

Задачи с распределенной массой

А. ЧЕРНОУЦАН

ДВЕ ОСНОВНЫЕ модели механики — это материальная точка и твердое тело. В отличие от точек, твердые тела могут двигаться не только поступательно, но и вращательно. Поскольку динамику вращательного движения твердого тела в школе не изучают, большинство задач динамики посвящено движению точки. И тем не менее, некоторые школьные задачи (как олимпиадные, так и вступительные) имеют дело с протяженными телами, массу которых нельзя считать сосредоточенной в одной точке.

В этой статье будут рассмотрены разнообразные линейные объекты — веревки (массивные нити), цепочки, струи, масса которых распределена вдоль одной линии. Подход к обсуждению движения таких тел, в сущности, обычный — в основе лежат уравнения динамики точки для небольшого элемента протяженного тела. При этом в одних случаях достаточно записать уравнения динамики для одного-единственного элемента линейного объекта. Главное — правильно этот элемент выбрать. В других случаях возникает необходимость просуммировать уравнения движения, записанные для отдельных элементов, по всей длине. При удачной записи уравнений (при проектировании на удачно выбранные оси) суммирование может оказаться совсем несложным.

Теперь — конкретные задачи.

Задача 1. Струя воды сечением S ударяется о стенку, расположенную перпендикулярно струе. Скорость воды в струе v , после удара вода теряет скорость и стекает по стенке. Какова сила давления воды на стенку? Плотность воды ρ .

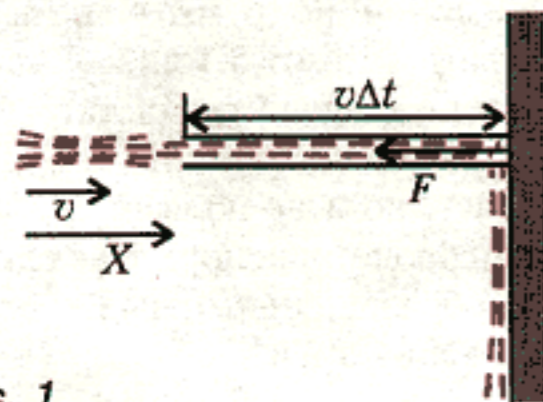


Рис. 1

Изменение импульса воды за время Δt равно импульсу силы реакции, действующей на воду со стороны стенки, а по третьему закону Ньютона эта сила равна по величине искомой силе давления струи на стенку. Изменение импульса воды сводится к изменению импульса элемента струи длиной $\Delta l = v\Delta t$, который за время Δt пришел в соприкосновение со стенкой (рис. 1):

$$0 - \Delta mv = -F\Delta t.$$

Подставляя $\Delta m = \rho(v\Delta t)S$ и сокращая на Δt , получаем

$$F = \rho S v^2.$$

Характерно, что интервал времени Δt и длина элемента струи Δl выбираются произвольно, но в ответ они, конечно же, не входят.

Задача 2. Космический корабль массой M движется в глубоком космосе. Для управления кораблем используется реактивный двигатель, который выбрасывает реактивную струю со скоростью u относительно корабля, причем расход топлива в струе равен μ (расход топлива — это масса топлива, выбрасываемая за единицу времени). Найдите ускорение корабля.

Изменение импульса замкнутой системы корабль — топливо за время Δt равно нулю. Запишем закон сохранения импульса в системе отсчета, в которой скорость корабля в начале этого интервала времени равна нулю:

$$0 = M\Delta \vec{v} + \mu\Delta t \vec{u},$$

где $\Delta \vec{v}$ — изменение скорости корабля. Перепишем это уравнение в виде

$$M \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = -\mu \vec{u}.$$

Стоящее в правой части выражение называется реактивной силой. Если на корабль действует еще и внешняя сила \vec{F} (например, со стороны поля тяготения), то ускорение корабля $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ вычисляется по формуле

$$M \vec{a} = -\mu \vec{u} + \vec{F}.$$

Это уравнение называется *уравнением Мещерского*. При его решении, вообще говоря, надо учитывать, что масса корабля M уменьшается со временем.

Задача 3. Тонкая цепочка длиной l и массой m удерживается за верхний конец так, что нижним концом она касается земли. Цепочку отпускают, и она начинает падать. Найдите силу давления цепочки на землю через время t . Цепочка неупругая и мягкая.

Поскольку цепочка мягкая, сила взаимодействия нижних звеньев с поверхностью не передается верхним, которые свободно падают с ускорением g . К моменту времени t часть цепочки длиной $gt^2/2$ и массой $(m/l)gt^2/2$ лежит на земле, а верхняя часть цепочки падает со скоростью $v = gt$. Сила реакции земли, равная по величине силе давления цепочки, складывается из двух частей. Одна уравновешивает силу тяжести неподвижной части цепочки и равна

$$F_1 = \frac{mg^2 t^2}{2l}.$$

Вторая связана с изменением импульса элемента цепочки длиной $v\Delta t$ и массой $\Delta m = (m/l)v\Delta t$ при его соприкосновении с поверхностью и находится из уравнения $F_2\Delta t = \Delta mv$, откуда

$$F_2 = \frac{mv^2}{l} = \frac{mg^2 t^2}{l}.$$

Видно, что $F_2 = 2F_1$, а полная сила давления

$$F = \frac{3mg^2 t^2}{2l}$$

в три раза больше веса неподвижной части цепочки. Перед самым концом падения эта сила достигает максимального значения $3mg$.

Задача 4. Длинная тонкая цепочка перекинута через блок так, что ее правая часть свисает до пола, а левая лежит, свернувшись клубком, на уступе высотой H (рис. 2). Цепочку отпускают, и она приходит в движение. Найдите установившуюся скорость движения цепочки. Блок идеальный, цепочка неупругая.

Рассмотрим сначала правую часть цепочки. Поскольку цепочка неупругая и мягкая, взаимодействие с полом нижнего звена не передается верхним. Значит, натяжение цепочки возле пола равно нулю. Так как цепочка при установившемся режиме движется равномерно, натяжение на некоторой высоте h равно весу нижней части цепочки:

$$T_h = \lambda gh,$$