_\tau = \varepsilon l/2$ (рис.2). Отсюда получаем проекции ускорения $\vec{a}$ на горизонтальную и вертикальную оси:

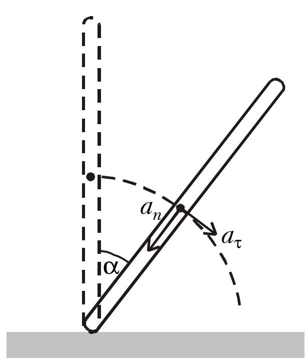

Рис. 2

$$a_x = \varepsilon \frac{l}{2}\cos\alpha - \omega^2 \frac{l}{2}\sin\alpha,$$

$$a_y = -\varepsilon \frac{l}{2}\sin\alpha - \omega^2 \frac{l}{2}\cos\alpha.$$

Нам осталось только определить зависимости ε и ω^2 от угла α. Для этого запишем закон динамики вращательного движения палочки:

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{ml^2}{3}\varepsilon$$

и закон сохранения энергии:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{ml^2}{3}\frac{\omega^2}{2}.$$

Тогда для проекций ускорения получаем следующие выражения:

$$a_x = \frac{9}{4}g\sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right),$$

$$a_y = \frac{9}{4}g\left(\cos\alpha - \frac{1}{3}\right)^2 - g,$$

откуда находим $F_{тр}$ и N:

$$F_{тр} = \frac{9}{4}mg\sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right),$$

$$N = \frac{9}{4}mg\left(\cos\alpha - \frac{1}{3}\right)^2.$$

Проанализируем полученные выражения, считая теперь нижний конец палочки свободным. Видно, что при угле $\alpha_1 = \arccos(2/3) \approx 48°$ сила трения меняет знак. Значит, если проскальзывание начнется при угле меньшем α_1, то оно будет происходить против направления падения. Если же в интервале углов $0 < \alpha < \alpha_1$ палочка не начнет проскальзывать, то в итоге она проскользнет в сторону падения.

А почему мы так уверены, что палочка вообще начнет проскальзывать? Это следует из выражения для N: поскольку при $\alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 71°$ сила реакции обращается в ноль, то при любом коэффициенте трения условие проскальзывания $F_{тр} = \mu N$ наступит при угле меньшем α_2.

Чтобы выяснить, как зависит угол отклонения палочки в момент проскальзывания от коэффициента трения μ, надо решить уравнение

$$\mu = \frac{\left|F_{тр}\right|}{N} = \frac{\left|\sin\alpha(\cos\alpha - 2/3)\right|}{(\cos\alpha - 1/3)^2}.$$

Функция, стоящая в правой части уравнения, изображена на рисунке 3. Эта функция имеет один максимум при угле α_0, положение которого можно найти численным расчетом. Правда, если вы наберетесь терпения и возьмете производную по α, то в конце вас ждет награда: условие максимума сводится к уравнению $\cos\alpha_0 = 9/11$. Значение функции в максимуме равно $\mu_0 = 15\sqrt{10}/128 \approx 0{,}37$.

Пора делать выводы. Из рисунка 3 следует, что при $0 < \mu < \mu_0 \approx 0{,}37$ уравнение $\left|F_{тр}\right| = \mu N$ имеет три решения, из которых началу проскальзывания соответствует наименьший угол, лежащий в интервале $0 < \alpha < \alpha_0$, где $\alpha_0 = \arccos(9/11) \approx 35°$. При $\mu < \mu_0$ проскальзывание происходит в сторону, противоположную падению, а при $\mu > \mu_0$ проскальзывание будет происходить в сторону падения при угле наклона, лежащем в интервале $\alpha_3 < \alpha < \alpha_2$ ($\alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 71°$, смысл угла $\alpha_3 \approx 51°$ ясен из графика на рисунке 3).

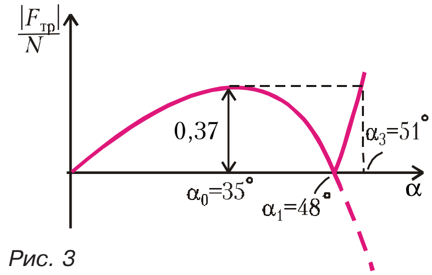

Рис. 3

Как видим, обсуждение конкретной задачи превратилось в маленькое исследование, а точное решение оказалось «богаче» поставленного вопроса: вскрылись такие черты явления, о которых мы заранее не догадывались. Что же именно мы узнали?

Во-первых, мы подтвердили начальное качественное предположение: при достаточно большом коэффициенте трения ($\mu > 0{,}37$) палочка будет проскальзывать в сторону падения (рис.4).

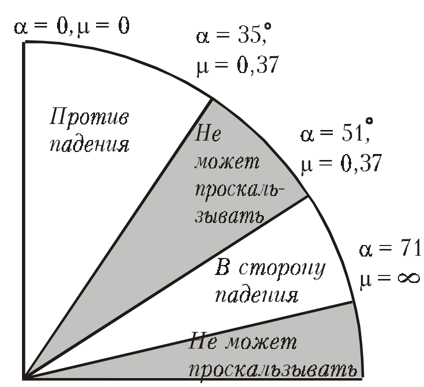

Рис. 4

Во-вторых, мы выяснили, что при любом сколь угодно большом μ проскальзывание начнется при угле отклонения, меньшем 71°. В-третьих, оказалось, что проскальзывание никогда не может начинаться в интервале углов от 35° до 51°. Согласитесь, что трудно было бы догадаться до всего этого заранее.