

Если положить $l_1 > l_2$, то получаем неравенство

$$\omega_1 < \omega < \omega_2.$$

Таким образом, частота колебаний маятника с двумя грузами, расположенными на расстояниях l_1 и l_2 от оси вращения, меньше большей и больше меньшей из собственных частот колебаний двух независимых математических маятников с длинами нитей l_1 и l_2 соответственно.

Исследуем теперь более детально выражение для ω . Предположим, что один из грузов, например груз с массой m_1 , расположен на фиксированном расстоянии l_1 от оси вращения маятника, а расстояние l_2 второго груза с массой m_2 меняется. Найдем отношение частоты колебаний нашего маятника к частоте колебаний математического маятника с длиной нити l_1 :

$$y = \frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{\frac{l_1(m_1 l_1 + m_2 l_2)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}}.$$

Введем безразмерные переменные $x = l_2/l_1$ и $a = m_2/m_1$. Тогда

$$y = \sqrt{\frac{1+ax}{1+ax^2}}.$$

Исследуем зависимость y от x , т.е. зависимость отношения частот ω/ω_1 от отношения длин l_2/l_1 . Поступим следующим образом. Обозначим $z = 1 + ax$ и

запишем

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{az}{z^2 - 2z + a + 1}} = \sqrt{\frac{a}{z + \frac{a+1}{z} - 2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a}{\left(\sqrt{z} - \sqrt{\frac{a+1}{z}}\right)^2 + 2(\sqrt{a+1} - 1)}}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция $y(z)$ изменяется немонотонно: с ростом z (начиная с $z = 1$) функция сначала растет, достигает максимума при $z = \sqrt{a+1}$ (это следует из условия обращения в ноль первого слагаемого в знаменателе), после чего монотонно убывает. Максимальное значение при этом равно

$$y_{\max} = \sqrt{\frac{a}{2(\sqrt{a+1} - 1)}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a+1} - 1)}.$$

Возвращаясь снова к переменной x , находим значение $x = x_0$, при котором функция $y(x)$ достигает максимума:

$$\begin{aligned} x = x_0 &= \frac{\sqrt{a+1} - 1}{a} = \\ &= \frac{\sqrt{m_1(m_1 + m_2)} - m_1}{m_2}. \end{aligned}$$

На рисунке 2 представлен график зависимости функции $y = y(x)$. Видно, что $y > 1$ в области $0 < x < 1$, т.е. при $l_1 > l_2$ получаем $\omega > \omega_1$. Наоборот, $y < 1$

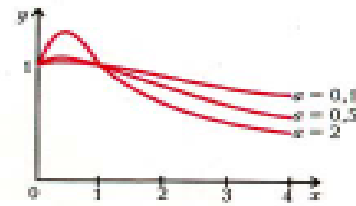


Рис. 2

в области $x > 1$, т.е. при $l_1 < l_2$ получаем $\omega < \omega_1$. Отметим, что чем больше параметр a , тем выше максимум.

Нетрудно обобщить полученные результаты на случай n тел с массами m_1, m_2, \dots, m_n , закрепленных на невесомом стержне на расстояниях l_1, l_2, \dots, l_n соответственно от точки подвеса:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + \dots + m_n l_n^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2 + \dots + m_n l_n}}.$$

Если массы всех грузов одинаковы, то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2}{l_1 + l_2 + \dots + l_n}},$$

т.е. период колебаний определяется только расстояниями, на которых располагаются грузики.

Еще один вечный двигатель?

А. СТАСЕНКО

Первые проекты механического вечного двигателя относятся к 13 веку (Виллар де Оннекур, 1245, Пьер де Марикур, 1269, Франция) ... С 1775 года Парижская Академия наук отказалась рассматривать проекты вечного двигателя.

Физический энциклопедический словарь

ПРОЕКТЫ вечных двигателей запрещено рассматривать, чтобы не тратить напрасно время. Но иногда полезно порассуждать и понять, действительно ли некую машину можно отнести к классу запрещенных «вечных двигателей».

Так вот, один вдумчивый школьник слышал, что молекулы при столкновении со стенкой могут терять определенную часть импульса, а в предельных случаях — отражаться абсолютно упруго (изменяя скорость нормально-го удара на обратную без изменения

модуля) или неупруго (полностью теряя эту скорость и «соскальзывая» уже вдоль поверхности). И тут его осенило.

Он решил приобрести пластинку, одна сторона которой отражает молекулы абсолютно упруго, а другая — неупруго, и, вырезав из нее два одинаковых по площади диска, насадить их на стержень (конечно, невесомый), предварительно развернув на 180° их плоскости относительно друг друга, а затем этот стержень укрепить на вертикальной оси, конечно, без трения. И он даже нарисовал это устройство (рис.1, вид сверху). На этом рисунке он обозначил и площадь дисков S , и среднюю тепловую скорость молекул газа v , и линейную (окружную) скорость дисков u в данное мгновение, а круглой стрелкой показал ожидаемое направление вращения всего устройства. При этом он принял, что левая поверхность верхнего диска отражает молекулы упруго, а правая — неупруго.