$a = dv/dt$ следует $a = v(dv/dx)$, или $a = v(dv/d\delta)$. Учитывая все эти соотношения, можем переписать равенство (8) в виде

$$\frac{dv}{d\delta} = \frac{2bg\delta}{v} - \frac{k}{m}. \qquad (9)$$

Вблизи точки $(x_2, 0)$ малы и δ, и v. Положим в окрестности этой точки $v = A\delta$. Тогда получим уравнение

$$A = \frac{2bg}{A} - \frac{k}{m},$$

откуда

$$A = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} + 2bg}. \qquad (10)$$

Как видим, для A получаются два вещественных значения (одно из них положительное, другое отрицательное). Значит, через рассматриваемую точку фазовой плоскости по-прежнему проходят две траектории.

Но теперь на фазовых траекториях надо ставить стрелки, показывающие направление движения (направление убыли энергии). Из четырех «ветвей» сепаратрисы, соединяющихся в седловой точке, две — входящие, две другие — выходящие. Ветвь, выходящая в сторону $x < x_2$, переходит в спираль, скручивающуюся к точке $(x_1, 0)$, другая выходящая ветвь скручивается к точке $(x_3, 0)$. Если же двигаться от седловой точки по входящей ветви, то это будет движение «назад по времени».[1] Энергия шарика по мере такого движения будет увеличиваться, поэтому получится раскручивающаяся спираль. Но так как есть две входящие ветви, должны быть две такие спирали, вложенные одна в другую. Эта сепаратриса построена на рисунке 4.

Прежде всего заметим, что симметрия относительно оси x, которая была на рисунке 3, пропала. Это — следствие необратимости движения, направленности фазовых траекторий. Спирали входящих ветвей сепаратрисы делят фазовую плоскость на две области — на рисунке 4 они окрашены красным и синим. Это те самые области притяжения, найти которые было нашей целью.

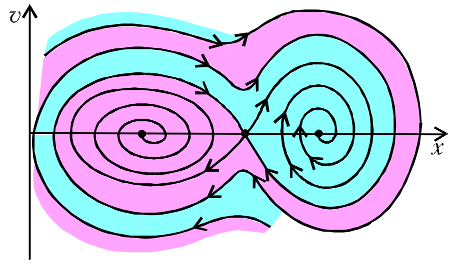

Рис. 4

Действительно, согласно известной нам теореме, траектории не могут пересекаться (нигде, кроме особых точек); в частности, не могут пересекать входящие ветви сепаратрисы — границы синей и красной областей. Учитывая это и глядя на рисунок 4, нетрудно убедиться, что если траектория начинается где-либо в красной области, она придет в точку $(x_1, 0)$, если в синей — в точку $(x_3, 0)$.

Итак, чтобы узнать, в какую ямку попадет шарик, нужно нанести на рисунке 4 точку, изображающую его начальное состояние (положение и скорость), и посмотреть, каков цвет области, где окажется эта точка. Значит, крупье все известно заранее и всякая рулетка — сплошное жульничество? Жульничество, вероятно, бывает. Но утверждать, что все заранее известно, пожалуй, нельзя, и вот почему.

Структура областей притяжения вблизи точек $(x_1, 0)$, $(x_3, 0)$ компактна, но дальше (иначе говоря, при больших энергиях) начинается «чересполосица». Плавно меняя начальные условия, вы обнаруживаете, что результат «прыгает»: шарик оказывается то в левой ямке, то в правой, потом вновь в левой и т.д. Особенно часты прыжки при малом трении, когда полосы областей притяжения достаточно узкие. Если начальные условия известны с некоторой погрешностью (что всегда имеет место в реальном мире) и величина погрешности Δx, Δv сравнима или превышает ширину полосы, никаких достоверных предсказаний сделать нельзя. В настоящей рулетке движение шарика не стеснено желобом, вместо фазовой плоскости приходится гулять по четырехмерному фазовому пространству, где полным-полно седловых точек и сепаратрис. Там дело предсказателя вовсе безнадежно.

То что именно неточность знания начальных условий мешает предсказывать будущее, впервые понял ленинградский физик Н.С.Крылов (1917 — 1947). Позднее к этим проблемам обратился один из основателей квантовой теории Макс Борн (1882 — 1970) и пришел к похожим выводам. Когда трением можно пренебречь, все сводится к разбеганию траекторий вблизи седловой точки, о котором мы уже знаем. Благодаря разбеганию, небольшие изменения начальных условий со временем сильно сказываются на движении, если фазовое пространство достаточно богато седловыми точками. Соответственно, малая погрешность исходных данных лишает определенности долгосрочный прогноз. Однако трение приводит в конце концов к равновесию, и неопределенность остается лишь там, где — как у рулетки — несколько точек равновесия.

Почти все окружающие нас системы подвержены внешнему воздействию, так что равновесие в них не устанавливается. (Световой поток от Солнца мешает Земле прийти в равновесие с межпланетной средой.) Такие системы называют активными. Из-за трения и других необратимых (подобно трению) процессов состояния активной системы постепенно перестают зависеть от начальных условий — они одинаковы для разных условий. Это означает, что в фазовом пространстве точки, отвечающие этим состояниям, окружены областью притяжения. Но теперь траектории, покрывающие область притяжения, не обязательно сходятся к точке, как в случае равновесия. Они могут «притягиваться» к линии, поверхности и т.д. При этом разные притягивающие объекты соответствуют разным типам поведения системы.

---

[1] *Если вы захотите в будущем изучать физику всерьез и столкнетесь с диаграммами Фейнмана, то, может быть, вспомните «движение назад по времени».*