

# Ужасы резонанса

А. СТАСЕНКО

«ГЛАС вопиющего в пустыне: приготовьте путь Господу, прямым сделайте в степи стези Богу нашему; всякий дол да наполнится, и всякая гора и холм да понизятся, кривизны выпрямятся, и неровные пути сделаются гладкими» (Исаия 40:3,4). Ну разве не похоже это на призыв сделать грандиозный аэродром для горизонтального приземления летательного аппарата? И все-таки, как бы ни старались строители, абсолютно ровной взлетно-поса-

дочной полосы сделать не удастся. Она всегда получается слегка волнистой. Значит, при быстром движении по ней летательный аппарат может «подпрыгивать». Вот эту ситуацию и рассмотрим.

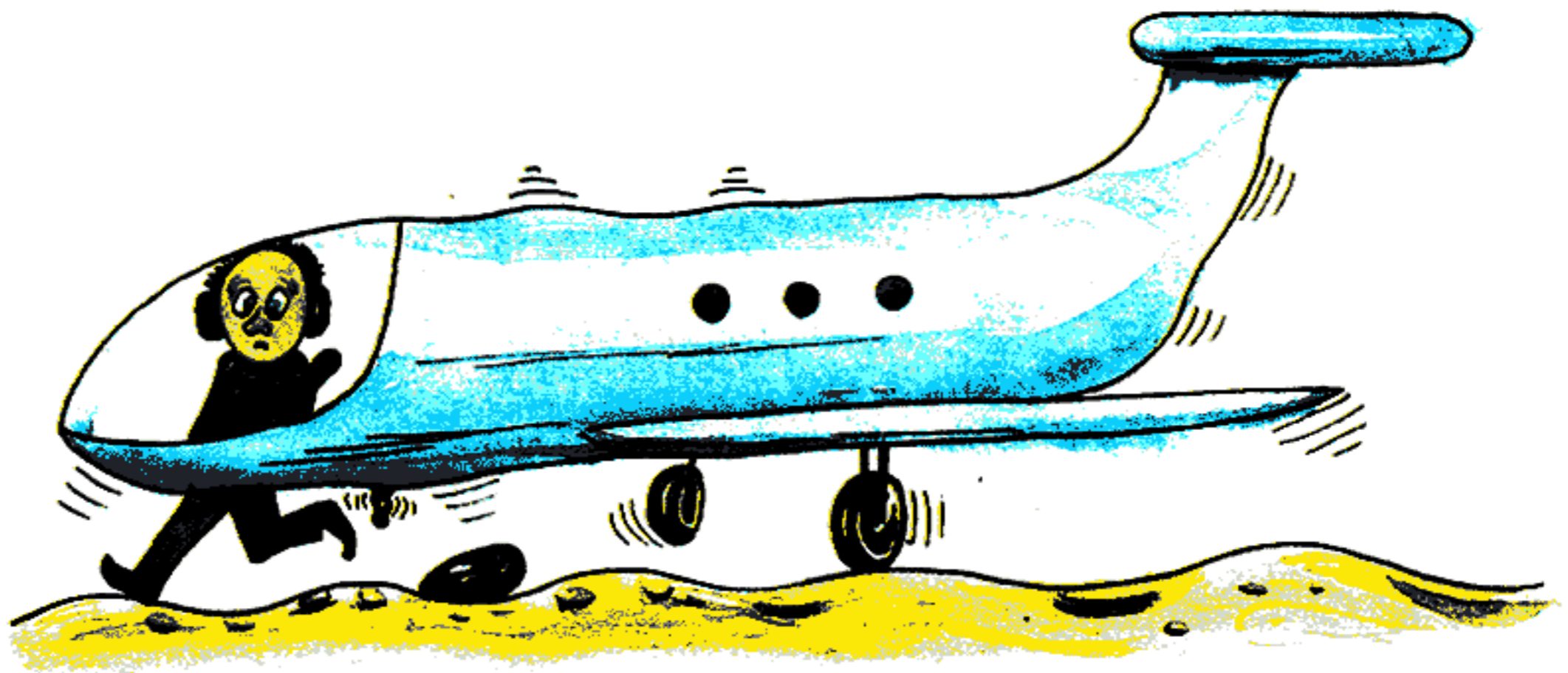
Пусть летательный аппарат массой  $m$  (и, значит, силой тяжести  $mg$ ) движется с постоянной скоростью  $v$  на двух колесах, которые не отрываются от твердого покрытия (рис.1). Пусть каждое колесо снабжено пружиной

жесткостью  $k$ , которая в недеформированном состоянии имеет длину  $H$ . Если в данный момент времени положение центра масс системы над горизонталью  $OX$  определяется ординатой  $y$ , а высота неровности дороги  $h$ , то деформация пружины равна  $\Delta y = y - H - h$ . Тогда вдоль пружины возникает упругая сила

$$F = -k \Delta y = -k(y - H - h).$$

Здесь знак «минус» указывает на то, что направление силы упругости, действующей на летательный аппарат, противоположно знаку деформации пружины  $\Delta y$ : если пружина растянута, сила направлена вниз, если сжата — вверх; поэтому она является *возвращающей* (в положение равновесия) силой.

Запишем уравнение второго закона Ньютона, описывающего движение эки-





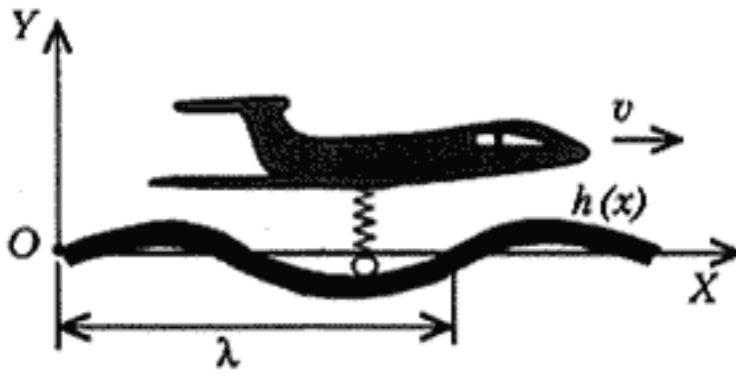


Рис. 1

пажа в вертикальном направлении (в проекциях на это направление):

$$ma_y = -mg + 2F.$$

(Двойка в правой части учитывает, что колеса-то два.) Подставим сюда выражение для упругой силы:

$$ma_y = -mg - 2k(y - H - h).$$

Тут сразу виден частный случай равновесия, когда экипаж стоит себе без движения на дороге (пусть, для простоты, в этой точке  $h = 0$ ). Тогда его ускорение  $a_y = 0$ , и из последнего уравнения получаем статическую деформацию пружины:

$$y_0 - H = -\frac{mg}{2k}.$$

Вполне понятно, почему она отрицательна: пружина ведь сжата.

Далее удобно будет отсчитывать вертикальное перемещение центра масс аппарата относительно найденного положения равновесия  $y_0 = H - mg/(2k)$ . Для этого введем смещение относительно положения равновесия:

$$Y = y - y_0.$$

Тогда уравнение движения упростится (мы заодно разделим обе части на массу  $m$ ) и примет вид

$$a_y = -\frac{2k}{m}(Y - h).$$

Сделаем еще несколько преобразований.

1) Учтем, что ускорение является второй производной от перемещения по времени:

$$a_y = Y''.$$

2) Примем, что неровность посадочной полосы есть гармоническая функция с пространственным (вдоль  $X$ ) периодом  $\lambda$  (длиной волны) и амплитудой  $h_0$ :

$$h = h_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right).$$

3) Вспомним, что при постоянной горизонтальной скорости

$$x = vt.$$

4) Обозначим набор положительных величин так:

$$\frac{2k}{m} = \omega_0^2.$$

Теперь уравнение движения можно записать в виде

$$Y'' + \omega_0^2 Y = \omega_0^2 h_0 \sin\left(2\pi \frac{v}{\lambda} t\right).$$

Если бы в правой части последнего уравнения стоял ноль, то всякий здравомыслящий читатель узнал бы в нем уравнение свободных гармонических колебаний с частотой  $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$ . Но у нас справа не ноль, а гармоническая

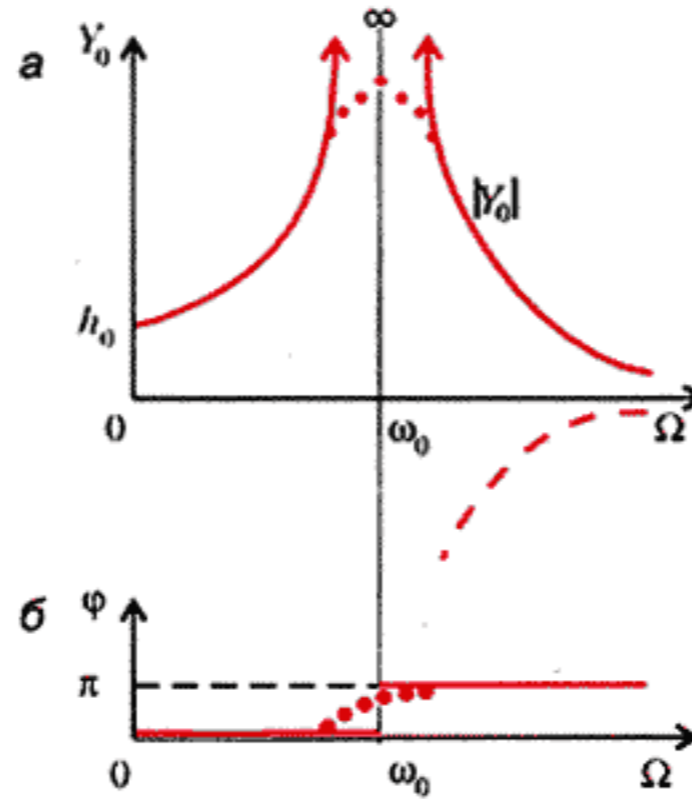


Рис. 2

функция с амплитудой  $\omega_0^2 h_0$  и периодом  $T = \lambda/v$  или частотой  $\Omega = 2\pi/T = 2\pi v/\lambda$ , которые задаются внешними условиями — длиной волны  $\lambda$  и максимальным «размахом» неровностей  $h_0$ . Поэтому возникающие колебания называются *вынужденными*.

Найдем отклик колебательной системы (движущегося аппарата с двумя пружинами) на внешнее возмущение, вызванное неровностями дороги. Будем искать решение в виде тоже гармонических колебаний с частотой *вынуждающей* силы  $\Omega$ :

$$Y = Y_0 \sin \Omega t.$$

После двукратного дифференцирования ( $Y'' = -\Omega^2 Y_0 \sin \Omega t$ ), подстановки в уравнение движения и сокращения на  $\sin \Omega t$  получим уравнение для искомой амплитуды  $Y_0$ :

$$Y_0(-\Omega^2 + \omega_0^2) = \omega_0^2 h_0.$$

На рисунке 2,а качественно изображена зависимость амплитуды колебаний  $Y_0$  от частоты внешнего возбужде-

ния  $\Omega$ . Видно, что если  $\Omega$  стремится к нулю (когда скорость движения мала или аэродром ровен,  $\lambda \rightarrow \infty$ ),  $Y_0$  стремится к  $h_0$ . Это понятно: при малой скорости движения или очень большой длине волны неровностей движущийся аппарат просто отслеживает их профиль. Но если длина волны неровностей аэродрома и скорость движения окажутся такими, что вынужденная частота  $\Omega = 2\pi v/\lambda$  совпадет с собственной частотой  $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$ , произойдет нечто ужасное: амплитуда колебаний станет неограниченно большой ( $Y_0 \rightarrow \infty$ ) и может произойти разрушение системы. Это так называемый случай *резонанса*. Далее, если  $\Omega > \omega_0$ , значение  $Y_0$  становится отрицательным (см. штриховую кривую на рисунке 2,а), но знак «минус» можно спрятать в аргумент синуса:

$$-|Y_0| \sin \Omega t = |Y_0| \sin(\Omega t + \pi).$$

Иными словами можно сказать, что фаза колебаний  $\phi$  изменяется на  $\pi$  в окрестности частоты вынуждающей силы  $\Omega = \omega_0$  (рис. 2,б).

Конечно, инженеры и ученые делают все, чтобы избежать ужасов резонанса (т.е.  $|Y_0| \rightarrow \infty$ ). Прежде всего, можно ввести в колебательную систему так называемое *демпфирование* (если не хватает всегда присутствующего стока энергии — трения) — например, цилиндр с маслом и поршнем, соединенным с пружиной. Тогда в уравнение движения нужно будет ввести соответствующую диссипативную силу (приводящую к диссипации механической энергии, т.е. ее рассеянию, переходу в тепло), и  $|Y_0|$  не будет уходить в бесконечность (см. точечную кривую на рисунке 2). Далее, волнистость аэродрома совсем не обязательно описывается единственной гармонической функцией (с постоянной длиной волны  $\lambda$ ). Наконец, кто же ездит по аэродрому с постоянной скоростью? Любой летательный аппарат стремится поскорее или разогнаться перед взлетом, или затормозиться при посадке.

А вот для наземных экипажей (например, железнодорожного вагона) и  $\lambda$  (длина рельса), и  $v$  (скорость движения) постоянны, и вы можете почувствовать наступление резонанса: вагон начинает галопировать, либо прыгая строго вертикально, либо совершая вращательные («клюющие») движения вокруг поперечной горизонтальной оси (дифферент) или вокруг продольной горизонтальной оси (боковая качка). Но у вагона много колес и пружин, так что его движение описывается гораздо сложнее, чем рассмотренный нами случай.