6. Переходят папа и мама	2 минуты
Папа с фонариком возвращается	1 минута
Переходят бабушка и малыш	10 минут
Мама с фонариком возвращается	2 минуты
Переходят папа и мама	2 минуты
Итого	17 минут

7 класс

1. Поровну. Если периметр прямоугольника равен 1996, то сумма длин его соседних сторон равна 998. Значит, можно перечислить все целочисленные прямоугольники периметра 1996: это прямоугольники 1×997, 2×996, 3×995, … …, 499×499. Аналогично, можно перечислить все целочисленные прямоугольники периметра 1998: 1×998, 2×997, 3×996, … …, 498×501, 499×500.

В обоих случаях длина меньшей стороны может быть равна 1, 2, …, 499.

2. а) 5 автомобилей, очевидно, не хватит, а 6 достаточно: нужно только позаботиться о том, чтобы их выходные были в разные дни.

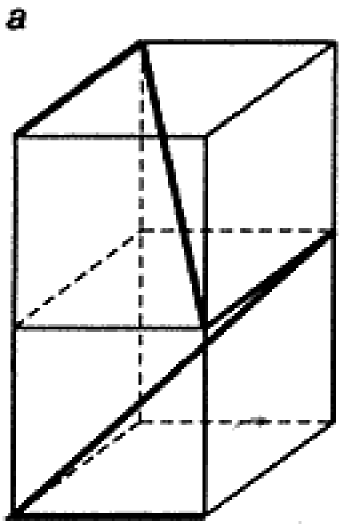
б) 9 автомобилей не хватит: в какой-то день недели два из них должны простаивать, так что на ходу только 7 автомобилей, а нужно 8. А 10 автомобилей достаточно: выходные можно распределить так, что каждый день будут простаивать не больше двух автомобилей.

3. Верхняя сторона состоит из одного большого и трех маленьких отрезков. Если длину маленького отрезка обозначить через x, то длина большего отрезка будет равна $1-3x$. Поскольку нижняя сторона сложена из трех больших отрезков и одного маленького, составляем уравнение

$$3(1-3x)+x=2,$$

откуда $x=\frac{1}{8}$. Значит, длина большего отрезка равна $\frac{5}{8}$, а отношение большего к меньшему равно 5.

а



б

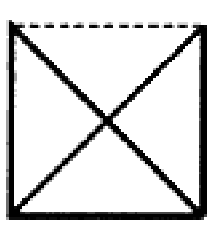


Рис. 4

5. Двоечник неверно ответил на половину всех вопросов. Это составляет $4/5$ тех вопросов, на которые он отвечал наугад. Если x — искомая величина задачи, то на $1-x$ часть вопросов двоечник отвечал наугад, так что можно составить уравнение

$$\frac{4}{5}(1-x)=\frac{1}{2},$$

откуда $x=\frac{3}{8}$.

6. Пространственная траектория рыбки выглядит, как на рисунке 4,*а*, а ответ приведен на рисунке 4,*б*.

Задачи старших классов

8 класс

1. Из условия следует, что на некоторой горизонтали стоит ровно 1 фигура, на некоторой другой — 2 фигуры, …, наконец, на некоторой горизонтали — 8 фигур. Пронумеруем горизонтали в соответствии с количеством стоящих на них фигур. Отметим на первой горизонтали ее единственную фигуру. Поскольку на второй горизонтали две фигуры, хотя бы одну из них можно отметить. Поскольку на третьей горизонтали три фигуры, хотя бы одну из них можно отметить, и так далее.

2. Для безопасного подъема достаточно, чтобы к началу движения по дороге перестал извергаться первый кратер, а спустя 4 часа, к началу движения по тропинке, перестал извергаться второй кратер. Первый кратер извергается 1-й, 19-й, 37-й часы. Второй кратер извергается 1-й, 11-й, 21-й, 31-й, 41-й часы. Поэтому Ваня может выйти в начале 38-го часа.

3. Пусть точки L и K симметричны точке M относительно прямых OX и OY соответственно. Тогда точки K, P и N лежат на одной прямой, причем $NK = NP + PK = NP + PM$. Аналогично, на одной прямой лежат точки N, Q и L, а отрезок $NL = NQ + QL = NQ + QM$. Осталось доказать равенство треугольников KON и LON (по двум сторонам и углу между ними).

4. Такое число существует. Перемножим нечетные числа от 1001 до 1999. Поскольку их 500, а каждое из них меньше 2000, то их произведение меньше

$$2000^{500}=2^{500}\cdot 10^{1500}=32^{100}\cdot 10^{1500}<100^{100}\cdot 10^{1500}=10^{1700}.$$

Припишем к этому числу справа несколько нулей, а затем цифру 1 и еще три нуля так, чтобы общее количество цифр равнялось 1997. Если в полученном числе изменить последние три нуля на четное число, то число останется четным. Если же изменить последние три нуля на нечетное число $\overline{abc}$, то последние четыре цифры образуют число $\overline{1abc}$, на которое делится построенное число.

5. Пусть K — середина AD. Тогда $AK = KD = BE$, поэтому отрезок BK делит AF пополам, причем $BK \parallel ED$ и потому $BK\perp AF$. Отсюда $BF = AB = BC$, так что F — точка пересечения DE и дуги AC (величины 40°) с центром B. Итак, $\angle AFC = (360^\circ - 40^\circ)/2 = 160^\circ$, $\angle DFC = 360^\circ - 160^\circ - 90^\circ = 110^\circ$.

6. Решим сначала более простую задачу. Пусть банкир разрешает класть на весы монеты не более 1 раза. Из какого наибольшего числа монет можно выделить более легкую за k взвешиваний? Если при каком-то взвешивании на чаше весов будет больше одной монеты, то из них выделить фальшивую не удастся (второй раз взвешивать монету нельзя!). Поэтому при каждом взвешивании на чаши кладется по одной монете. Если весы не в равновесии, то фальшивая очевидна. А если в равновесии, то количество подозрительных монет уменьшится на 2. Следовательно, при k взвешиваниях можно выделить фальшивую из $2k+1$ монет. Вернемся к исходной задаче. Разумеется, на чаши весов надо класть поровну монет. Пусть при первом взвешивании на чашах лежат по s монет. Если весы окажутся не в равновесии, то, как было показано, $s\le 2(n-1)+1=2n-1$. Если весы в равновесии, то получаем исходную задачу для монет, не попавших на весы, и $n-1$ взвешивания. Поэтому, если обозначить через $f(n)$ ответ исходной задачи, то $f(n)=f(n-1)++2(2n-1)$. Следовательно,

$$f(n)=2(2n-1)+2(2n-3)+\ldots+2\cdot 3+f(1).$$

Поскольку, как легко проверить, $f(1)=3$, имеем $f(n)=2n^2+1$.

9 класс

1. Поскольку против меньшей стороны треугольника расположен его меньший угол, достаточно доказать, что если a, b и c — длины сторон треугольника и при этом $a=(b+c)/3$, то a — самая маленькая из длин. Можно считать, что $b\le c$. По неравенству треугольника $a+b>c$. По условию $c=3a-b$. Значит, $a+b>3a-b$, т.е. $2b>>2a$, что и требовалось доказать.

2. Занумеруем кусочки в порядке возрастания масс. Налево положим 1-й, 3-й, 5-й и 7-й кусочки, а направо — 2-й, 4-й, 6-й и 8-й. Тогда перевесит правая чаша. А если затем налево добавить 9-й кусочек, то перевесит левая чаша. Следовательно, достаточно разрезать 9-й кусочек.

3. Так как сумма внутренних углов шестиугольника равна 720°, то $\angle A_1+\angle B_1+\angle C_1=360^\circ$. Отсюда следует, что из треугольников AC_1B, BA_1C и CB_1A можно сложить треугольник, прикладывая равные стороны к равным. Этот треугольник равен треугольнику ABC (по трем сторонам). Получили: $2S_{ABC}=S$, где S — площадь исходного шестиугольника.

4. Примем расстояние между соседними машинистами (измеряемое по окружности) за единицу длины. Тогда длина всей окружности будет n, а длина дуги BCA — $2n/3$. Пусть в некоторой точке M — лес. Тогда во всех точках, удаленных от M на кратные единице расстояния, — тоже лес. Достаточно определить расположение леса на интервале длины 1, пос-