

# Физика рулетки

Э.РУМАНОВ

**Р**УЛЕТКА манит возможностью быстро разбогатеть без особого труда — достаточно лишь «поймать удачу». Погоня за удачей создает драматические ситуации, изображение которых так обжигающе правдиво у Ф.М.Достоевского (в «Игроке»). Мы же обратимся не к человеческим страстям и порокам, а к их объекту — самой рулетке.

Почему нельзя заранее определить, куда попадет шарик? Если известны начальные условия — положение и скорость шарика в тот момент, когда его запускает крупье, — то, казалось бы, интегрируя уравнения Ньютона, можно узнать всю траекторию и, в частности, ту точку, где шарик остановится. П.Лаплас (1749 — 1827) думал, что предсказывать будущее мешают чисто технические трудности: нет такого демона, который смог бы проинтегрировать множество уравнений для всех частиц Вселенной. Демона действительно нет, зато появились компьютеры, способные справиться с объемом вычислений, какой во времена Лапласа едва ли можно было представить. Тем не менее, наша способность делать точные (а не вероятностные — типа «ожидается переменная облачность, местами возможен кратковременный дождь») предсказания с тех пор практически не возросла. Что же мешает изгнать случайность из нашей жизни? Попробуем разобраться.

С этой целью вместо настоящей рулетки рассмотрим весьма упрощенную, но вполне работоспособную ее модель. Пусть шарик движется по желобу, изогнутому, как показано на рисунке 1. Ускорение в каждой точке определяется действием силы тяжести и силы трения. Но часть силы тя-

жести компенсируется реакцией дна желоба, ускорение создает только проекция на направление движения (вспомните наклонную плоскость). На рисунке 2 изображен малый участ-

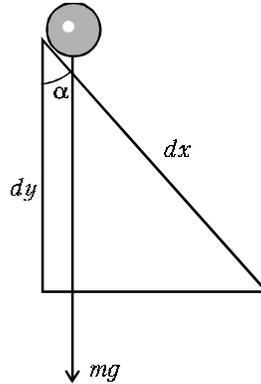


Рис. 2

ток дна желоба, который приближенно можно считать кусочком наклонной плоскости. Пусть размер этого кусочка  $dx$ . Проекция силы тяжести на направление движения равна  $F_1 = mg \cos \alpha$ , где  $m$  — масса шарика. Перемещаясь по желобу на расстояние  $dx$ , шарик опускается на  $dy = dx \cos \alpha$ . Поэтому

$$F_1 = -mg \frac{dy}{dx}. \quad (1)$$

Силу трения запишем в виде

$$F_2 = -kv, \quad (2)$$

где  $v = dx/dt$  — скорость шарика, а величину  $k$  называют коэффициентом трения. Направления скорости и силы трения всегда противоположны, отсюда знак «минус» в формуле.

Согласно рисунку 1, имеются три точки  $x_1, x_2, x_3$ , в которых производная  $dy/dx$ , а значит и сила  $F_1$ , обращается в ноль. В окрестности точки равновесия  $x_1$  сила тяжести стремится приблизить шарик к этой точке (при  $x < x_1$  величина  $F_1$  положительна, а при  $x > x_1$  — отрицательна). Такое равновесие называют устойчивым. Равновесие в точке  $x_3$  тоже устойчивое, а в точке  $x_2$  — неустойчивое: малейшее отклонение

от этой точки под действием силы тяжести будет увеличиваться. Очевидно, движение шарика может окончиться только в точке устойчивого равновесия. Поэтому для системы с одной точкой равновесия конечный результат вообще не зависит от начальных условий. Но поскольку в желобе таких точек две, множество возможных начальных условий разбивается на две части. Условия, принадлежащие одной из них, приводят шарик в точку  $x_1$ , другие — в  $x_3$ . Эти части называют областями притяжения точек  $x_1$  и  $x_3$  соответственно. Теперь мы можем четче сформулировать задачу: нужно найти области притяжения, точнее говоря, — границу между ними. Ставки сделаны, господа!

Плоскость, на которой расположена эта граница, называется фазовой плоскостью. Сейчас мы с ней познакомимся. В каждый момент времени шарик находится в какой-либо точке  $x$  и имеет скорость  $v$ . Начертив на листе оси  $x$  и  $v$ , скажем, что каждому состоянию шарика, т.е. каждой паре  $(x, v)$ , отвечает точка на плоскости. Это и есть фазовая плоскость. Она как бы состоит из множества точек — «представителей» разных состояний шарика («фаза» и «состояние» имеют практически одинаковый смысл). Про фазовую плоскость можно сказать и иначе. Пусть  $x_0, v_0$  — координата и скорость шарика в начальный момент, так что состояние изображается точкой  $(x_0, v_0)$ . По мере движения  $x$  и  $v$  меняются, точка будет рисовать линию — фазовую траекторию. Если выбрать другую начальную точку, получится другая траектория. Продолжая выбор начальных точек, покроем траекториями весь лист. Поэтому фазовую плоскость можно представить составленной из множества траекторий, отвечающих разным начальным условиям.

Математики доказали теорему о том, что через каждую точку фазовой плоскости проходит лишь одна траектория, так что выбора у шарика, как будто, нет. Однако эта

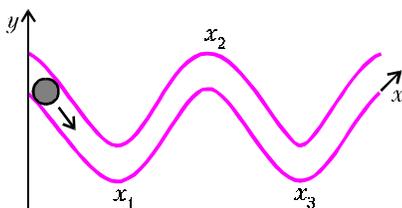


Рис. 1

теорема допускает исключения: есть особые точки, и мы увидим, что они играют самую главную роль. При первом знакомстве с фазовыми траекториями положим (временно), что трения нет, т.е.  $k = 0$ . Тогда сохраняется полная энергия шарика  $E$  — сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgy(x). \quad (3)$$

Согласно этому равенству, каждому значению  $E$  отвечает линия на плоскости  $(x, v)$ . Действительно, равенство (3) можно переписать, например, в виде

$$v = \pm \sqrt{2 \left( \frac{E}{m} - gy(x) \right)} \quad (4)$$

и строить графики  $v(x)$  для разных  $E$ . Эти графики — фазовые траектории — изображены на рисунке 3.

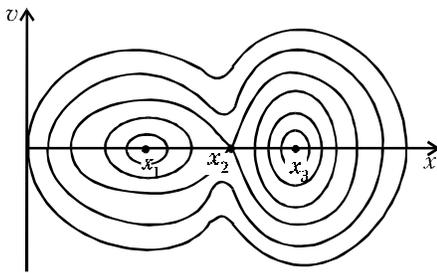


Рис. 3

Они напоминают горизонтали на топографической карте с двумя котловинами, разделенными перевалом.

Пусть энергия шарика немного больше, чем  $mgy_1$ , где  $y_1$  — ордината точки  $x_1$  на рисунке 1. Тогда его фазовой траекторией будет замкнутая кривая, охватывающая точку  $x_1$ , как это показано на рисунке 3. В самой левой точке этой траектории скорость равна нулю, а потенциальная энергия равна  $E$ . Затем шарик приближается к точке равновесия  $x_1$ , скорость его растет и достигает максимума в точке равновесия. Далее, по мере того как шарик отклоняется от равновесия вправо, скорость падает и обращается в ноль при максимальном отклонении, когда потенциальная энергия вновь равна  $E$ . Теперь шарик движется справа налево ( $v < 0$ ) до тех пор, пока не вернется в исходную точку (в которой был, когда

мы начали следить за ним). Потом все повторяется — движение колебательное. Таким образом, замкнутые траектории на фазовой плоскости отвечают колебательному движению.

На рисунке 3 есть траектории, охватывающие точку  $x_1$ , точку  $x_3$  и обе эти точки. Пока  $E < mgy_2$ , где  $y_2$  — высота точки неустойчивого равновесия ( $y_2 = y(x_2)$ ), шарик колеблется в пределах одной из ям — той, в которую его поместили в начальный момент. Если энергию увеличивать, то размах колебаний скачком возрастет при  $E = E_2 = mgy_2$ , когда появляется возможность перекачаться через горб (см. рис.1). Траектории малого и большого размахов на рисунке 3 разделяет линия (отвечающая  $E = E_2$ ) в форме восьмерки, лежащей на боку. Это — сепаратриса (от separate — разделять). Ее значение в жизни нашей рулетки так велико, что давайте сделаем небольшое математическое усилие и найдем форму этой кривой вблизи точки  $x_2$ .

В окрестности  $x_2$  ординату представим в виде

$$y(x) = y_2 - b\delta^2, \quad (5)$$

где  $b > 0$ , а  $\delta$  — малая разность  $x - x_2$ . Действительно, величины  $\delta^3$ ,  $\delta^4$  и т.д. слишком малы и ими можно пренебречь. Почему, однако, нет слагаемого  $a\delta$ ? Если такой член включить, то функция  $y(x)$  в одну сторону от точки  $x_2$  будет убывать, а в другую — возрастать. Но она убывает в обе стороны от  $x_2$ . Поэтому должно быть  $a = 0$  и  $b > 0$ . Подставляя выражение (5) в формулу (4), получаем

$$v = \pm \sqrt{2bg\delta}. \quad (6)$$

Конечно, это равенство пригодно лишь при малых  $\delta$ . Важно, что через точку  $(x_2, 0)$  фазовой плоскости проходят две траектории, а не одна. Потом эти линии соединяются, образуя петли сепаратрисы, но для свойств точки  $(x_2, 0)$  это не имеет значения. Особая точка, через которую проходят две траектории, называется седловой, так что сепаратриса — это траектория, проходящая через седловую точку. Другие особые точки на рисунке 3 — точки  $(x_1, 0)$  и  $(x_3, 0)$  — характеризуются тем, что через них не проходит ни одна траектория. Заметим еще, что если взять две близкие точки на фазовой плоскости,

то проходящие через них траектории тоже близки, но за одним исключением. Когда такие точки разделены сепаратрисой, близкие первоначально траектории подходят вместе с ней к седловой точке, а там «разбегаются».

Идеальный мир сохраняющейся механической энергии не подходит, конечно, в качестве модели рулетки. Запущенный в желоб шарик будет вечно там колебаться, не желая выбирать между двумя ямками. Покидая этот воображаемый мир, обратим внимание на то, что в нем нельзя различить прошлое и будущее. По фазовой траектории можно вращаться по (или против) часовой стрелке, проходя одни и те же состояния. Имеет место симметрия траекторий относительно оси  $x$ . Это свойство обусловлено тем, что сила  $F_1$ , в отличие от силы трения  $F_2$ , не зависит от скорости. Выражающее второй закон Ньютона равенство

$$ma = F_1, \quad (7)$$

где  $a = d^2x/dt^2$  — ускорение шарика, оказывается симметричным относительно преобразования  $t \rightarrow -t$ .

В реальном мире (с трением) у шарика есть будущее. Его энергия убывает со временем, колебания затухают, достигается равновесие. Фазовые траектории больше не являются замкнутыми линиями, они превращаются в спирали, скручивающиеся к точкам  $x_1$  и  $x_3$ , так что через каждую из точек проходит бесконечное множество траекторий. Говорят, что точки равновесия «притягивают» траектории. Что касается седловой точки, то ее природа не меняется: по-прежнему через эту точку проходят две траектории.

Теперь у читателя, которому еще не надоела рулетка, имеются две возможности. Либо поверить утверждению о двух траекториях и пропустить следующий абзац. Либо познакомиться с доказательством. (Тому, кого привлекает исследовательская работа, стоит быть недоверчивым.)

В законе Ньютона учтем силу трения и запишем

$$ma = -mg \frac{dy}{dx} - kv. \quad (8)$$

Вблизи точки  $x_2$  используем для функции  $y(x)$  приближенное выражение (5), так что  $dy/dx = dy/d\delta = -2b\delta$ . Из определений  $v = dx/dy$ ,

$a = dv/dt$  следует  $a = v(dv/dx)$ , или  $a = v(dv/d\delta)$ . Учитывая все эти соотношения, можем переписать равенство (8) в виде

$$\frac{dv}{d\delta} = \frac{2bg\delta}{v} - \frac{k}{m}. \quad (9)$$

Вблизи точки  $(x_2, 0)$  малы  $\delta$ , и  $v$ . Положим в окрестности этой точки  $v = A\delta$ . Тогда получим уравнение

$$A = \frac{2bg}{A} - \frac{k}{m},$$

откуда

$$A = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} + 2bg}. \quad (10)$$

Как видим, для  $A$  получаются два вещественных значения (одно из них положительное, другое отрицательное). Значит, через рассматриваемую точку фазовой плоскости по-прежнему проходят две траектории.

Но теперь на фазовых траекториях надо ставить стрелки, показывающие направление движения (направление убыли энергии). Из четырех «ветвей» сепаратрисы, соединяющихся в седловой точке, две — входящие, две другие — выходящие. Ветвь, выходящая в сторону  $x < x_2$ , переходит в спираль, скручивающуюся к точке  $(x_1, 0)$ , другая выходящая ветвь скручивается к точке  $(x_3, 0)$ . Если же двигаться от седловой точки по входящей ветви, то это будет движение «назад по времени». <sup>1</sup> Энергия шарика по мере такого движения будет увеличиваться, поэтому получится раскручивающаяся спираль. Но так как есть две входящие ветви, должны быть две такие спирали, вложенные одна в другую. Эта сепаратриса построена на рисунке 4.

Прежде всего заметим, что симметрия относительно оси  $x$ , которая была на рисунке 3, пропала. Это — следствие необратимости движения, направленности фазовых траекторий. Спирали входящих ветвей сепаратрисы делят фазовую плоскость на две области — на рисунке 4 они окрашены красным и синим. Это те самые области притяжения, найти которые было нашей целью.

<sup>1</sup> Если вы захотите в будущем изучать физику всерьез и столкнетесь с диаграммами Фейнмана, то, может быть, вспомните «движение назад по времени».

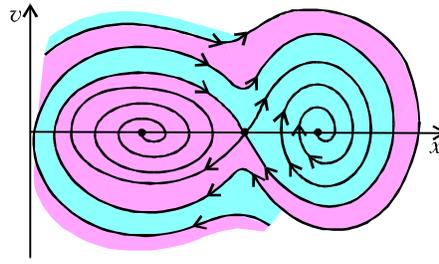


Рис. 4

Действительно, согласно известной нам теореме, траектории не могут пересекаться (нигде, кроме особых точек); в частности, не могут пересекать входящие ветви сепаратрисы — границы синей и красной областей. Учитывая это и глядя на рисунок 4, нетрудно убедиться, что если траектория начинается где-либо в красной области, она придет в точку  $(x_1, 0)$ , если в синей — в точку  $(x_3, 0)$ .

Итак, чтобы узнать, в какую ямку попадет шарик, нужно нанести на рисунке 4 точку, изображающую его начальное состояние (положение и скорость), и посмотреть, каков цвет области, где окажется эта точка. Значит, крупье все известно заранее и всякая рулетка — сплошное жульничество? Жульничество, вероятно, бывает. Но утверждать, что все заранее известно, пожалуй, нельзя, и вот почему.

Структура областей притяжения вблизи точек  $(x_1, 0)$ ,  $(x_3, 0)$  компактна, но дальше (иначе говоря, при больших энергиях) начинается «чересполосица». Плавно меняя начальные условия, вы обнаруживаете, что результат «прыгает»: шарик оказывается то в левой ямке, то в правой, потом вновь в левой и т.д. Особенно часты прыжки при малом трении, когда полосы областей притяжения достаточно узкие. Если начальные условия известны с некоторой погрешностью (что всегда имеет место в реальном мире) и величина погрешности  $\Delta x$ ,  $\Delta v$  сравнима или превышает ширину полосы, никаких достоверных предсказаний сделать нельзя. В настоящей рулетке движение шарика не стеснено желобом, вместо фазовой плоскости приходится гулять по четырехмерному фазовому пространству, где полным-полно седловых точек и сепаратрис. Там дело предсказателя вовсе безнадёжно.

То что именно неточность знания

начальных условий мешает предсказывать будущее, впервые понял ленинградский физик Н.С.Крылов (1917 — 1947). Позднее к этим проблемам обратился один из основателей квантовой теории Макс Борн (1882 — 1970) и пришел к похожим выводам. Когда трением можно пренебречь, все сводится к разбеганию траекторий вблизи седловой точки, о котором мы уже знаем. Благодаря разбеганию, небольшие изменения начальных условий со временем сильно сказываются на движении, если фазовое пространство достаточно богато седловыми точками. Соответственно, малая погрешность исходных данных лишает определенности долгосрочный прогноз. Однако трение приводит в конце концов к равновесию, и неопределенность остается лишь там, где — как у рулетки — несколько точек равновесия.

Почти все окружающие нас системы подвержены внешнему воздействию, так что равновесие в них не устанавливается. (Световой поток от Солнца мешает Земле прийти в равновесие с межпланетной средой.) Такие системы называют активными. Из-за трения и других необратимых (подобно трению) процессов состояния активной системы постепенно перестают зависеть от начальных условий — они одинаковы для разных условий. Это означает, что в фазовом пространстве точки, отвечающие этим состояниям, окружены областью притяжения. Но теперь траектории, покрывающие область притяжения, не обязательно сходятся к точке, как в случае равновесия. Они могут «притягиваться» к линии, поверхности и т.д. При этом разные притягивающие объекты соответствуют разным типам поведения системы.