

Рис. 3

Учитывая симметрию задачи, будем искать решение, удовлетворяющее условию $a \leq b \leq c$. Пусть $a = 1$, тогда $(b - 3)(c - 1) = 13$, откуда $b = 4, c = 16$. Пусть $a = 2$, тогда $(b - 2)(c - 2) = 12$ и либо $b = 3, c = 14$, либо $b = 4, c = 8$, либо $b = 5, c = 6$. Пусть $a = 3$, тогда $(b - 1)(c - 1) = 13$, что невозможно.

Пусть $a = 4$, тогда $bc = 16$, откуда $b = c = 4$. При $a \geq 5$ решений нет: $(a - 2)(b - 2) + (b - 2)(c - 2) + (c - 2)(a - 2) \geq 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27 > 12$.

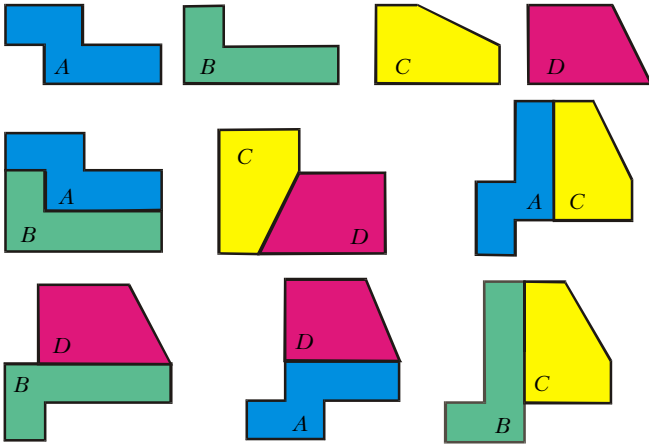


Рис. 4

Остальные решения получаются перестановкой переменных a, b и c .

15. Положим $a_1 = a, a_2 = b$, тогда $a_3 = \frac{b+1}{a}$;

$$a_4 = \frac{\frac{b+1}{a} + 1}{b} = \frac{a+b+1}{ab}$$

$$a_5 = \frac{\frac{a+b+1}{ab} + 1}{\frac{b+1}{a}} = \frac{a+1}{b}$$

$$a_6 = \frac{\frac{a+1}{b} + 1}{\frac{a+b+1}{ab}} = a; a_7 = \frac{a+1}{\frac{a+1}{b}} = b.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{a_n\}$ периодическая: ее значения повторяются через 5 номеров. Следовательно, $a_{1997} = a_2 = 1828$.

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПАРАДОКС СПУТНИКА

1. Такое явление наблюдается, когда на орбитальное движение тела влияет сопротивление разреженного атмосферного воздуха. Суть дела в том, что, двигаясь в разреженном газе, компактный спутник, укомплектованный научными приборами или другим оборудованием, испытывает меньшее сопротивление, чем сравнительно большая по размерам пустотелая ракета с отработанными двигателями. У ракеты больший баллистический коэффициент C , или, как иногда говорят,

большая парусность, чем у спутника. Вот почему аэродинамический парадокс выражен более ярко для ракеты, нежели для спутника, который падает на Землю в разреженной атмосфере медленнее и по более пологой траектории. Таким образом, спутник заметно отстает от ракеты, хотя последняя испытывает большее торможение в разреженной атмосфере, чем спутник.

2. Движение спутника по эллиптической орбите, пересекающей верхние разреженные слои атмосферы, имеет интересную особенность. В перигее спутник, испытывая максимальное сопротивление, теряет в скорости на каждом витке, и, тем самым, его апогей уменьшается. В апогее торможение спутника меньше, чем в перигее, особенно если орбита заметно вытянута. Поэтому перигей не снижается так сильно, как апогей, т.е. орбита действительно стремится к круговой. (Точное решение задачи о движении спутника достаточно сложное, так как требуется учитывать еще изменение скорости спутника на каждом витке вследствие его падения в поле тяжести Земли.)

3. Указание. Воспользуйтесь уравнением моментов (7).

4. Допустим, что сила притяжения спутника к планете определяется выражением $F = A/R^n$, где A – постоянная. Из уравнения $mv^2/R = A/R^n$ найдем выражение для кинетической энергии спутника:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{A}{2R^{n-1}}.$$

Для заданного поля сил потенциальная энергия спутника равна

$$W_n = -\frac{A(n-1)}{R^{n-1}},$$

а полная энергия составляет

$$W_{\text{пол}} = -\frac{A}{2R^{n-1}}(3-2n) = W_k(3-2n).$$

Баланс полной энергии спутника в начале и в конце витка с учетом работы силы сопротивления $F_{\text{сопр}}$ приводит к такому выражению для тангенциального ускорения пролетающего в разреженной атмосфере спутника:

$$a_t = \frac{F_{\text{сопр}}}{m(2n-3)}.$$

Отсюда очевидно, что при $n > 1,5$ можно говорить об аналоге аэродинамического парадокса спутника в гравитационном поле.

5. Так как орбитальная скорость спутника во много раз превышает среднюю тепловую скорость молекул, находящихся в верхних слоях атмосферы, при расчетах сил торможения спутника мы не учитывали собственное движение частиц среды. Кажется бы, торможение спутника на больших высотах не должно зависеть от температуры воздуха T . Однако это не так. Дело в том, что при изменении температуры изменяется плотность газа – с ростом температуры плотность возрастает. Увеличивается также характерная толщина атмосферы $\Delta h \approx RT/(Mg)$, на которой давление газа изменяется в e раз (здесь R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса воздуха, g – ускорение свободного падения). Вариации плотности газа из-за изменения температуры скажутся на торможении спутника.

6. Мы знаем, что если бы на Земле не было гор и впадин, а вода всего мирового океана равномерно покрывала земной шар, то глубина этого океана была бы около 2 км. Давление на дне достигало бы величины 200 атм. Чтобы при таком давлении превратить воду в пар, требуется ее нагреть до температуры чуть больше 600 К – именно такой должна быть минимальная температура атмосферы Земли, чтобы вся свободная вода на Земле существовала в виде пара. В этом слу-