

# Варианты вступительных экзаменов 1996 года

## Московский физико-технический институт

### МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен  
Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{4+3\cos x - \cos 2x} = \sqrt{6} \sin x.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}(4^{-x} - 1) < \log_{|x+2|}(2^{-x} + 1) + \log_{|x+2|}(2^{-x-1} + 1).$$

3. Равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ) вписан в окружность.

Прямая  $CD$ , перпендикулярная  $AB$ , пересекает окружность в точке  $P$ . Касательная к окружности, проходящая через точку  $P$ , пересекает прямую  $AB$  в точке  $Q$ . Найдите длины отрезков  $PA$  и  $PQ$ , если  $AC = 5$ ,  $\angle ABC =$

$$= 2 \arccos \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

4. График функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = -2x^3 - 8ax^2 - 4a^2x + 5$ ,  $a < 0$ , и прямая  $l$ , заданная уравнением  $y = 4a^2x + 5$ , имеют ровно две общие точки.

1) Найдите  $a$ , если площадь фигуры, ограниченной графиком функции

$$y = f(x) \text{ и прямой } l, \text{ равна } \frac{27}{2}.$$

2) Рассматриваются прямые, каждая из которых касается графика функции  $y = f(x)$  в точке с положительной абсциссой. Среди этих прямых выбрана та, которая пересекает ось  $Oy$  в точке с наименьшей ординатой. Найдите эту ординату.

5. В основании призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит прямоугольник  $ABCD$ . Острые углы  $D_1 D A$  и  $D_1 D C$  равны между собой, угол между ребром  $D_1 D$  и плоскостью основания призмы равен  $\arccos \frac{1}{\sqrt{13}}$ , а  $CD = 5\sqrt{6}$ . Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найдите длину  $BC$ , угол между плоскостями  $D_1 D C$  и  $ABC$ , а также расстояние от точки  $D$  до центра сферы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_{49}(x-1)^2 + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{7}} \left( \frac{2x+9}{7x+9} \right) = 0.$$

2. Найдите все значения  $a$ , при которых неравенство

$$\frac{8x^2 - 20x + 16}{4x^2 - 10x + 7} \leq a$$

является верным при всех значениях  $x$ .

3. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) биссектрисы  $AM$  и  $BK$  пересекаются в точке  $O$ . Площади треугольников  $BOM$  и  $COM$  соответственно равны 25 и 30. Найдите площадь треугольника  $ABC$  и проекцию отрезка  $OM$  на прямую  $BC$ .

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left| \cos \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) \right| = -\sqrt{2} \cos y, \\ \cos 2y + 2 \sin 2x + \frac{3}{4} = 2 \sin^3 2x. \end{cases}$$

5. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , ребро которого равно 6, точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $AB$  и  $B_1 C_1$  соответственно, а точка  $K$  расположена на ребре  $DC$  так, что  $DK = 2KC$ . Найдите:

- 1) расстояние от точки  $N$  до прямой  $AK$ ;
- 2) расстояние между прямыми  $MN$  и  $AK$ ;
- 3) расстояние от точки  $A_1$  до плоскости треугольника  $MNK$ .

Вариант 3

1. Окружность с центром на стороне  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) касается сторон  $AB$  и  $BC$ . Найдите радиус окружности, если площадь треугольника  $ABC$  равна 25, а отношение высоты  $BD$  к стороне  $AC$  равно  $\frac{3}{8}$ .

2. Выразите  $\log_{600} 900$  через  $a$  и  $b$ , где  $a = \log_5 2$  и  $b = \log_2 3$ .

3. Дана функция

$$f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$$

Найдите:

- 1) корни уравнения  $f(x) = \frac{10}{7}$ ;
  - 2) наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x)$ .
4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0. \end{cases}$$

5. В правильной треугольной пирамиде  $ABCD$  сторона основания  $ABC$

равна  $a$ . Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник  $ACD$ , а вершиной конуса является точка  $O$ , лежащая на высоте  $BE$  треугольника  $ABC$  так, что  $BE : OB = 3$ . Найдите радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой  $B$ .

### ФИЗИКА

Письменный экзамен  
Вариант 1

1. По горизонтальной поверхности стола скользит брусок массой  $m$  и сталкивается неупруго с неподвижным бруском массой  $2m$ , имея перед ударом скорость  $v = 2$  м/с. Какое расстояние пройдут слипшиеся бруски до остановки? Коэффициент трения скольжения между брусками и столом  $\mu = 1/18$ .

2. На стене в комнате висит плоское зеркало в форме ромба с диагоналями 16 см и 12 см. Лампочка висит на расстояниях  $l_1 = 2$  м от стены с зеркалом и  $l_2 = 1$  м от противоположной стены. Нить накала лампочки можно считать точечным источником света.

1) На каком расстоянии от противоположной стены находится изображение нити накала лампочки в зеркале?  
2) Найдите форму и размеры «зайчика», полученного от зеркала на противоположной стене.

3. Тонкая трубка, запаянная с одного конца, заполнена водой и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси. Открытое

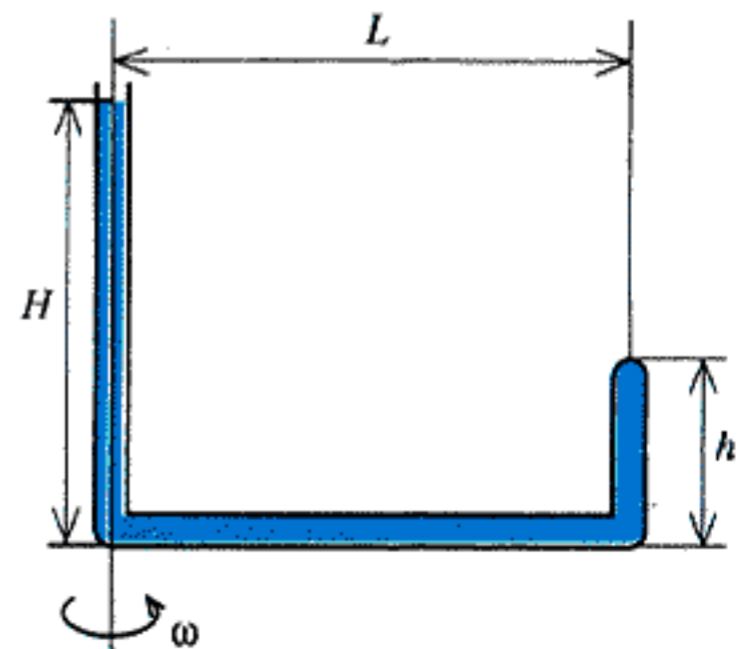


Рис. 1