Под каким углом отскочит мяч?

С. ХОРОЗОВ

В ОБЩЕМ случае задача формулируется так. Мяч подлетает к плоскому массивному телу (бетонная стена, горизонтальная асфальтированная площадка и т.п.) под некоторым углом. При этом мяч может вращаться с некоторой угловой скоростью вокруг произвольной оси. Под каким углом он отскочит?

Несколько сузим задачу — рассмотрим случай, когда ось вращения мяча перпендикулярна плоскости его падения на стену. Привычное «угол падения равен углу отражения» придется отбросить, если мы не хотим ограничиваться тривиальным случаем, когда трения нет. Решая задачу, будем предполагать, что составляющая скорости мяча, перпендикулярная стене, в процессе столкновения меняет только знак, но не меняет своей абсолютной величины, и что учет силы тяжести не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на ответ. Второе предположение вполне обоснованно: оценка времени отскока мяча дает несколько сотых долей секунды; это значит, что упругие силы в момент удара приблизительно на два порядка превосходят силу тяжести.

Обсудим сначала частный случай задачи: мяч со скоростью v_0 подлетает к стене под углом 90° к ее поверхности, вращаясь с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, параллельной стене. Пусть $N(t)$ — зависимость от времени силы упругой реакции стены. Время будем отсчитывать от момента, когда мяч пришел в соприкосновение со стеной. Если μ — коэффициент трения скольжения мяча по стене, то в момент времени t составляющая скорости мяча, параллельная стене, определяется формулой

$$v_x(t) = \frac{\mu}{m}\int_0^t N(t)\,dt,$$

где m — масса мяча. Зависимость от времени угловой скорости мяча дается формулой

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu R}{I}\int_0^t N(t)\,dt,$$

где R — радиус мяча, а I — его момент инерции (мы предполагаем, что удар не очень сильный и деформация мяча мала по сравнению с его радиусом). Записанные формулы справедливы только до момента времени τ, в который закончится проскальзывание мяча по поверхности стены, — ведь мы воспользовались законом, справедливым только для силы трения скольжения. Интуитивно ясно, что при малых значениях коэффициента трения μ проскальзывание может продолжаться в течение всего времени отскока (времени, в течение которого мяч находится в контакте со стеной), а при больших значениях μ проскальзывание может прекратиться, когда мяч еще прижат к стене. Это значит, что в момент времени τ, когда проскальзывание прекратилось,

$$v_x(\tau) = R\omega(\tau)$$

и мяч начинает просто катиться по стене. Потерями энергии мяча в процессе качения мы будем пренебрегать. Следовательно, начиная с момента времени τ, угловая скорость и x-составляющая скорости мяча постоянны. Подставив в последнее равенство выражения для v_x и ω, получим

$$\int_0^\tau N(t)\,dt = \frac{\omega_0 R}{\frac{\mu}{m} + \frac{\mu R^2}{I}}.$$

Запишем момент инерции мяча в виде $I = \gamma m R^2$, где $\gamma = 2/5$, если мяч сплошной и однородный, и $\gamma = 2/3$, если мяч — надутая воздухом массивная оболочка (например, футбольный мяч). Тогда

$$\int_0^\tau N(t)\,dt = \frac{\omega_0 R m\gamma}{\mu(\gamma+1)}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, в каких случаях время проскальзывания τ меньше времени T контакта мяча со стеной и в каких случаях — больше. Условие, что проскальзывание прекратилось не позже, чем мяч перестал касаться стены, можно записать в виде

$$\int_0^T N(t)\,dt \ge \int_0^\tau N(t)\,dt,$$

или, поскольку левая часть есть просто изменение перпендикулярной к стене составляющей импульса мяча, которое, в соответствии со сделанным в начале предположением, равно $2mv_0$,

$$2mv_0 \ge \int_0^\tau N(t)\,dt = \frac{\omega_0 R m\gamma}{\mu(\gamma+1)}.$$

Отсюда получаем

$$\mu \ge \frac{\omega_0 R\gamma}{2v_0(\gamma+1)} = \mu_к.$$

Если μ больше $\mu_к$ (критическое значение коэффициента трения), то время проскальзывания мяча по стене меньше времени T контакта мяча со стеной, а если μ не больше $\mu_к$, то проскальзывание будет длиться в течение всего соударения. При $\mu \ge \mu_к$ для составляющей скорости, параллельной стене, и угла отскока α_1 имеем

$$v_x = v_x(\tau) = \frac{\omega_0 R\gamma}{v_0(\gamma+1)},\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\omega_0 R\gamma}{v_0(\gamma+1)},$$

а при $\mu \le \mu_к$

$$v_x = v_x(T) = 2\mu v_0,\ \operatorname{tg}\alpha_1 = 2\mu.$$

В частном случае, когда сплошной мяч (шар) катится по горизонтальной поверхности и сталкивается с вертикальной стеной, $\omega_0 R = v_0$ и $\mu_к = 1/7$, поэтому при $\mu \ge \mu_к$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\gamma}{\gamma+1} = \frac{2}{7},\ \alpha_1 \approx 15{,}9°.$$

Мы получили интересное предсказание — независимо от массы, радиуса, скорости сплошного мяча и коэффициента трения его о поверхность стены угол отскока мяча не превосходит 16°.

Теперь рассмотрим, как и намеревались, более общий случай — мяч подлетает к стене под углом $\alpha_0 \ne 0$, вращаясь с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, перпендикулярной плоскости падения (рис.1). Будем по-прежнему считать

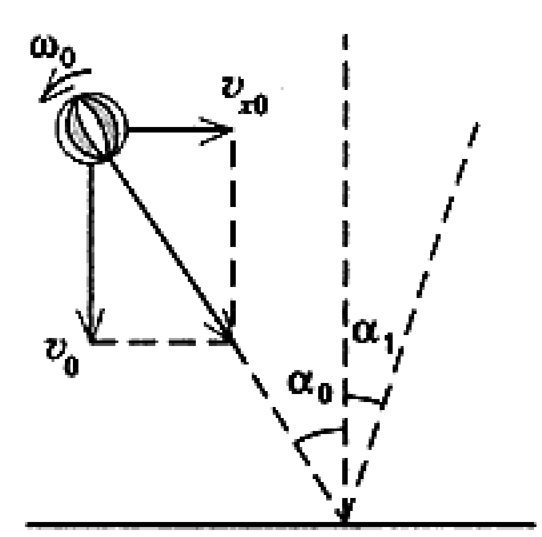

Рис. 1

составляющую скорости, перпендикулярную стене, равной v_0. Тогда составляющая начальной скорости, параллельная стене, равна $v_{x0} = v_0\operatorname{tg}\alpha_0$.

Если мяч вращается против часовой стрелки, то по аналогии с рассмотренным частным случаем можно написать

$$v_x(t) = v_{x0} - \frac{\mu}{m}\int_0^t N(t)\,dt,$$

$$\omega(t) = -\omega_0 + \frac{\mu R}{I}\int_0^t N(t)\,dt.$$

Действуя так же, как и раньше, можно найти критическое значение коэффициента трения:

$$\mu_к = \frac{(v_{x0} + \omega_0 R)\gamma}{2v_0(\gamma+1)},$$

x-составляющую скорости мяча и угловую скорость его вращения после отскока при $\mu \geq \mu_к$:

$$v_x = v_x(\tau) = \frac{v_{x0} - \omega_0 R\gamma}{\gamma+1},$$

$$\omega = \omega(\tau) = \frac{v_{x0} - \omega_0 R\gamma}{R(\gamma+1)}.$$

Мы не будем приводить соответствующие формулы для случая $\mu \leq \mu_к$ — при желании вы сможете вывести их сами.

Пришло время выяснить, насколько полученные нами формулы соответствуют опыту. Для этого было проделано два эксперимента.

Эксперимент 1. Мяч катится по горизонтальному столу со скоростью несколько метров в секунду, ударяется о вертикальную стену и отскакивает от нее (рис.2). Мяч — сплошной шар,

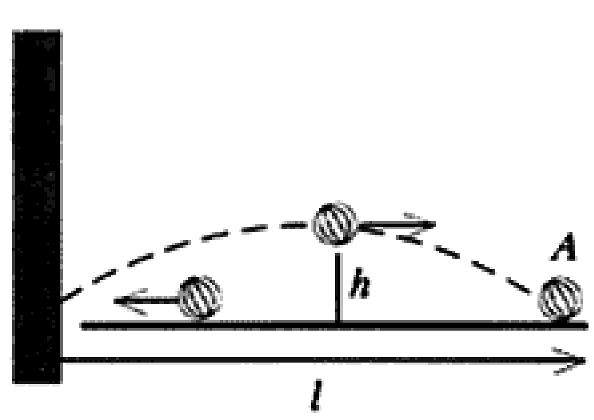

Рис. 2

обладающий очень хорошим отскоком (при падении без начальной скорости на твердое основание с высоты h он подпрыгивает на высоту, большую чем $0{,}8h$, т.е. его скорость меняется меньше чем на 10%). Диаметр мяча 3,5 см, край стола отодвинут от стены на 2,7 см. Отскочив от стены, мяч перелетает через планку, высота которой над столом может варьироваться. Планка располагается приблизительно посередине между стеной и точкой стола A, в которой мяч после отскока падает на стол.

Если расстояние от стены до точки A равно l и при этом мяч перелетел (с небольшим запасом) через планку, установленную на высоте h, то угол отскока α_1 находится из уравнения $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 4h/l$. В разных измерениях l изменялось в пределах 1—1,7 м. Результат: $\alpha_1 = 30°$, возможная ошибка: 1,5—2°.

Сразу бросается в глаза существенное расхождение между расчетом и результатом эксперимента. Если даже принять во внимание, что горизонтальная составляющая скорости за счет неидеально упругого столкновения уменьшается на 10%, то предсказание все равно драматически отличается от результатов эксперимента. Влияние щели между столом и стеной, которая оставлена, чтобы избежать одновременного взаимодействия мяча со стеной и столом, на угол отскока незначительно (меньше одного градуса). Неучтенный в расчете эффект силы тяжести мал, да к тому же он только уменьшил бы угол отскока. В чем же дело? Прежде чем попытаться ответить на этот вопрос, давайте посмотрим, насколько соответствует наш расчет второму эксперименту.

Эксперимент 2. Такой же, как и в эксперименте 1, мяч подвешен на тонкой нити длиной 130 см так, что он едва касается вертикальной стены в некоторой точке O. Мяч отводим от положения равновесия приблизительно на 60 см, устанавливаем над точкой, координаты которой относительно стены и точки O измерены, и отпускаем. Угол падения, следовательно, мы знаем. Для того чтобы измерить угол отражения, достаточно повторить опыт несколько раз и подобрать такое положение вертикального стерженька, чтобы мяч пролетел как раз над ним. Измерив координаты этого стерженька, можно найти угол отражения α_1 после первого отскока. Точно так же измеряется угол α_2 — угол отражения после второго удара о стену. Заметим, что, хотя крутящий момент нити невелик (нить тонкая), следует время от времени давать ей возможность раскрутиться.

Рассчитаем углы первого и второго отскоков мяча от стены. Перед столкновением со стеной мяч не вращался ($\omega_0 = 0$) и мяч сплошной ($\gamma = 2/5$), поэтому после первого столкновения

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{5}{7}\,\mathrm{tg}\,\alpha_0,\quad v_{x1} = \frac{v_{x0}}{\gamma+1},$$

$$\omega_1 = \frac{v_{x0}}{R(\gamma+1)}.$$

Отскочив от стены, мяч вскоре снова вернется к стене, изменив знак x-составляющей скорости, а направление его вращения, конечно, останется прежним. Для угла второго отскока получим

$$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{15}{49}\,\mathrm{tg}\,\alpha_0.$$

Численные значения рассчитанных и измеренных углов (в градусах) приведены в таблице:

α_0	α_1		α_2	
	рассчит.	экспер.	рассчит.	экспер.
58,2	49,0	42	26,2	–31
46	36,5	30	17,6	–20
30	22,4	21	10,0	–9

Знак «—» в последнем столбце означает, что мяч, подлетая к стене слева, отскакивает опять налево, хотя по расчету он должен отскочить направо (рис.3; здесь O — исходное положение мяча, $1_р$ и $2_р$ — рассчитанные направления первого и второго отскоков, $1_э$ и

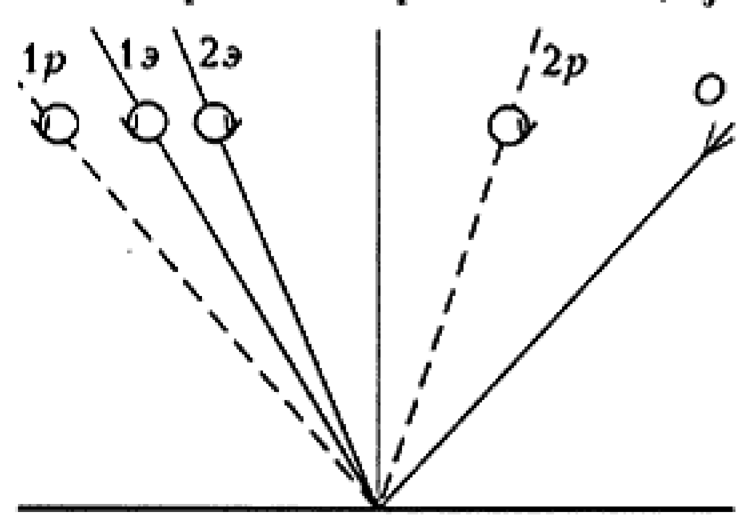

Рис. 3

$2_э$ — экспериментальные направления отскоков, стрелки — направления вращения мяча). Этот эффект нельзя объяснить ни неучтенным в расчете уменьшением нормальной к стене составляющей скорости (около 10%), ни предположением, что коэффициент трения меньше критического. (Нетрудно убедиться, что учет любого из этих эффектов только увеличит расхождение с опытом.) Так в чем же дело? Точного ответа, подкрепленного расчетом, у автора нет. Но все же обсудим вероятную причину расхождения.

Рассмотрим столкновение катящегося по столу мяча с вертикальной стеной (эксперимент 1). Начнем с вопроса: почему мы думаем, что проскальзывание мяча по поверхности стены неизбежно? Ответ: если бы проскальзывания не было, это означало бы, что мяч почти мгновенно получил вертикальную (вдоль поверхности стены) составляющую скорости, равную $\omega_0 R$, а это, в свою очередь, требует бесконечно большой силы трения, что нелепо. Этот ответ правилен, но только при условии, что мяч (шар) в процессе столкновения не имеет тангенциальных (направленных вдоль поверхности) деформаций. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим такой мысленный опыт. Имеется практически недеформируемое очень легкое кольцо. На него надето очень много маленьких (и очень легких) грузиков, соединенных невесомыми пружинками, которые без трения могут перемещаться по кольцу. Масса всей системы равна сумме масс грузиков. Кольцо, вращаясь с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, параллельной стене, подлетает к стене под углом 90° и сталкивается со стеной (все как с мячиком в эксперименте 1). Будут ли проскальзывать грузики по стене? Вовсе не обязательно. Точнее, время проскальзывания может оказаться во много раз меньше времени соударения кольца со стеной. Ведь сила реакции опоры, а следовательно, и сила трения определяются изменением нормальной к стене составляющей импульса очень большого числа грузиков, а остановить надо один или несколько грузиков, которые касаются стены. Это может произойти за очень малое по сравнению со всем временем отскока время. Остальные (не находящиеся в контакте со стеной) грузики продолжают двигаться по инерции, сжимая и растягивая соединяющие их с соседями пружинки. Это значит, что трение скольжения может быстро смениться трением покоя, и, следовательно, потери энергии вращения кольца на нагревание будут незначительными. За счет этой сэкономленной энергии кольцо в целом и приобретает большую, чем в случае недеформируемого и относительно долго проскальзывающего по стене кольца, вертикальную составляющую скорости.

Итак, гипотезу о причине расхождения «стандартного» решения задачи об угле отскока мяча с опытом можно сформулировать так: за счет тангенциальной деформации мяча в процессе удара о стену проскальзывание мяча прекращается существенно раньше, чем дают выведенные нами формулы, и значительная часть энергии вращения переходит в кинетическую энергию, связанную с составляющей скорости мяча вдоль стены. Попробуем проверить нашу гипотезу. Вычислим угол отскока мяча в условиях эксперимента 1, предполагая, что вся энергия вращения переходит в энергию вертикального движения. Из равенства $\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2}$ получаем

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_x}{v_0} = \sqrt{\frac{2}{5}}\,,\ \text{и}\ \alpha_1 \approx 32{,}3^\circ\,.$$

Этот результат немного больше экспериментально измеренного, что вполне естественно, так как кратковременное проскальзывание, видимо, все-таки есть. Во всяком случае, это довольно веский аргумент в пользу рассмотренной гипотезы.

Стоит обратить внимание и на один любопытный результат в эксперименте 2 — мяч после второго отскока от стены вращается не против часовой стрелки, как можно было бы ожидать в «стандартной модели», а по часовой стрелке. Этот факт, по крайней мере на качественном уровне, тоже можно объяснить тангенциальными деформациями мяча в процессе удара о стену. Однако попыток сделать количественный расчет автор не предпринимал.