

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Маятник с несколькими грузиками» предназначена девятиклассникам, заметка «Еще один вечный двигатель?» — десятиклассникам, «Закон электромагнитной индукции или «правило потока»?» — одиннадцатиклассникам.

Маятник с несколькими грузиками

П. ХАДЖИ, А. МИХАЙЛЕНКО

ЛОГИЧЕСКИМ и простейшим обобщением традиционного математического маятника является маятник с двумя или более грузиками. Такой маятник можно назвать частным случаем физического маятника.

Рассмотрим сначала более простой случай. Пусть к жесткому невесомому стержню прикреплены два точечных тела с массами m_1 и m_2 на расстояниях l_1 и l_2 соответственно от точки подвеса (рис.1,а). Найдем частоту колебаний такого маятника.

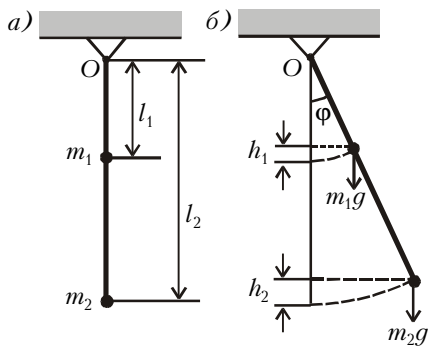


Рис. 1

В положении равновесия стержень маятника располагается вертикально. Выведем маятник из положения равновесия, отклонив стержень с грузами на небольшой угол φ (рис.1,б). Каждый из грузов при этом поднимется на определенную высоту относительно своего положения равновесия. Первый поднимется на высоту $h_1 = l_1(1 - \cos \varphi)$, а второй — на $h_2 = l_2(1 - \cos \varphi)$. Запасенная системой грузов потенциальная энергия относительно положения рав-

новесия будет равна

$$\Delta E_p = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g (1 - \cos \varphi).$$

Предоставим теперь маятник самому себе. Благодаря касательным составляющим сил тяжести грузов (которые играют роль «возвращающих» сил), маятник начнет двигаться к положению равновесия. Линейные скорости грузов по мере приближения к положению равновесия будут возрастать. В положении равновесия полная кинетическая энергия грузов станет равной

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где v_1 и v_2 — линейные скорости движения грузов. Выражая v_1 и v_2 через угловую скорость вращения стержня Ω и длины l_1 и l_2 :

$$v_1 = \Omega l_1, \quad v_2 = \Omega l_2,$$

кинетическую энергию системы можно представить в виде

$$E_k = \frac{1}{2} \Omega^2 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2).$$

Предполагая, что в системе отсутствуют потери энергии из-за трения в оси и сопротивления воздуха, и используя закон сохранения энергии, можно приравнять потенциальную энергию кинетической. В результате для угловой скорости вращения стержня получаем выражение

$$\Omega^2 = 2g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} (1 - \cos \varphi).$$

Сравним наш маятник с некоторым математическим маятником, имеющим

такую длину L , что при одном и том же начальном отклонении φ от положения равновесия угловые скорости Ω и периоды колебаний T обоих маятников оказываются одинаковыми. Для математического маятника можно записать

$$\Delta E_p = mgL(1 - \cos \varphi),$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2,$$

$$v = \Omega L.$$

Используя закон сохранения энергии, для угловой скорости Ω получаем выражение

$$\Omega^2 = 2 \frac{g}{L} (1 - \cos \varphi).$$

Так как при одном и том же угловом отклонении φ угловые скорости Ω обоих маятников равны, приравняв правые части соответствующих равенств, находим длину L математического маятника, эквивалентного исходному маятнику с двумя грузами:

$$L = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2},$$

а значит, и частоту колебаний нашего физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}},$$

и его период:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{m_1 l_1 + m_2 l_2}}.$$

Если m_1 либо m_2 равны нулю (т.е. один из грузов отсутствует), то из последнего выражения получаем формулу для периода колебаний математического маятника. Если же, например, $m_1 = m_2$ (т.е. массы обоих грузов одинаковы), то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1 + l_2}}.$$

Таким образом, частота и период колебаний нашего маятника определяются как массами грузов, так и их расстояниями от оси вращения.

Сравним полученное выражение для частоты колебаний исследуемого маятника ω с частотами колебаний двух независимых математических маятников с длинами нитей l_1 и l_2 соответственно, которые выражаются формулами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}}.$$