Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1636» или «Ф1643». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1637 – М1639, М1641 и М1645 предлагались на LXI Московской математической олимпиаде. Задачи Ф1643 – Ф1652 предлагались на Соросовской физической олимпиаде 1998 года.

Задачи М1636—М1645, Ф1643—Ф1652

М1636. Вокруг трапеции нельзя описать окружность. Докажите, что трапеция, образованная серединными перпендикулярами к ее сторонам, подобна исходной.

В.Кириченко

М1637. Квадрат со стороной 1 разрезали на k прямоугольников. Докажите, что сумма длин k наименьших сторон всех треугольников не менее 1.

В.Произволов

М1638. Красный квадрат площадью 1 покрывают более 100 белых квадратов, площадь каждого из которых равна 1. При этом стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить один белый квадрат так, что остальные все еще будут покрывать целиком красный квадрат?

С.Агеев

М1639. Путешественник посетил селение, в котором каждый человек либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Жители селения стали в круг, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив тот или лжив. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют правдивые. Определите и вы, чему она равна.

Б.Френкин

М1640. Четырехугольник $ABCD$ обладает тем свойством, что внутри него существует точка M, для которой AMB и CMD – равнобедренные треугольники с углом 120° при вершине M. Докажите, что тогда существует точка N, для которой BNC и DNA – равносторонние треугольники.

И.Шарыгин

М1641. Есть полубесконечная полоска бумаги, разделенная на клеточки с номерами 1, 2, 3, ..., и n камней. На первой клеточке камень лежит всегда. Разрешается положить в клетку камень или убрать камень из клетки, если на предыдущей клетке лежит камень. Как далеко от начала полоски можно положить камень, действуя в соответствии с этим правилом? Докажите, например, что на клетку с номером 2^{n-1} камень положить можно.

А.Шень

М1642. Некоторые стороны клеток шахматной доски 8×8 объявляются перегородками. Расстановка перегородок называется хорошей, если доска остается связной (ладья может пройти с любого поля на любое другое, минуя перегородки), и плохой – в противном случае. Каких расстановок больше – хороших или плохих?

А.Шаповалов

М1643. а) Существуют ли целые числа a и b ($a \neq 0$) такие, что последовательность $c_n = an! + b$ состоит только из квадратов?
b) Существуют ли целые числа a, b, c ($ab \neq 0$) такие, что для каждого n существует целое x, для которого $ax^2 + bx + c = n!$?

А.Егоров

М1644. Двое показывают следующий фокус. Один из перетасованной колоды, содержащей 52 карты, вытаскивает 5 произвольных карт и выкладывает четыре из них в ряд картинкой вверх, а пятую

а) также выкладывает в ряд среди остальных четырех, но картинкой вниз;

б*) берет себе.

Второй, глядя на эти четыре карты, называет пятую карту. Как он это делает?

Г.Гальперин

М1645. Докажите, что число способов, которыми можно расставить n чисел 1, 2, …, n $(n \geq 10)$ в последовательность без убывающих подпоследовательностей длиной 10, не превосходит 81^n.

А.Канель

Ф1643. На горизонтальной подставке с коэффициентом трения μ находятся два одинаковых больших бруска массой M каждый, связанные легкой нерастяжимой натянутой нитью (рис.1). На гладкой верхней

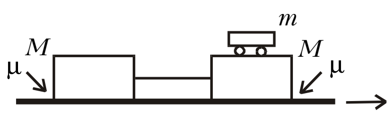

Рис.1

грани первого бруска находится небольшой гладкий грузик массой m. Подставку двигают в горизонтальном направлении с большой скоростью, направленной параллельно нити в сторону первого бруска (того, что с грузиком). Найдите силу натяжения нити, связывающей движущиеся тела, пока грузик не свалится.

М.Учителев

Ф1644. На гладком горизонтальном столе покоится тележка массой M (рис.2). По дну тележки может скользить без трения груз такой же массы, прикрепленный к

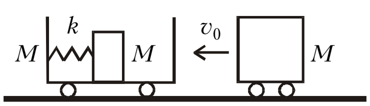

Рис.2

боковой стенке горизонтальной легкой пружинкой жесткостью k. Кубик массой M наезжает на тележку со скоростью v_0 и мгновенно прилипает к ней. Чему равна разность между максимальной и минимальной длинами пружинки при движении?

А.Кубиков

Ф1645. Через легкий блок, закрепленный на большой высоте H над горизонтальной поверхностью земли, переброшена гибкая веревка (рис.3). Концы веревки сложены внизу двумя бухтами, которые не препятствуют движению. С одной стороны за веревку ухватился человек массой M, который быстро перебирает руками, стараясь висеть на одной высоте над землей. При некоторой установившейся скорости движения веревки это ему удается. Найдите эту скорость. Масса одного метра веревки ρ, ускорение свободного падения g. Трение в блоке отсутствует.

З.Рафаилов

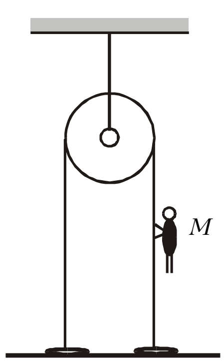

Рис.3

Ф1646. На легкой нити к потолку подвешен груз массой M, к нему на очень легкой пружинке жесткостью k прикреплен груз массой m (рис.4). Система вначале неподвижна. Нить пережигают, и грузы начинают падать в однородном поле тяжести. Чему равна разность между максимальным и минимальным значениями длины пружинки? Через какое время после пережигания нити натяжение пружинки в первый раз станет нулевым? Считайте, что за время, необходимое для решения задачи, грузы еще не упадут на пол.

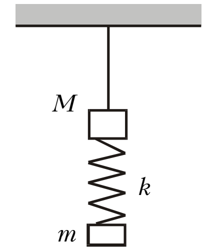

Рис.4

А.Повторов

Ф1647. В глубоком космосе на большом расстоянии от всех других тел движется длинная цилиндрическая труба, запаянная с одного конца. Неподалеку от этого конца приклеен поршень массой $M = 1$ кг, отделяющий от окружающего вакуума $1/100$ полного объема трубы. В этой части трубы находится небольшая порция азота при температуре $T = 300$ К и давления $p = 0{,}5$ атм. В некоторый момент поршень отклеивается и под давлением газа начинает скользить без трения вдоль трубы. Определите, через какое время после начала движения поршень вылетит из трубы. Длина трубы $L = 5$ м, площадь поперечного сечения $S = 100$ см^2, масса трубы в 10 раз больше массы поршня.

Р.Александров

Ф1648. В сосуде объемом $V = 100$ л находится воздух при нормальных условиях. Снаружи – вакуум. В стенке сосуда на время $\tau = 1$ с открывается небольшое отверстие площадью $S = 0{,}1$ см^2 и сразу после этого закрывается. Оцените количество вылетевших за это время молекул и их суммарную энергию. Кстати заметим, что воздух – смесь двухатомных газов.

К.Тотов

Ф1649. Конденсатор емкостью C состоит из двух параллельных пластин, находящихся на малом расстоянии друг от друга. Конденсатор зарядили до напряжения U_0 и отключили от источника. Посредине конденсатора параллельно его пластинам вставлена еще одна пластина, и еще одна пластина расположена параллельно снаружи, так что эти дополнительные пластины образуют точно такой же конденсатор (рис.5). Дополнительные пластины соединяют между собой проводником, имеющим большое сопротивление. Какое количество теплоты выделится в этом проводнике?

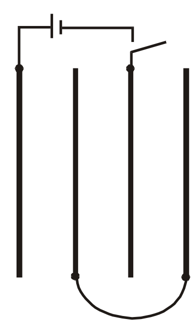

Рис.5

А.Зильберман

Ф1650. Электрическая цепь составлена из большого количества одинаковых звеньев (рис.6). Каждое такое

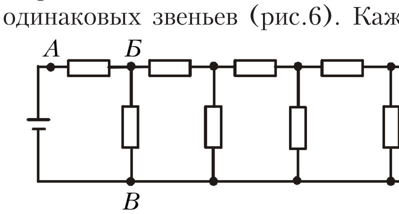

Рис.6

звено состоит из двух резисторов. К началу цепи подключен источник постоянного напряжения U = 12 В. Идеальный амперметр подключают параллельно первому резистору цепи (между точками A и $Б$), и он показывает силу тока I_1 = 5 мА. Если тот же амперметр подключить между точками $Б$ и $В$ (параллельно второму резистору), то он покажет I_2 = 2 мА. Определите по этим данным сопротивления резисторов одного звена.

А.Зильберман

Ф1651. Конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0. К нему подключают катушку индуктивностью L и в некоторый момент к выводам катушки подключают цепочку из параллельно соединенных катушки индуктивностью $2L$ и резистора с большим сопротивлением R (рис.7). Какое количество теплоты выделится в резисторе? Зависит ли эта величина от момента подключения цепи к катушке? Элементы цепи считайте идеальными.

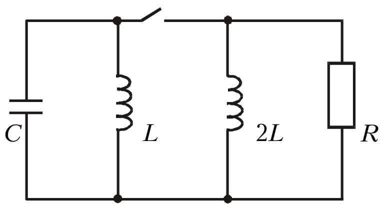

Рис.7

М.Учителев

Ф1652. К простой цепи, собранной из двух резисторов сопротивлением R = = 1 кОм и двух конденсаторов емкостью C = 1 мкФ, подведено напряжение сети: 220 В, 50 Гц (рис.8). Амперметр в схеме имеет очень маленькое сопротивление. Найдите показание амперметра. Обычно приборы переменного тока градуируются в действующих (эффективных) значениях.

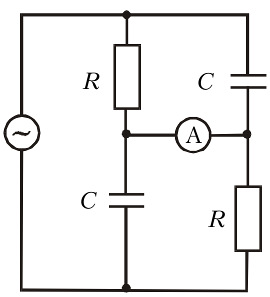

Рис.8

А.Зильберман