

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1997 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1591» или «Ф1598». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1591—М1593, М1595 предлагались на весеннем туре Турнира городов, М1599 — на Московской математической олимпиаде, а М1597(б), М1598(б), М1600 — и на Турнире городов, и на Московской олимпиаде. Задачи Ф1599, Ф1600, Ф1602 предлагались на втором (очном) туре Соросовской олимпиады по физике, Ф1603 — на Московской физической олимпиаде.

Задачи М1591 — М1600, Ф1598 — Ф1607

М1591. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BL и AK . Оказалось, что KL — биссектриса треугольника AKC . Найдите угол BAC .

С.Токарев

М1592. Можно ли представить число 1997^{1997} в виде суммы кубов нескольких идущих подряд целых чисел?

А.Егоров

М1593. Имеется набор гирек: а) 1, 2, 4, 8, 16 граммов, б) 1, 2, 4, ..., $2^9 = 512$ граммов. Разрешается класть гирьки на обе чашки весов. Какие грузы можно взвесить наибольшим числом способов?

А.Шаповалов

М1594. Известно, что $f(xf(y)) = f(x)y$, где $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

- а) Докажите, что $f(xy) = f(x)f(y)$.
б) Придумайте три функции, удовлетворяющие условиям задачи.

А.Герко

М1595. В равнобедренном ($AB = BC$) треугольнике $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle OAC = 40^\circ$, $\angle OCA = 30^\circ$. Найдите $\angle BOC$.

Г.Гальперин

М1596. Про непрерывную функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[0; 5]$, известно, что $\int_0^5 f(x) dx = 0$.

Докажите, что на этом отрезке найдутся числа a, b такие, что $b - a = 3$ или $b - a = 2$ и $\int_a^b f(x) dx = 0$.

В.Произволов

М1597. Пусть a, b, c — положительные числа и $abc = 1$. Докажите неравенства

а) $\frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} \geq 1$;

б) $\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1$.

Г.Гальперин

М1598. Пусть $K_n(x) = F(x)G(x)$, где $K_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$, $n > 1$, $F(x)$ и $G(x)$ — многочлены с неотрицательными коэффициентами.

а) Докажите, что все коэффициенты этих многочленов — нули и единицы.

б) Докажите, что один из многочленов $F(x)$, $G(x)$ представим в виде $(1 + x + \dots + x^k)T(x)$, где $k > 0$, а коэффициенты $T(x)$ — нули и единицы.

М.Вялый, В.Сендеров

М1599. Из последовательности 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, ... первых цифр степеней 2 выбираются несколько цифр подряд и записываются в обратном порядке. Докажите, что эти цифры встретятся, начиная с некоторого места, подряд в последовательности первых цифр степеней 5.

А.Канель

М1600. На плоскости задан круг с диаметром 1 и несколько полос, сумма ширин которых равна 100. Докажите, что полосы можно параллельно передвинуть так, чтобы они покрыли круг.

М.Смуров

Ф1598. Вдали от всех тел, в глубинах космоса движется летающая тарелка. Скорость ее в некоторый момент равна v_0 . Пилот хочет произвести маневр, в результате которого вектор скорости повернется на 90° и составит по величине v_0 , как и до начала маневра. Ускорение