

Статистика первых цифр степеней двойки и передел мира

В. АРНОЛЬД

ПЕРВАЯ цифра числа 2^n бывает единицей примерно в 6 раз чаще, чем девяткой. Так же распределены первые цифры населений и площадей стран мира. Предлагаемое ниже объяснение этого факта приводит к большому количеству математических гипотез, часть из которых доказана, а часть лишь подтверждена компьютерными экспериментами и ожидает строгого доказательства.

Степени двойки

Последовательность первых цифр чисел 2^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) начинается с

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, ...

Доклад, прочитанный замечательным математиком, академиком Владимиром Игоревичем Арнольдом в Университете в Торонто 9 июня 1997 г.

Можно проверить, продолжив вычисление, что единицы составляют примерно 30% членов этой последовательности (а девятка — меньше 5%). Такое же распределение получается для последовательности первых цифр чисел 3^n и вообще для почти любой геометрической прогрессии. (Очевидное исключение составляют лишь прогрессии со знаменателями 10 , $\sqrt{10}$ и вообще $10^{p/q}$, где p и q целые.)

Доказательство сформулированного удивительного утверждения получено Г. Вейлем почти 100 лет назад. Он доказал даже больше. Напомню, что каждое действительное число c можно представить единственным образом в виде суммы целого числа (называемого *целой частью* числа c)

и *дробной доли* $\{c\}$, принадлежащей интервалу $[0, 1)$.

Теорема. Пусть x — иррациональное число. Тогда последовательность $\{nx\}$ дробных долей чисел nx ($n = 0, 1, 2, \dots$) равномерно распределена на интервале $(0, 1)$.

Это значит, что число значений n , $0 \leq n < N$, для которых дробная доля nx принадлежит любому фиксированному отрезку длиной a , поделенное на N , стремится к a при N , стремящемся к бесконечности.

Иными словами, рассмотрим движение точки по окружности, в котором точка в целые моменты времени (n) перескакивает вперед на (несоизмеримый с 2π) угол $2\pi x$ (рис. 1). Теорема утверждает, что время, проведенное движущейся точкой на лю-

