

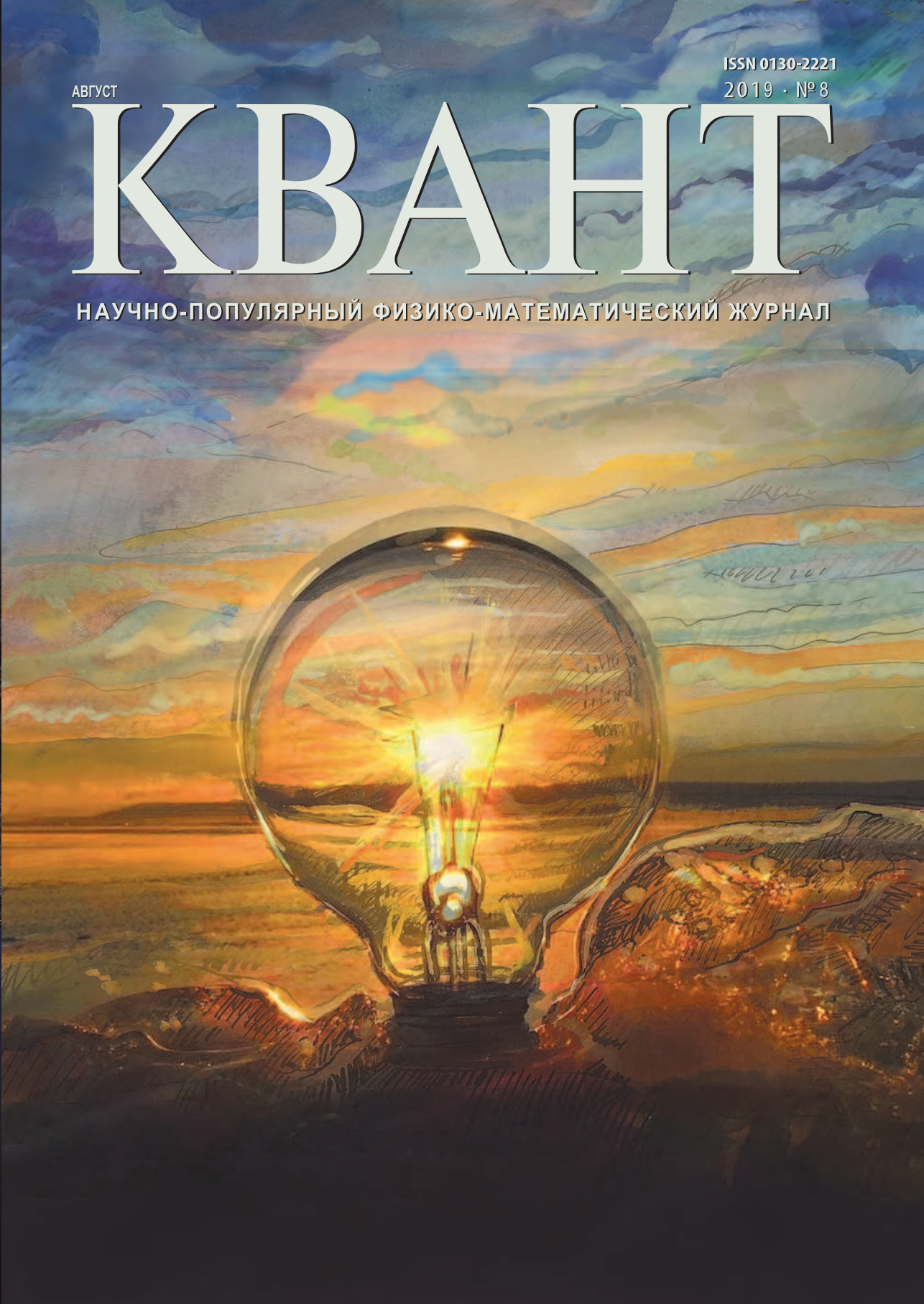
ISSN 0130-2221

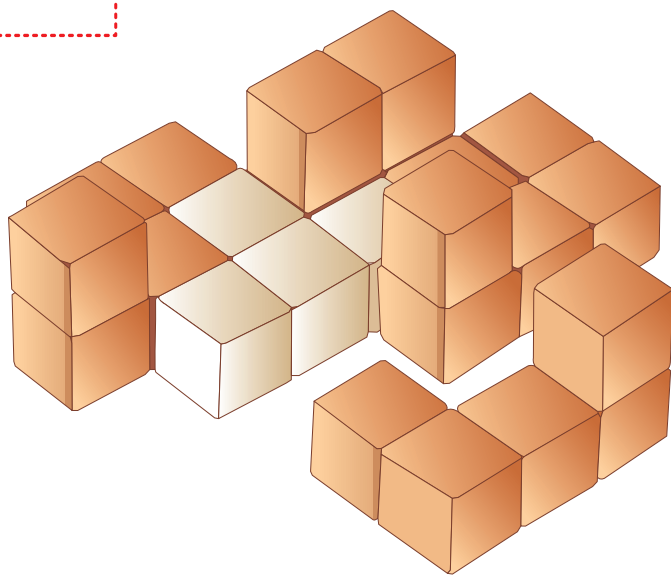
2019 · № 8

АВГУСТ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





# ИГРА В

# ПЯТКУ

В августе этого года в японском городе Канадзава состоялся очередной, уже 39 по счету, съезд любителей головоломок (International Puzzle Party). Авторы со всего мира представили много новых замечательных головоломочных идей, с полным списком которых можно познакомиться на сайте [johnrausch.com/designcompetition/2019](http://johnrausch.com/designcompetition/2019).

Общая тенденция состоит в усложнении устройства головоломки, поэтому большинство новинок вряд ли можно изготовить в домашних условиях (если, конечно, у вас нет 3D-принтера, но и он не всегда спасает). Тем не менее, были и сравнительно просто устроенные примечательные головоломки. Одну из них придумал Джордж Зихерман (George Sicherman; о его головоломке «Спрятать золото» рассказывалось в «Кванте» №11 за 2018 г.).

В новой головоломке всего пять деталей – одна светлая, состоящая из четырех единичных кубиков, и четыре темные, составленные из пяти кубиков каждая. Светлую деталь надо положить на стол (обратите внимание, что это можно сделать разными способами) и полностью закрыть ее темными, чтобы ни одна грань не была видна.

Желаем успеха!

*Е.Епифанов*

## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,  
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников**  
(заместитель главного редактора),  
**С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан**  
(заместитель главного редактора)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Удивление, понимание, восхищение. **М.Каганов**  
10 Прозрачное и непрозрачное. **Л.Ашкинази**  
15 Одна задача о раскраске. **А.Райгородский**

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 23 Задачи М2570–М2573, Ф2577–Ф2580  
24 Решения задач М2558–М2561, Ф2565–Ф2568  
29 Составные лесенки. **К.Кохась**

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Упаковки и покрытия

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 35 Задачи  
36 Кювета с водой в поезде. **С.Дворянинов**  
37 XXV Турнир математических боев имени  
А.П.Савина

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 40 Треугольник и классические неравенства.  
**В.Дроздов**

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 42 Период ангармонических колебаний.  
**Ф.Григорьев**

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 44 Бесконечность – не предел. **Ф.Носков**

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 48 Олимпиада «Покори Воробьевы горы!». Физика  
52 Ответы, указания, решения

Памяти М.И.Каганова (2)

Нам пишут (38)

Вниманию наших читателей (64)

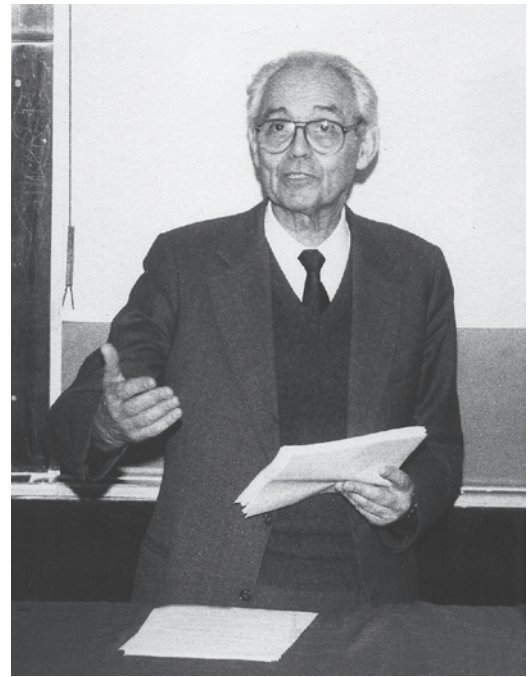
## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Прозрачное и непрозрачное»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

Ушел из жизни выдающийся физик-теоретик и популяризатор науки Моисей Исаакович Каганов – один из ярких представителей школы Ландау, специалист в области квантовой теории твердого тела, доктор физико-математических наук, профессор МГУ имени М.В.Ломоносова и почетный доктор Вроцлавского политехнического института, участник Великой Отечественной войны.

Окончив в 1949 году физико-математический факультет Харьковского государственного университета, М.И.Каганов с 1949 по 1970 год работал в Украинском физико-техническом институте, а с 1970 по 1994 год – в Институте физических проблем имени П.Л.Капицы. Одновременно преподавал – сначала в Харьковском университете, потом в Московском. После выхода на пенсию с 1994 года жил в США.

Моисей Исаакович – автор более 200 научных работ и ряда книг по физике, один из самых постоянных и любимых авторов журнала «Квант». По замечательным научным монографиям Моисея Исааковича воспитывалось не одно поколение молодых физиков, а его удивительные научно-популярные статьи и книги помогли многим школьникам выбрать свой жизненный путь.



Моисей Исаакович Каганов  
(4 августа 1921 – 1 сентября 2019)

Предлагаем вниманию читателей статью М.И.Каганова «Удивление, понимание, восхищение», впервые опубликованную в нашем журнале во втором номере 2004 года.

## Удивление, понимание, восхищение

**М.КАГАНОВ**

*Стройный мост из железа ажурного.  
Застекленный осколками неба лазурного.  
Попробуй вынь его  
Из неба синего  
– Станет голо и пусто.  
Это и есть искусство.*

Д.Самойлов

**М**ОЖНО ВОСХИТИТЬСЯ МОСТОМ ТАК, как это сделал поэт. Инженер восхищался бы иначе. Он рассказал бы, и не

только своим коллегам по профессии, чем восхищающий его мост отличается от других мостов. Скорее всего, не удержался бы и сообщил некоторые конкретные данные.

Много раз в сопровождении профессионалов-экскурсоводов я ходил по музеям, осматривал архитектурные достопримечательности. Одни экскурсоводы многословны – они сообщают множество интересных данных и фактов; другие лишь изредка

указывают на что-то, что нельзя пропустить, и иногда бросают отрывочные фразы. Как правило, я получал большее впечатление от увиденного, когда экскурсовод был немногословен.

Сравнительно недавно ушел в историю XX век. Конечно, он принес много бед и несчастий. Но останется в памяти он не только этим. За ушедший век необычайно расширились границы познанного, что вызывает у меня глубокое восхищение. Именно восхищением я и хочу поделиться с читателями. (Об ужасах и несчастях, поверьте, я тоже не забываю.)

Если я покажусь многословным, то простите: искренне хотел избежать ненужных подробностей, но очень трудно оценить, где кончается «нужное» и начинается «ненужное». Я не чувствую себя опытным экскурсоводом, скорее – инженером, влюбленным в конструкцию.

\* \* \*

Из описания путешествия английского мореплавателя Джеймса Кука известно, что жители Новой Зеландии не удивились, когда к их берегам подошли никогда не виданные ими корабли. Не имея привычки объяснять, они все воспринимали как должное.

К концу XIX века казалось, что вот-вот будет понято, как устроен окружающий нас мир. Механика Ньютона и электродинамика Фарадея–Максвелла объяснили почти все. Термодинамика установила строгие границы возможного. Наука перестала быть забавой, удовлетворением любопытства кучки чудаков, не интересующихся жизненно важными для людей вопросами, а занятых непонятно чем. Выяснилось, что полученные учеными результаты могут помочь использовать силы природы и заставить их работать на человека. Стало очевидно, что созданные машины будут совершенствоваться, изменяя жизнь людей.

Почти не выходя за пределы реальных знаний, Жюль Верн – один из создателей столь популярного ныне жанра научной фантастики – сочинял увлекательные сказки, в которых ярко описывались замеча-

тельные достижения инженерной мысли. Конечно, не все романы Жюль Верна я помню – в детстве они «проглатывались» мною один за другим, но позже я их не перечитывал. Мне кажется, вся фантазия Жюль Верна трагилась на инженерные свершения. Не предполагал он, что в том будущем, в котором действуют его герои, наши знания претерпят весьма существенные изменения.

Большинство профессионалов-ученых на границе XIX и XX веков считали, что физическое описание мироустройства близко к завершению, осталось уточнить значения ряда физических величин и ... все. Мало кого заботило, например, что в рамках существующей науки почему-то не удается описать излучение абсолютно черного тела. Далекие от науки люди не знали, как впрочем не знают и сейчас, что такое абсолютно черное тело. Но, думаю, и многим физикам тоже были неведомы загадки этого объекта.

Что же такое абсолютно черное тело? Формально, абсолютно черным телом принято называть тело, которое поглощает световые лучи, но не отражает их. Может ли существовать такое тело? Строго говоря, нет: всякое тело какую-то часть света поглощает, какую-то отражает. Но можно искусственно создать почти абсолютно черное тело (лучше было бы сказать – почти абсолютно черную поверхность). Для этого в массивном твердом теле делают полость и связывают ее с внешним миром очень маленьким отверстием. Чем отверстие меньше, тем точнее и лучше модель приближается к своему «оригиналу». Действительно, вероятность того, что лучи света, попав внутрь полости через отверстие, выйдут наружу, очень мала – лучи поглощаются отверстием, но не отражаются.

Тело, в котором есть полость внутри, имеет определенную температуру. Эту температуру можно изменять и исследовать, как с изменением температуры изменяется характер излучения из отверстия, которое моделирует абсолютно черное тело. Все было бы просто, если бы теоретическая физика умела предсказать результат, а

экспериментаторы подтвердили бы его. Кое-какие предсказания тогда (на границе веков) делались, но порой приводили к неприемлемым последствиям. Например, предсказывалось, что при любой температуре абсолютно черное тело должно излучать бесконечное количество энергии. Это предсказание получило даже специальное название – *ультрафиолетовая катастрофа*. Дело в том, что согласно теории тех лет излученная энергия растет с ростом частоты света.

Понимаю, у многих даже сейчас может возникнуть недоумение: «Страшное дело! Не могут объяснить, как излучает энергию какая-то дырочка. Сколько пользы уже принесла наука, какие возможности впереди, а нас пугают ультрафиолетовой катастрофой, будто она может кому-то навредить». Думаю, так или похоже рассуждали многие, и отнюдь не только далекие от физики люди, на рубеже XX века. А мне не дают покоя строки Анны Ахматовой из «Поэмы без героя»:

Приближался не календарный –  
Настоящий Двадцатый Век.

Ведь именно в 1900 году Макс Планк осознал, что согласовать наблюдения излучения абсолютно черного тела с теорией можно, только если предположить, что атомы твердого тела не подчиняются законам ньютоновской механики, той самой механики, которая столько объяснила, которая принесла и несомненно принесет бесконечно много пользы.

По Планку (в откровенном противоречии с классической механикой), энергия колеблющегося атома может принимать только целочисленные значения – кванты энергии. Событие, находящееся, казалось бы, на периферии науки своего времени, примерно через четверть века научная общественность назовет революционным переворотом. Оно ознаменовало рождение новой, *квантовой физики*.

Многие активные молодые физики того времени с энтузиазмом посвятили свой талант новой науке. Что двигало ими? Не будем гадать. Приведу цитату из статьи Альберта Эйнштейна «Мотивы научного

исследования», посвященной Макс Планку: «Храм науки – строение многосложное. Различны пребывающие в нем люди и приведшие их туда духовные силы. Некоторые занимаются наукой с гордым чувством своего интеллектуального превосходства; для них наука является тем подходящим спортом, который должен им дать полноту жизни и удовлетворение честолюбия. Можно найти в храме и других: плоды своей мысли они приносят здесь в жертву только в утилитарных целях. Если бы посланный Богом ангел пришел в храм и изгнал из него тех, кто принадлежит к этим двум категориям, то храм катастрофически опустел бы. Все-таки кое-кто из людей как прошлого, так и нашего времени в нем бы остался. К числу таких людей принадлежит наш Планк, и поэтому мы его любим».

Продолжу цитирование. С трудом заставляю себя делать купюры. Очень советую прочесть статью целиком. «...Но обратим вновь свой взгляд на тех, кто удостоился милости ангела... Что привело их в храм?» Эйнштейн считает, что важную роль для них играет «желание уйти от будничной жизни с ее мучительной жесткостью и безутешной пустотой, уйти от уз вечно меняющихся собственных прихотей». Не будем спорить с гением: несомненно, он делится своими сокровенными мыслями и чувствами. «Но к этой негативной причине, – пишет Эйнштейн через несколько строк, – добавляется и позитивная. Человек стремится каким-то адекватным способом создать в себе простую и ясную картину мира...»

Созданием картины мира заняты не только ученые, но и художники, поэты, музыканты, философы. «Какое место занимает картина мира физиков-теоретиков среди всех возможных таких картин? Благодаря использованию языка математики эта картина удовлетворяет наиболее высоким требованиям в отношении строгости и точности выражения взаимозависимостей. Но зато физик вынужден сильнее ограничивать свой предмет, довольствуясь изображением наиболее простых...явлений...» Ограничение заставляет до-

бавить сомнение: «Высшая аккуратность, ясность и уверенность – за счет полноты... Заслуживает ли результат столь скромного занятия гордого названия “картины мира“?»

Ответ Эйнштейна вполне определенный: «Я думаю – да, ибо общие положения, лежащие в основе мысленных построений теоретической физики, претендуют быть действительными для всех происходящих в природе событий. Путем чисто логической дедукции из них можно было бы вывести картину, т.е. теорию всех явлений природы, включая жизнь». За этим следует оговорка: «если этот процесс дедукции не выходил бы далеко за пределы творческой возможности человеческого мышления».

Важное место в статье Эйнштейна занимает вопрос о роли интуиции при создании адекватной картины мира. Приведу только одну фразу, которую считаю очень важной для понимания природы познания: «К этим законам ведет не логический путь, а только основанная на проникновении в суть опыта интуиция».

Как показывает развитие науки, пределы возможности человеческого мышления фантастически расширяются. И все же мы не можем ответить однозначно, будет или нет построена теория всех явлений природы, включая жизнь. Мне кажется, что процесс познания будет длиться столько, сколько будет существовать человеческая цивилизация. К сожалению, нетрудно представить себе трагический исход так нами почитаемого прогресса.

Высказанное высоким стилем изложим значительно более прозаически.

Из огромного количества фактов, которые к концу XIX века не были поняты, Макс Планк выбрал один – излучение абсолютно черного тела. Он попытался найти объяснение в рамках классической физики, не сумел и пришел к выводу: не всегда возможно пользоваться законами классической физики. Физика Ньютона и Фарадея–Максвелла получила эпитет «классическая» после того, как возникла и развилась новая, квантовая физика. На рубеже XIX и XX веков это была вся

физика, которая, повторюсь, себя прекрасно оправдала.

Несомненно, все началось с удивления: почему не удастся в классических терминах описать излучение черного тела? Я же призываю к *восхищению* – сколь своевременно была высказана Планком «крамольная» идея.

Эрнест Резерфорд выяснил, что почти вся масса атома сосредоточена в его ядре, возникло представление об атоме как о планетарной системе: ядро – солнце, электроны – планеты. Нильс Бор понял, что, не привлекая идею Планка о квантах, объяснить устойчивость атомов невозможно. Созданная Бором теория атома водородного эклектична: к хорошо известным законам движения механики Ньютона произвольно были добавлены квантовые условия, и формула водородного спектра правильно описала экспериментальные факты.

Победителей не судят, но какой ценой получен результат! По сути, разрушена строгая логика всей физики. Естественно, начались поиски выхода из создавшегося положения.

Сейчас, когда курс квантовой механики входит в стандартный набор предметов, изучаемых большинством молодых людей, получающих высшее техническое и естественно-научное образование, очень трудно себе представить, какого не только интеллектуального, но и эмоционального напряжения стоило создание основ новой физики.

В одной из книг Даниила Данина описан такой эпизод. Вернер Гейзенберг, тогда молодой ученый, обсуждал с Нильсом Бором логические трудности новой физики. Обсуждение продолжалось долго. Обоим казалось, что выхода нет. Бор пришел к выводу, что обсуждение надо на время прекратить, и, не предупредив своего молодого коллегу, уехал, устроив себе каникулы. Когда Гейзенберг узнал, что учитель его покинул, он расплакался (!). Итог эпизода замечателен: Бор вернулся после каникул с *принципом дополнительности*, а Гейзенберг в отсутствие Бора вывел *соотношение неопределенностей*.

Эти результаты абсолютно необходимы для логики квантовой механики.

Квантовую механику, несомненно, надо считать важной составляющей того, что Эйнштейн назвал простой и ясной картиной мира. Конечно, нельзя считать, что с ее помощью объяснены все явления природы. Можно свое внимание сосредоточивать на том, что не объяснено. Так поступают профессионалы. Но не только. Много людей, далеких от физики, ощущают окружающий мир полным загадок и тайн. И они правы. Действительно, почти на каждом шагу можно столкнуться с явлением или событием, объяснение которого либо нам неизвестно, либо неизвестно вообще – даже тем, кто по своей профессии мог бы знать объяснение, если бы оно было. Те, кто смотрит на науку о мире как бы со стороны, из подобных наблюдений нередко делают неверный вывод о принципиальном бессилии науки.

Другая крайность – преувеличение возможностей науки. Есть люди, которые считают, что наука может все. Естественно, такой взгляд на науку тоже неправилен. Сошлюсь на высказывание одного из творцов новой физики Эрвина Шредингера: «Наука ни слова не может сказать нам о том, почему нас радует музыка, почему и как старая песня может вызвать у нас слезы. Мы полагаем, что наука может в принципе описать... Но о чувстве радости и сожаления, которые сопровождают процесс [познания], науке ничего неизвестно, поэтому она о них умалчивает». В этой цитате важны слова: «наука может в принципе описать». Наука всегда *описывает*. Правильней только было бы уточнить: «естественные науки могут в принципе описать».

Но не будем останавливаться на крайних точках зрения.

Три слова, поставленные в заглавие статьи, можно располагать по-разному. От этого может несколько измениться смысл. Пусть, например, это будет: *удивление – восхищение – понимание*. Удивившись и восхитившись увиденным, ученый постигает природу явления и, по словам Эйнштейна, превращает чудо в тривиальность.

Принятый же в заглавии порядок слов: *удивление – понимание – восхищение* означает нечто другое. А именно:

- *Удивление* невозможностью объяснить наблюдаемое явление заставило ученого выйти за пределы принятой теории.

- Последовало создание новой теории. Возникло *понимание*, охватившее множество фактов и явлений.

- Новая картина мира вызывает истинное *восхищение*. Восхищение распространяется и на ученых, которые буквально ежедневно расширяют область познанного.

Поделиться восхищением очень трудно. Ни восклицательные знаки, ни охи, ни ахи не помогут. Расскажу, что восхищает *меня*.

Недавно я написал статью под названием «Из чего все состоит» (она опубликована в трех номерах журнала «Наука и жизнь»: № 10, 11, 12 за 2003 год). В статье рассказано, как из частиц трех типов – электронов, протонов, нейтронов – построены атомы, молекулы, твердые тела, т.е. все, что составляет окружающий нас мир, включая и нас самих. Статья заканчивается следующими словами: «Восхищение и объяснение плохо уживаются. Объяснив, как бы ликвидируешь восхищение. Очень хочется, чтобы, поняв в общих чертах принципы устройства всего на свете, вы не потеряли способность восхищаться тем, что для создания всего этого баснословного разнообразия достаточно лишь трех типов частиц – электронов, протонов и нейтронов. “Подумаешь, – скажет скептик, – с помощью двух значков (нуля и единицы) можно закодировать любой текст: скучную инструкцию и прекрасную поэму“. Правильно! Но текст, а также любое устройство кто-то создал. Когда кто-то создает уникальную машину или гениальную поэму, он, несомненно, заслуживает восхищения. Но восхищение вызывает и природа, естественным путем создавшая бесконечное многообразие из электронов, протонов и нейтронов».

Добавим к этому, что *естественный путь* удивительно однообразен. Нет сомнений, что «правила сборки», которыми пользуется природа на Земле и в удаленных, но доступных для наблюдения частях



Вселенной, одни и те же. «Доступная для наблюдения часть Вселенной» – звучит очень буднично. Но она занимает сферу, у которой радиус порядка  $10^{10}$  световых лет, т.е. свет от границы доступной для наблюдения области Вселенной движется к наблюдателю  $10^{10}$  лет. И доступная для наблюдения часть Вселенной наполнена многими миллиардами галактик – много-миллиардными скоплениями звезд.

Хотелось бы эту непредставимо огромную сферу назвать *terra cognita* – познанной землей, в отличие от *terra incognita* – непознанной земли. Конечно, в этом есть заведомое преувеличение: мир полн тайн. Но необходимо подчеркнуть следующие два обстоятельства.

1) Своеобразную расчлененность мира. Мир устроен так, что можно исследовать и постигать его по частям. Не будь этого, мир был бы совершенно непознаваем.

2) Основываясь на объективно существующей расчлененности мира, естественные науки выработали у ученых своеобразное профессиональное чутье. Специалист знает, что принадлежит его «ведомству», а что нет.

История науки знает знаменательные «агрессии». Сначала химики, а потом физики занялись биологией. Их вмешательство принесло грандиозные плоды: помогло далеко продвинуть понимание проблем деятельности и развития живых организмов – вплоть до атомно-молекулярного уровня. Менее известно, что только вмешательство в космологию специалистов по микрофизике (по физике элементарных частиц) позволило поставить вопрос о развитии Вселенной и получить обнадеживающие ответы, дающие надежду выяснить, как развивалась Вселенная от момента Большого взрыва до наших дней.

Попытки определить наиболее впечатляющие достижения науки обычно носят конкретный характер – радио, электричество, атомная энергия... Все это, действительно, достойно восхищения. Но меня более всего восхищает в науке ее *методология*. Каждая из наук разработала жесткие правила обращения с объектом исследования. Правила эти очень разнообраз-

ны, но у них есть общие черты. Одно из основных требований – объективность. Когда речь идет об эксперименте или о выводе формулы, наука неукоснительно требует повторяемости, возможности независимой проверки. Именно научная методология вызывает особое уважение. Даже лженаука, выдавая себя за науку, пользуется научной терминологией, пытается подчеркнуть свою объективность и надежность используемых ею методов.

Вернемся мысленно в необозримо огромную область, которую я назвал «познанной землей». Предположим, мы создали модель – нечто вроде глобуса с нанесенными на нем «значками», изображающими объекты окружающего нас мира. Пусть цвет объекта зависит от степени понимания природы этого объекта. Тогда «глобус» менял бы свою окраску все время: непрерывно появлялись бы новые «значки», а уже имеющиеся меняли бы свой цвет. Научные знания об окружающем нас мире постоянно совершенствуются, углубляются. Загадочное явление неожиданно получает подробное описание, открываются его новые, неизвестные ранее черты, оно входит в научный обиход, часто тянет за собой новые открытия.

Наука – одна из наиболее динамичных областей человеческой деятельности. При этом для науки характерен строгий отбор: она не «набрасывается» на любую тайну. Наука, как правило, ставит перед собой задачи, которые может решить. Существует *определенная логика развития науки*: то, что вчера было вне науки из-за недоступности, сегодня – на повестке дня. Недоступность отнюдь не всегда следствие неподготовленности инструментария научного познания. Чаше недоступность означает неподготовленность мировоззрения ученых к постановке соответствующей задачи. Одна из важных черт крупных ученых – ощущение изменения ситуации, изменения, которое позволяет двигаться от незнания к знанию.

Итак, наука динамична. В тысячах научных журналах различного профиля сотни тысяч ученых печатают свои статьи, сообщая о новых данных и новых теоретичес-

ких соображениях. Поток информации огромен, по сути необозрим. Возникают и совершенствуются новые формы хранения информации и поиска необходимых сведений.

Последний абзац написан не для того, чтобы углубиться в информатику, а для того, чтобы попросить разделить со мной мое восхищение следующим.

Понимание атомно-молекулярного строения макроскопических тел<sup>1</sup> привело к тому, что само слово «понимание» по отношению к макроскопическим явлениям и свойствам макротел приобрело новый смысл. Понять – означает в конечном итоге уразуметь, каким образом атомы, молекулы, электроны своим положением в теле (т.е. строением тела, его составом) и своим движением «осуществляют» то или иное свойство, явление. Естественно, совсем не каждый раз описание макроскопических свойств и явлений доводится до микроскопического уровня. Но, несомненно, любой факт, любое наблюдение – все, что не укладывается в атомно-молекулярную теорию, что ей противоречит, было бы отмечено, тщательно исследовано, получило известность, оценено и приобрело бы фундаментальное значение. Насколько мне известно, ничего подобного пока нет.

Иногда появляется ощущение, что открыто, обнаружено нечто, что не укладывается в прокрустово ложе современной квантовой физики. Но проходит немного времени, и либо «нечто» находит объяснение в рамках известных законов природы, либо оказывается ошибкой. Именно это обстоятельство дало мне основание назвать непредставимо огромную область «познанной землей».

После построения квантовой механики атомно-молекулярная физика стала завершенной наукой. Свойства трех типов частиц (электронов, протонов, нейтронов),

<sup>1</sup> Термин «макроскопическое тело» в данном контексте означает, что тело состоит из огромного числа атомов, молекул. Макроскопическое свойство, макроскопическое явление – свойство, явление, в осуществлении которых принимает участие огромное количество атомных и субатомных частиц.

из которых все построено, по-видимому, в полной мере определены. Все большее число ученых склоняются к мысли, что объяснение (описание) даже наиболее загадочного явления (феномена жизни) не потребует открытия у частиц (не только у электронов, протонов, нейтронов, но и у атомов и молекул) каких-либо специфических свойств, которые проявляют себя только тогда, когда частицы принимают участие в работе живого организма. Последний тезис, конечно, недоказуем. Но история науки за последние более чем 70 лет при ее поистине умопомрачительном взлете не знает ни одного факта, который бы этому утверждению противоречил.

Означает ли это, что на будущую физику выпала роль лишь уточнить описание происходящих явлений и совершенствовать наши представления о свойствах тел? Конечно, нет! Хочу лишь обратить внимание, где находятся на нашем воображаемом «глобусе» источники новых фактов, которые могут заставить изменить наши представления о том, из чего построен мир.

В начале XX века стало ясно, что попытка понять устройство мира требует изучения движения микроскопических объектов в областях пространства, в сто миллионов раз меньших одного сантиметра (таков размер атома). Выяснение того, что каждый атом содержит компактное ядро, состоящее из протонов и нейтронов, заставило сосредоточить внимание на пространственных масштабах, в сотни тысяч раз меньших, чем атом. Этим занялась ядерная физика, которая изучает структуру атомных ядер и силы, действующие между протонами и нейтронами. Хотя объекты ядерной физики столь миниатюрны ( $10^{-14}$  –  $10^{-13}$  см), ее успехи принесли в мир ядерную энергетику и невиданные методы убийства – атомную и термоядерную (водородную) бомбы. Обойду молча *эти* достижения ядерной физики. К моему восхищению они мало что добавляют. Но в термоядерной физике есть нечто, что меня восхищает, – понимание механизма свечения Солнца и других звезд.

Проникновение в мир ядерных частиц привело к открытию совершенно нежиз-

данных свойств микроскопических частиц. Произошел пересмотр наших представлений о структурных единицах вещества – об элементарных частицах. Во-первых, элементарных частиц для роли первичных сущностей оказалось слишком много (сейчас их числится более 300). Во-вторых, элементарные частицы превращаются друг в друга. Именно поэтому нельзя из них выделить те три (электрон, протон, нейтрон), из которых построен макромир. Один из трех «кирпичей» – нейтрон, оказывается, живет вечно лишь внутри большинства ядер, а в свободном пространстве распадается на электрон, протон и антинейтрино<sup>2</sup>. В-третьих, все превращения элементарных частиц подчиняются строгим законам сохранения, которые есть следствия симметрии пространства. Выяснилось, что симметрия пространства значительно менее наглядна, чем представлялось.

Развитие физики элементарных частиц заставило попытаться «заглянуть» внутрь протона и нейтрона. Заглянули. И открылся новый мир. Мир *кварков*. Первое впечатление: сколько можно? Неужели частицы напоминают матрешки? И так до бесконечности? Идут годы. Мир кварков познается все с большими подробностями. Но все яснее становится, что дошли до чего-то истинно нового. Нет сомнений, что протоны и нейтроны состоят из кварков. Но вне частиц их нет. Они только *внутри*. Может быть, это свидетельство того, что физика добралась до по-настоящему первичных сущностей. Однако, не очень верится. Что-то слишком много разных кварков. Впереди много интересного...

Получается, что сигналы, которые могут заставить пересмотреть наши основные представления о фундаментальных зако-

нах природы, следует ожидать из субмикроскопических областей пространства. Но не только. Научившись получать и анализировать сигналы из далеких от нас мест во Вселенной, физики обнаружили, что есть нечто непонятное. Описывая динамику Вселенной, используя, казалось бы, прекрасно зарекомендовавшие себя законы природы, упираются в недоумение: для описания необходимо больше материи и энергии, чем во Вселенной удастся обнаружить. В чем дело, покажет будущее. Напомню только, что сигналы «неблагополучия» приходят к нам с расстояний порядка  $10^{10}$  световых лет, следовательно, из прошлого, удаленного от нас на  $10^{10}$  лет.

Формула моего восхищения проста. Я восхищен познаваемостью мира и его реальной познанностью. Вне зависимости от того, что предстоит еще познать, меня восхищает то, что уже достигнуто. Область познанного – *terra cognita* – непредставимо огромна. Но, как говорилось, и на ней непрерывно рождается новое знание. Нет никаких оснований считать это знание второсортным в сравнении с тем, которое непосредственно раздвигает познанную область.

В попытках объяснить наблюдаемые факты и предсказать новые явления или свойства рождаются новые идеи. Хотя эти идеи не противоречат основам современной квантовой физики, они столь нетривиальны, что вполне сопоставимы с открытиями на границе познанной области. Новые идеи иногда столь всеобщи, что не ограничены областью, в которой возникли. Некоторые переносятся на границу познанного пространства – в физику элементарных частиц, в физику Вселенной.

Ощущение единства физики и ее всеобщности – одна из составляющих моего восхищения.

\* \* \*

Мы живем в окружении предметов и устройств, созданных благодаря использованию результатов достижений науки. С удовольствием перешел от пера и бумаги к компьютеру, трудно представить себе

<sup>2</sup> Не обращайте внимание на приставку «анти». Она написана для точности. Многие частицы существуют парами. Кажется, только антиэлектрону присвоено специальное наименование – позитрон. Частица и античастица могут аннигилировать – исчезнуть, например, превратившись в фотоны, как электрон и позитрон.

жизнь без телефона и телевизора. Самолет и радиоволны изменили ощущаемые размеры земного шара. Восхищен телевизором и компьютером. Я не знаю точно, как они устроены. Плохо знаю конкретное устройство значительно более простых механизмов – тепловоза или автомобиля. Я представляю себе общие принципы, лежащие в основе инженерных разработок, и искренне благоговею перед теми, кто может наладить бесперебойную работу приборов, которыми успешно пользуюсь.

Но, откровенно говоря, не менее острое восхищение у меня вызывает другое – понимание того, как все устроено в природе. Понимание не обязательно мною. Мои

знания конкретных подробностей весьма ограничены. Но я знаю, что есть те, кто знают. Нет такого человека, который знает о мире все. Знание распределено по многим. Хранитель знания – человечество. Трудом отдельных людей созданы монографии и энциклопедии. В них собрано знание о мире. Никакого простого знания не существует. Никто не владеет простой формулой, содержащей разгадку мироздания.

Сумма знаний, накопленных человечеством, внушает уважение и надежду на будущее. Очень хочется верить, что человечество в конце концов окажется достойным той удивительной картины мира, которую создало.

## Прозрачное и непрозрачное

Л. АШКИНАЗИ

*И тут помещение озарилось ее визгом.*

Из интернета

**КАК ВЫ, НАВЕРНОЕ, ДОГАДЫВАЕТЕСЬ,** свет нужен для того, чтобы видеть. Деление веществ и вообще всего, что нас окружает, на прозрачное и непрозрачное возникло исторически. Человеку было важно увидеть объект, т.е. нечто непрозрачное, светорассеивающее, отражающее или излучающее, причем увидеть через прозрачную среду – атмосферу (всегда) и иногда плюс через вакуум (чтобы любоваться Луной) или воду (при охоте с берега острогой). Потом, по мере развития оптики (лупы, очки, телескопы) и индустрии красоты (зеркала), это деление упрочилось. Поэтому в учебнике все вещества делят на прозрачные и прочие. Оптические свойства прозрачных сред характери-

зуют коэффициентом преломления и упоминают про его зависимость от длины волны, т.е. про *дисперсию света*. А о прочих, т.е. непрозрачных, веществах в учебнике ничего не говорится, лишь упоминаются зеркала – как элемент оптических систем. Хотя зеркальных поверхностей в природе почти и нет, но вот два примера и связанный с ними вопрос.

**Вопрос 1.** Что изображено на рисунках 1 и 2 и почему изображения такие?

Редкость в природе зеркальных поверхностей – наше счастье: мы видим объекты в результате рассеивания ими света, реже в результате излучения (Солнце, молния, светлячки). Единственное, когда нашим предкам было нужно отражение, это чтобы увидеть глаза животных в темноте. Мир, в котором у поверхностей зеркальное отражение преобладает над рассеиванием (попробуйте себе это представить), был бы весьма сложен для ориентации.

Мозгу пришлось бы все время разбираться: то, что мы видим, оно там, где мы видим, или где-то в другом месте (например, о ужас, позади нас), или на полпути? В такой «комнате смеха» нам было бы не до смеха. Или мозг построил бы внутри себя мощный программный пакет для работы с такими изображениями?

**Вопрос 2.** Как можно было бы действовать в таком мире?

Но как же было бы страшно инопланетянину, попавшему из своего преимущественно зеркального мира в наш обычный бедный преимущественно рассеивающий мир! В мире без отражения и без рассеивания вполне можно было бы жить при условии сверхширокополосного зрения – от нашего видимого диапазона до, скажем, длины волны 50 мкм. Тогда бы мы видели все объекты в их собственном тепловом излучении (вспомним *закон Вина*).

Представление об окружающем мире человек на протяжении всей истории со-



Рис. 1



Рис. 2

здавал в основном с помощью зрения в диапазоне длин волн примерно от 0,38 мкм до 0,76 мкм. Могло ли оно быть устроено как-нибудь иначе, работать на других принципах? Например, змеи и летучие мыши имеют другие «зрения» – инфракрасное и ультразвуковое соответственно.

**Вопрос 3.** Может ли человек воспользоваться их методами? А может быть, существуют еще какие-то «зрения», которые не освоил никто?

Змеи пошли по пути *камеры-обскуры* именно потому, что для инфракрасного (ИК) диапазона с длиной волны, грубо говоря, от микрона до миллиметра, нет оптических материалов, из которых можно было бы сделать линзы (см. в интернете *инфракрасное зрение змей*). Рентген не поглощается атмосферой, но генерация рентгеновского излучения не доступна биологическому объекту и для рентгеновского диапазона нет доступных оптических материалов. Что касается акустической локации, то, если укоротить волну (т.е. поднять частоту) порядка на четыре, разрешающая способность такого гиперзвукового зрения могла бы стать лишь на порядок хуже, чем электромагнитного, но гиперзвук с такими частотами поглощается в воздухе.

Зрение вообще, т.е. возможность получать информацию об окружающих объектах, определяется двумя главными параметрами – дальностью действия и разрешающей способностью. Для того чтобы видеть далеко, нужна высокая чувствительность глаза – чем объект дальше, тем слабее сигнал. Чувствительность глаза имеет предел – сами клетки реагируют на одиночный квант, мозг же для борьбы с шумами обрабатывает сигналы так, что фиксирует вспышку, если в течение 0,1 с на разные клетки глаза попадет 5–7 фотонов. Увы, эффективность оптической системы глаза около 15% – глаз пропускает не все фотоны и чувствительные клетки поглощают не все кванты, которые в них попали. Иными словами, чтобы мозг что-то «увидел», до глаза в течение указанного времени должно долетать несколько десятков фотонов. Кстати, многие ночные

животные имеют сзади чувствительных клеток отражающий слой. Так поступили, например, наши друзья – кошки (рис.3).



Рис. 3

#### Вопрос 4. А зачем?

Люди пошли по другому пути, создали *усилители яркости и приборы ночного видения*. Но все равно есть внешние ограничения. В чистом воздухе человек видит горизонт, до которого (если стоять на поверхности идеального шара) примерно пять километров (а на Луне?). Более того, человек видит горизонт, поднявшись на самую высокую гору, а в этом случае до него более трехсот километров. В идеальном чистом воздухе за счет рассеивания света на флуктуациях плотности дальность зрения ограничена примерно такой же величиной, но это случайное совпадение. Иными словами, рассеивание света в атмосфере, то самое, из-за которого небо голубое, при расстоянии в триста километров создает такой фон, что объекты не будут видны в этом мареве. А была бы толщина атмосферы в 30 раз больше, чем сейчас, и не было бы у нас астрономии, и картина мира еще долго была бы иной. Именно этим – рассеиванием на флуктуациях плотности – определяются минимальные потери в оптоволокне, в световодах, так называемые *релеевские потери*. Вообще, потери в световодах – актуальная и активно исследуемая область. По одной простенькой причине: по оптоволоконным линиям перекачивается большая часть всей – вообще всей! – информации, которую пересылает человечество.

В космическом пространстве зрению раздолье – самые далекие звезды, которые человек видит без применения оптических инструментов, находятся на расстоянии около десяти тысяч световых лет. Но между Землей и Космосом в смысле применения зрения есть принципиальная разница. То, что мы видим на Земле, дало возможность построить хоть и ограниченную, но правильную картину мира. Там, где человек видел гору, действительно было трудно влезать, а где видел реку, там были вода, рыба и голодные крокодилы. Но чтобы разобраться хотя бы в самых общих чертах в том, что мы видим в Космосе, потребовалось создать телескопы и другие оптические инструменты. Главное – потребовалась физика.

А что было бы, если бы дальность действия зрения была существенно меньше? Например, не километры, а метры – вследствие, скажем, меньшей прозрачности атмосферы? Изменилась бы тактика освоения земной поверхности – никаких плаваний по морям, тем более никаких полетов. Человек стал бы строить свои сооружения (и здания, и дороги) последовательно и по возможности непрерывно «наползая» цивилизацией на поверхность Земли и лишь потом надстраивая свои сооружения вверх. Общество могло бы развиваться, техника и наука тоже, но представление о планете в целом если бы и возникло, то много позже. А представление о Космосе не возникло бы вообще – до момента, когда цивилизационная кожура доросла бы до границ атмосферы. Что по причине ограниченной прочности стройматериалов вообще было бы проблематично. Мы видим, что возможность «дальновидения» существенно влияет на облик цивилизации.

Нам повезло – Солнце излучает в диапазоне прозрачности земной атмосферы. Свети оно в той части ультрафиолетового или инфракрасного диапазона, в которых атмосфера не прозрачна, мы жили бы в темноте. Или свети оно, как светит, но атмосфера состояла бы из газов, не прозрачных в указанном диапазоне, – результат был бы тот же. Излучай Солнце на

существенно больших длинах волн, трудно было бы создать чувствительный «глаз» (энергия кванта меньше), но даже если бы это произошло, проблемно было бы получить большое пространственное разрешение. Словом, нам крупно повезло. А как обстоят дела у инопланетян?

Для начала ограничимся рассмотрением газовой или жидкой среды. В твердой среде процессы идут существенно медленнее, и жизнь скорее всего не успела бы развиваться и за астрономические времена. Солнце – любое солнце – это широкополосный источник излучения, а поглощение излучения газами всегда захватывает какую-то часть спектра. Поглощение электромагнитного излучения атомами и молекулами основано на переходах электронов с орбиты на орбиту и на резонансе при колебаниях молекул, поэтому у разреженных газов спектральные линии (и поглощения, и излучения) относительно узкие (в проводниках и полупроводниках излучение поглощается еще из-за наличия

свободных электронов). При увеличении концентрации линии расширяются, но до какой степени – это зависит от рода газа, типа колебаний и концентрации. Существуют *окрашенные газы*, т.е. заметно поглощающие излучение в пределах оптического (для нас с вами) диапазона. Таких газов немного, все они (для нас с вами) ядовиты, а наиболее хороший и широкополосный поглотитель – это бром  $Br_2$ . Он поглощает все оптическое длиннее 0,35 мкм.

**Вопрос 5.** Какое «солнце» желательно иметь в этом случае?

Кстати, насчет поглощения в обычной атмосфере. Если нас интересует широкий диапазон длин волн, то он представлен на рисунке 4. Чисто газовая атмосфера (смысл этой осторожной оговорки скоро узнаем), состоящая из газов, не противоречащих жизни, прозрачна. Что касается жидких сред, то ситуация довольно смутная. Потому что окрашенные жидкости, которые мы встречаем в быту, например

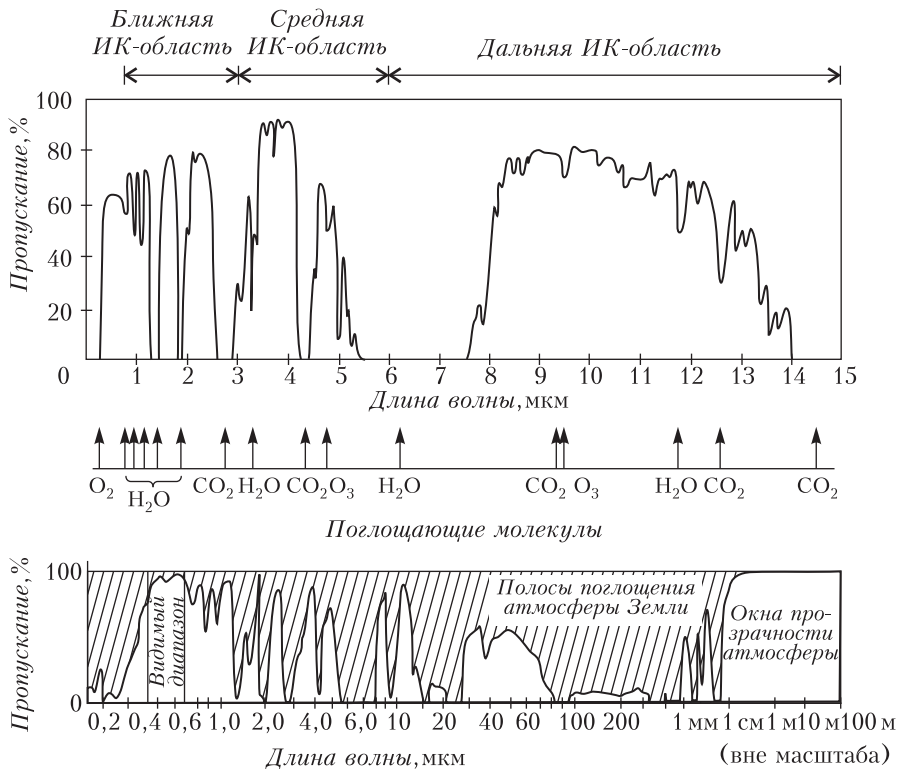


Рис. 4

чернила, кровь, некоторые овощные и фруктовые соки, окрашены не сами по себе, а красителями – т.е. малыми добавками красящих веществ к воде. Особая ситуация с нефтью – это смесь углеводородов, из которых одни прозрачны, а другие поглощают излучение, вот от концентрации вторых и зависит цвет. Про то, какие вещества – красители и как от структуры молекул зависит поглощение света, химики могут долго и интересно рассказывать (начало рассказа – опять же, про резонанс), но так или иначе непрозрачные жидкости, в которых жизнь возможна, существуют. Чем, например, вам плох как среда обитания смородиновый или гранатовый сок? Отрастить жабры – и вперед, юные *Ихтиандры!*

Но это все в однородной среде, а бывают неоднородные. А что вы скажете об атмосфере с таким сочетанием температуры и давления, что для какого-то из ее веществ – да хотя бы для воды  $H_2O$  – мы как раз попадаем на линию раздела газ–жидкость на диаграмме состояний? Например, атмосфера в основном кислородная, давление, 0,05 атм и температура 40 °С? Для нас немного жарковато и кислорода меньше, чем хотелось бы, но вода в морях-океанах все время потихому кипит и в воздухе висят (потому что веет слабый ветерок от горячей почвы) микрокапли воды. Жизнь вполне возможна, даже белковая. А как насчет видимости?

**Вопрос 6.** Кстати, если у нас в воздухе имеются какие-то частички, например капли, то от чего зависит расстояние видимости и как его посчитать?

А еще лучше, если мы, двигаясь по линии контакта жидкости и газа, доберемся до *критической температуры*, когда разница между ними исчезает. В этой точке у нас будет такая *критическая опалесценция*, что вообще носа своего не увидим – одни флуктуации плотности и рассеяние излучения. Такое же рассуждение применимо к рассеиванию в неоднородных жидкостях, например эмульсиях, когда в одной жидкости плавают маленькие капельки другой, или в суспензиях, когда плавают твердые частицы, или в пене,

когда много пузырьков. Но во всех случаях нам нужно знать оптические свойства всех материалов – участников ситуации.

**Вопрос 7.** А если коэффициенты преломления, например, совпадают, то что?

Есть совсем простой общеизвестный пример эмульсии, которая прекрасно рассеивает свет, – это молоко. Рассеивают свет и твердые тела, если они неоднородны, причем размер неоднородностей сравним с длиной волны или больше. Пример – стекло. Обычное аморфное стекло прозрачно (если в него не добавлены светорассеивающие частички). Если же стекло кристаллизовать, оно станет светорассеивающим, матовым, свет будет рассеиваться на границах кристаллов. Но если кристаллизовать стекло так, чтобы кристаллики были очень мелкими, в десятки нанометров и менее, т.е. много меньше длины волны, то при соблюдении еще некоторых условий оно станет прозрачным. Сейчас его называют «наноситалл», пишут о нем всякие глупости и – если он цветной – рекламируют как ювелирный «камень».

Рассеивание излучения характеризуют *диаграммой направленности*, т.е. зависимостью мощности от угла; рисуют ее, естественно, в полярных координатах. При чисто зеркальном отражении – это узкая «игла» под тем же углом, под которым прилетело излучение. При чисто диффузном отражении от хаотично шероховатой поверхности мощность пропорциональна косинусу угла относительно нормали (*закон Ламберта*). В реальной ситуации всегда имеется смесь того и другого, даже идеально полированная поверхность отражает не чисто зеркально. В некоторых источниках указывается, что идеально полированное стекло рассеивает  $10^{-3}$  процента, идеально полированный металл –  $10^{-2}$  –  $10^{-1}$  процента. Наверное, конкретная цифра зависит от степени и смысла «идеальности».

*(Продолжение следует)*



# Одна задача о раскраске

А.РАЙГОРОДСКИЙ

## Задача для затравки

Для затравки рассмотрим следующую задачу. В классе учатся 30 человек. Из них отбираются 5 лучших комбинаторщиков, 5 лучших числовиков, 5 лучших вероятностников и так далее. Всего 15 предметов. Конечно, эти пятерки лучших могут как угодно пересекаться: заранее мы не знаем, кто окажется сильнее в каком из предметов. Вопрос: *всегда ли* можно так рассадить наших 30 школьников по двум кабинетам, чтобы в каждом кабинете был хотя бы один представитель каждой из пятерок? Например, если все пятерки совпадают, то, очевидно, рассадка возможна. Но ведь есть огромное количество других вариантов! Может, если пятерки распределяются более хитро, то окажется, что, как ни рассаживай 30 школьников по двум кабинетам, обязательно найдется кабинет, в котором одна из пятерок находится целиком?

Ответ на вопрос все-таки положительный: да, такая рассадка *всегда* возможна. Решение очень простое и красивое! Оно основано на вероятностном методе в комбинаторике (см. [1], [2]). В принципе здесь еще можно было бы обойтись без ссылок на теорию вероятностей, но будет лучше, если мы сразу воспользуемся именно вероятностной терминологией.

Итак, нам даны 15 пятерок. Обозначим их  $M_1, \dots, M_{15}$ . Рассмотрим *случайную* рассадку школьников. Что это значит? Вообще говоря, что угодно, ведь случайность можно определять по-разному. Но мы будем понимать случайность максимально просто: каждый школьник отправляется в первый кабинет с вероятностью  $\frac{1}{2}$ , и с такой же вероятностью он идет во второй кабинет; выбор кабинета школьни-

ки осуществляют независимо друг от друга. Иными словами, мы как бы 30 раз бросаем симметричную монетку, и если монетка в  $i$ -м бросании падает решкой вверх, то  $i$ -й школьник идет в первый кабинет, иначе – во второй. Введем обозначение  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 15$ , для события, состоящего в том, что пятерка  $M_i$  целиком попала в один кабинет. Какова вероятность  $P(A_i)$  этого события? Поскольку выбор производится школьниками независимо, вероятности перемножаются, и мы получаем

$$P(A_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}.$$

Теперь изучим вероятность того, что *хотя бы одна* пятерка целиком сидит в одном кабинете. Разумеется, это вероятность события  $\bigcup_{i=1}^{15} A_i$ . Ясно, что

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{15} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{15} P(A_i) = \frac{15}{16} < 1.$$

Значит, с *положительной* вероятностью имеет место противоположное событие, которое состоит в том, что ни одна пятерка целиком не сидит в одном из кабинетов. Но ведь это ровно то, что нужно! «Ни одна пятерка целиком не сидит» – это то же самое, что «в каждом кабинете есть хотя бы один представитель каждой из пятерок». И это выполнено с положительной вероятностью. Если вероятность рассадки с нужным свойством положительна, то такая рассадка точно есть. Как ее искать – другой вопрос. Но задача решена: рассадка есть всегда.

Отметим, что в нашем *решении* нигде не использовался тот факт, что всего школьников именно 30. Соответственно, возникает вопрос: а можно ли, по-прежнему пренебрегая исходным количеством школьников, увеличить количество предметов от

15 и получить тот же результат с возможностью рассадки? До шестнадцати дотянуть легко. В самом деле, все события  $A_i$  имеют непустое пересечение. Заведомо в этом пересечении находится дурацкая рассадка, при которой все школьники сидят в первом кабинете. Но тогда вероятность объединения *строго меньше* суммы вероятностей, и снова наш метод срывается. Уже с семнадцатью такой номер не проходит...

Легко видеть, что для 126 пятерок ответ уже положительным не является. Странное число, да? Ну, сейчас разберемся! Мы же вольны в выборе исходного количества школьников. Давайте возьмем *все* пятерки, какие только можно составить из *девяти* человек. Их в аккурат  $126 = C_9^5$ . Попробуем теперь рассадить девятерых школьников по двум кабинетам. И вот не тут-то было! При любой рассадке в какой-то кабинет попадет не менее пяти школьников. Но у нас *каждая* пятерка сейчас «в деле». Значит, все плохо, и мы имеем пример ситуации, когда ответ на первоначальный вопрос уже не является утвердительным.

Итак, для любых 16 пятерок ответ утвердительный, но *существуют* 126 пятерок, для которых ответ отрицательный. Все это приводит к общей постановке задачи, о которой мы и поговорим в следующем разделе.

### Постановка общей задачи

Прежде всего, пора перейти от школьников к абстрактным объектам. А именно, введем понятие *гиперграфа*. Оно является прямым обобщением понятия графа. У гиперграфа также есть вершины, образующие некоторое конечное множество  $V$ , и ребра, образующие множество  $E$ . Только у гиперграфа в каждом ребре не обязательно две вершины: может быть и больше (ребра из одной вершины мы исключим из рассмотрения вовсе). Более строго, гиперграф – это пара  $H = (V, E)$ , где  $V$  – некоторое множество, а  $E$  – некоторая совокупность подмножеств множества  $V$ . Подмножества неупорядоченные (сочетания без повторов), кратных ребер нет, в

каждом ребре хотя бы две вершины. Гиперграф называется  *$n$ -однородным*, если в каждом его ребре ровно  $n$  вершин. Обыкновенный граф, тем самым, – это 2-однородный гиперграф. А школьники и пятерки – это 5-однородный гиперграф на тридцати вершинах.

Часто замечают, что у гиперграфа, в отличие от графа, нет естественного «портрета». Действительно, если граф легко изобразить как множество точек на плоскости, соединенных отрезками (или дугами), то попытка сделать то же самое с гиперграфом приводит к странному хитросплетению эдаких «сарделек» (рис.1).

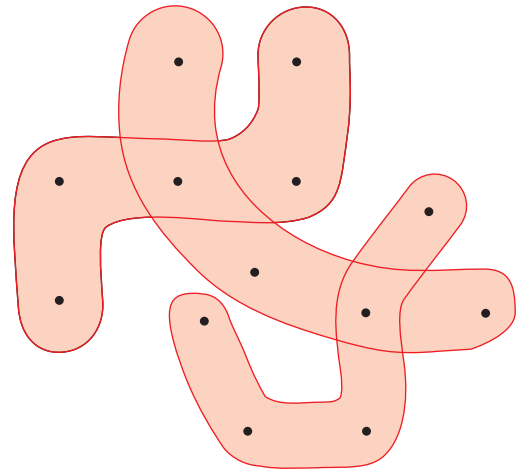


Рис. 1

В своих лекциях я часто употребляю слово «сарделька» для обозначения ребра гиперграфа, но картинок не рисую. Мне самому легче представлять себе именно эдакую кастрюльку (множество вершин) с наметанными в ней сардельками-ребрами. Некоторые «продвинутые пользователи» вспоминают выражение «симплициальный комплекс» (просьба тех, кто не слышал его, не пугаться, так как мы его употреблять не будем). Но (опять же, для тех, кто в теме) симплициальный комплекс – это гиперграф, у которого каждое подмножество каждого ребра само является ребром, т.е. это заведомо не однородный гиперграф. В общем, нам это знание не поможет, и мы больше о симплициальных комплексах вспоминать не будем.

Назовем *хроматическим числом* гиперграфа  $H$  величину  $\chi(H)$ , равную наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все вершины гиперграфа, чтобы каждое его ребро было неоднородным. Позвольте, но ведь задача из предыдущего раздела отлично формулируется в этих терминах! В самом деле, вопрос о пятнадцати пятерках отныне звучит так: «Верно ли, что у любого 5-однородного гиперграфа с тридцатью вершинами и пятнадцатью ребрами хроматическое число равно двум?» Рассадка по двум кабинетам и раскраска в два цвета – лишь два способа описания одного и того же явления.

Введем, наконец, классическую величину  $m(n)$ , предложенную Эрде́ем и Хайналом в 1961 году и равную наименьшему  $m$ , при котором существует  $n$ -однородный гиперграф  $H$  с  $m$  ребрами и с  $\chi(H) > 2$ . Главное сразу понять, что в терминах этой величины результаты предыдущего раздела выглядят так:

$$17 \leq m(5) \leq 126. \quad (1)$$

У любого 5-однородного гиперграфа с шестнадцатью ребрами хроматическое число равно двум, поэтому  $m(5) \geq 17$ , но существует 5-однородный гиперграф со 126-ю ребрами, у которого хроматическое число больше двух, откуда  $m(5) \leq 126$ .

Очевидное обобщение неравенства (1) приводим ниже:

$$2^{n-1} + 1 \leq m(n) \leq C_{2n-1}^n. \quad (2)$$

Мы не станем доказывать эти неравенства, ведь это совсем легкое упражнение. Но мы обсудим вопрос о том, насколько близки друг к другу верхняя и нижняя оценки. В самом деле, хорошо известно тождество (см. [3])

$$C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1 + \dots + C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-1}^n + \dots + C_{2n-1}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Также известно, конечно, что два центральных слагаемых в этом тождестве являются в нем самыми большими. При этом общее число слагаемых в левой части тождества равно  $2n$ . Следовательно,

$$\frac{2^{2n-1}}{2n} < C_{2n-1}^n < 2^{2n-1}.$$

В итоге понятно, что зазор между оценками в (2) экспоненциальный: нижняя имеет порядок  $2^n$ , а верхняя с точностью до возможного деления на что-то порядка  $n$  имеет порядок  $4^n$ . Это не очень круто, и это одна из серезнейших проблем современной экстремальной комбинаторики! (Раздел науки, с которым мы сейчас имеем дело, называется «экстремальной комбинаторикой» не потому, что только экстремалы им занимаются, хотя он и захватывающе красив и не менее захватывающе труден, но потому, что в его рамках ищутся экстремальные, т.е. максимальные или минимальные комбинаторные величины, среди которых  $m(n)$ .)

В последующих разделах мы изучим красивейшие подходы к уменьшению зазора в (2). Отметим, что нижняя оценка в (2) вероятностная (т.е. она гарантирует наличие раскраски, но не объясняет, как ее искать), а верхняя оценка конструктивная (приводится явный пример гиперграфа, не имеющего раскраски в 2 цвета). В следующем разделе мы значительно улучшим верхнюю оценку, но сделаем это... вероятностным методом, т.е. за улучшение мы заплатим потерей конструктивности.

Напоследок предлагаем читателю самостоятельно ответить на вопрос, чему равно  $m(2)$  (совсем просто) и  $m(3)$  (сложнее, но посылно). Отметим при этом, что  $m(4)$  нашли совсем недавно с помощью весьма нетривиального компьютерного перебора, а величину  $m(5)$ , которая послужила нам в качестве заправки, никто до сих пор не знает!

### Верхняя оценка величины $m(n)$

В этом разделе мы докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть дано число  $n$ . Пусть  $v$  – любое четное число, не меньшее  $2n$ . Положим

$$p = \frac{2C_{v/2}^n}{C_v^n}.$$

Пусть  $t$  – наименьшее натуральное число, с которым выполнено неравенство

$$2^v (1-p)^m < 1.$$

Тогда  $m(n) \leq t$ .

Для получения оптимальной оценки в теореме 1 нужно просто перебрать последовательно несколько первых  $v$ , начиная с  $v = 2n$ , и для каждого из них найти свое значение  $m$ . Наименьшее среди этих значений и будет оптимальным. Ниже мы приводим примеры подобных вычислений для некоторых  $n$ , попутно сравнивая полученные результаты с оценкой  $m(n) \leq C_{2n-1}^n$ . Как видно, при малых  $n$  теорема 1 дает более слабый результат. Однако чем больше  $n$ , тем яснее, что в теореме 1 оптимум ведет себя с точностью до некоторого постоянного множителя как  $n^2 \cdot 2^n$ , и это уже грандиозно, ведь тем самым получается, что мы снижаем зазор, заменяя экспоненту от  $n$  всего лишь квадратом этого числа! Константу можно сосчитать методами математического анализа, но мы не станем здесь этого делать.

На рисунке 2 показано сравнение верхних и нижних оценок для величины  $m(n)$ ,

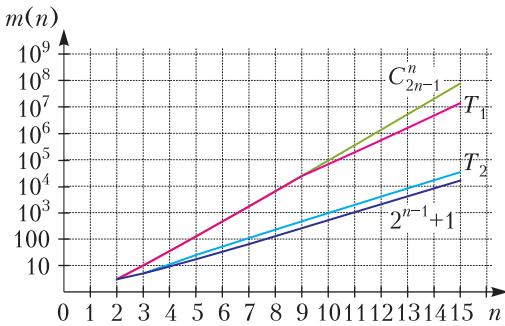


Рис. 2

данных в неравенстве (2) и теоремах 1 и 2. Обратите внимание: ось ординат логарифмическая, и поэтому то, что на графике похоже на линейную функцию, на самом деле растет экспоненциально.

Для понимания доказательства теоремы 1 потребуется, помимо базовой вероятности, с которой мы уже немного свыклись, знание одного комбинаторного неравенства.

**Неравенство выпуклости.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $v \geq n$  – четное число. Пусть  $a, b \in \mathbb{N}$  и  $a + b = v$ . Тогда

$$\frac{C_a^n + C_b^n}{2} \geq C_{v/2}^n = C_{(a+b)/2}^n.$$

Название неравенства происходит оттого, что оно говорит о выпуклости биноми-

ального коэффициента как функции от нижнего индекса при заданном верхнем индексе. Конечно, четность  $v$  не обязательна. Но так проще для восприятия. Неравенство очень простое, и мы оставляем его доказательство читателю. Заметим, что мы считаем  $C_m^k = 0$  при  $k > m$ .

**Доказательство теоремы 1.** Построим случайный  $n$ -однородный гиперграф с  $v$  вершинами и  $m$  ребрами. Нам нужно будет так осуществить построение, чтобы с положительной вероятностью в любой раскраске вершин случайного гиперграфа в 2 цвета было хотя бы одно одноцветное ребро или, что равносильно, чтобы с вероятностью, меньшей единицы, нашлась раскраска вершин случайного гиперграфа в 2 цвета, при которой все ребра неоднородны. Рассмотрим множество вершин  $V = \{1, \dots, v\}$ . Случайными будут ребра. Выберем каждое из них независимо ото всех остальных из множества всех  $n$ -сочетаний из  $V$  с вероятностью  $\frac{1}{C_v^n}$ . Читатель

может спросить: «А что, если появятся кратные ребра? Ведь при взаимно независимом выборе ребра могут и совпасть». Но ответ простой. Если какие-то ребра совпадут, мы их отождествим. Получится гиперграф с еще меньшим числом ребер, а нам это только на пользу, раз уж мы доказываем сейчас верхнюю оценку для  $m(n)$ . Итак, пусть  $H = (V, E)$  – это описанный только что случайный гиперграф и  $E = \{f_1, \dots, f_m\}$ .

Пусть  $\chi$  – некоторая раскраска  $V$  в два цвета. Пусть в ней  $a$  красных и  $b$  синих вершин. Естественно,  $v = a + b$ . Обозначим  $A_{\chi,i}$  событие, состоящее в том, что ребро  $f_i$  одноцветно в раскраске  $\chi$ . Очевидно,

$$P(A_{\chi,i}) = \frac{C_a^n + C_b^n}{C_v^n}.$$

За счет неравенства выпуклости получаем оценку

$$P(A_{\chi,i}) = \frac{C_a^n + C_b^n}{C_v^n} \geq \frac{2C_{v/2}^n}{C_v^n} = p.$$

Тогда вероятность отрицания события  $A_{\chi,i}$  (ребро  $f_i$  неоднородно) не больше  $1 - p$ .

Пусть  $A_\chi$  – событие, при котором все ребра случайного гиперграфа неодноцветны в раскраске  $\chi$ . Поскольку ребра выбирались независимо друг от друга, получаем неравенство

$$P(A_\chi) \leq (1 - p)^m.$$

Наконец, интересующее нас событие  $A$  – «найдется раскраска вершин случайного гиперграфа в 2 цвета, при которой все ребра неодноцветны» – это  $\bigcup_{\chi} A_\chi$ . Значит,

$$P(A) \leq P\left(\bigcup_{\chi} A_\chi\right) \leq \sum_{\chi} P(A_\chi) \leq 2^v (1 - p)^m,$$

ведь всего раскрасок  $V$  в 2 цвета  $2^v$  штук. Последняя величина, как нам того и нужно, меньше единицы по условию теоремы, и теорема доказана.

Крайне любопытно, что, жертвуя конструктивностью, мы реально упростили себе жизнь. До сих пор не известны явные конструкции гиперграфов со столь малым числом ребер и хроматическим числом, большим двух. Лишь совсем недавно – в 2013 году – Гебауэр построила пример гиперграфа, у которого число ребер не превосходит величины

$$2^{n+cn^{2/3}}, \quad c > 0.$$

Это круто, поскольку основной сомножитель –  $2^n$  – совпадает с известной нам экспонентой в верхней и нижней оценках. Но это гораздо слабее теоремы 1, ведь  $n^2$  несравнимо меньше, чем  $2^{n^{2/3}}$ .

**Улучшение нижней оценки величины  $m(n)$  с помощью жадного алгоритма**

В этом разделе мы улучшим известную нам нижнюю оценку  $m(n)$ .

**Теорема 2.** Пусть для данного  $n$  число  $m$  является наибольшим натуральным, с которым выполнено неравенство

$$m^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} < 1. \quad (3)$$

Тогда

$$m(n) > m.$$

Как и в предыдущем разделе, выпишем ниже результат сопоставления нижней оценки в (2) и в (3). Здесь видно, что даже при  $n = 5$  есть заметное улучшение. Опять

же, методы математического анализа позволяют показать, что оценка (3) растет как  $c \cdot \sqrt[4]{n} \cdot 2^n$  с некоторой фиксированной  $c > 0$ . Мы здесь в такие детали не влезаем.

Доказательство теоремы 2 основано на красивой и несложной идее, которую предложил Плухар. Для описания идеи введем несколько новых понятий. Пусть дан гиперграф  $H = (V, E)$ . Изначально его вершины представляют собой некоторую совокупность объектов, которые никак не упорядочены. Порядок на этой совокупности можно задать, разумеется,  $|V|!$  способами. Пусть задан некоторый порядок (нумерация вершин)  $\pi$  и есть два ребра  $f_1, f_2$ , имеющие ровно одну общую вершину  $i$ . Назовем пару  $(f_1, f_2)$  упорядоченной 2-цепью в нумерации  $\pi$ , если номера всех вершин ребра  $f_1$  предшествуют номеру  $i$ , а номера всех вершин ребра  $f_2$  идут после номера вершины  $i$ . На рисунке 3 показана «кастрюлька с двумя сардельками» и два

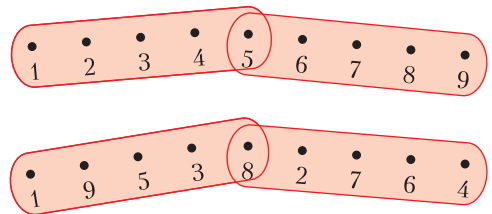


Рис. 3

способа нумерации вершин в кастрюльке, при одном из которых сардельки образуют упорядоченную 2-цепь, а при другом – не образуют. Идея Плухара формулируется в виде следующего критерия.

**Критерий Плухара.** Хроматическое число гиперграфа равно двум тогда и только тогда, когда существует нумерация его вершин, в которой нет упорядоченных 2-цепей.

Прежде чем привести простое доказательство критерия, полезно осознать, что он говорит в случае обыкновенного графа (т.е. 2-однородного гиперграфа). В самом деле, что означает утверждение «хроматическое число графа равно двум»? Оно означает, что множество вершин графа можно разделить на две непересекающиеся части, внутри которых ребер графа нет, но между которыми как раз и прохо-

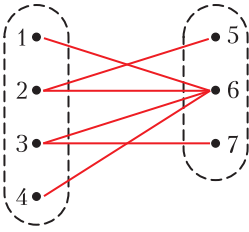


Рис. 4

дят все ребра графа (рис.4). Такой граф еще называют *двудольным* (т.е. буквально двухчастным), и многие читатели наверняка сталкивались с этим объек-

том. Понятно, что вершинам одной доли можно присвоить номера от единицы до числа, равного количеству вершин в этой доле, а вершинам второй доли – все последующие номера, и тогда упорядоченных 2-цепей не возникнет (здесь 2-цепь – это «галочка», у которой номера вершин идут в порядке «меньше-больше-меньше» или «больше-меньше-больше»).

**Доказательство критерия Плухара.** В одну сторону мы фактически доказательство уже привели. Действительно, если существует двухцветная раскраска, при которой все ребра неоднородны, то достаточно взять любую нумерацию, при которой все вершины первого цвета имеют меньшие номера, нежели все вершины второго цвета (двудольность).

В обратную сторону рассуждение основано на простейшем жадном алгоритме, и это объясняет название раздела. Итак, пусть существует нумерация вершин без упорядоченных 2-цепей. Обозначим будущие цвета числами 1, 2, ... Рассматриваем вершины по порядку и красим их в минимальный цвет, с которым они не образуют одноцветных ребер вместе с уже покрашенными вершинами. Если для некоторой вершины  $v$  нам не хватает цветов 1 и 2, то существует ребро  $f_2$ , которому принадлежит вершина  $v$  и в котором все остальные (предшествующие) вершины уже покрашены в цвет 2. Пусть  $w$  – вершина в  $f_2$  с наименьшим номером. Раз мы ее покрасили в свое время в цвет 2, то мы не смогли тогда ее покрасить в цвет 1. Почему? А потому, что, стало быть, имелось ребро  $f_1$ , для которого вершина  $w$  была, наоборот, последней и которое имело все вершины цвета 1. В этом случае очевидно, что ребра  $f_1, f_2$  образуют упорядоченную 2-цепь. Противоречие.

Критерий полностью доказан.

**Доказательство теоремы 2.** Пусть дан произвольный  $n$ -однородный гиперграф  $H = (V, E)$  с  $m$  ребрами. Мы хотим показать, что  $\chi(H) = 2$ . Согласно критерию Плухара достаточно доказать существование нумерации  $V$  без упорядоченных 2-цепей. Рассмотрим, как водится, случайную нумерацию. Иными словами, каждая нумерация выбирается с вероятностью  $\frac{1}{|V|!}$ .

Пусть  $f_1, f_2 \in E$  и пересечение этих ребер состоит из одной вершины. Обозначим  $A_{f_1, f_2}$  событие, состоящее в том, что в случайной нумерации ребра  $f_1, f_2$  образуют упорядоченную 2-цепь. Легко сообразить, что

$$P(A_{f_1, f_2}) = \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

Далее, вероятность того, что найдутся два ребра, образующие упорядоченную 2-цепь, равна

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{f_1, f_2} A_{f_1, f_2}\right) &\leq \sum_{f_1, f_2} P(A_{f_1, f_2}) < \\ < |E|^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} = m^2 \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!} < 1, \end{aligned}$$

и теорема доказана.

### Дальнейшее улучшение нижней оценки $m(n)$ с помощью рандомизированного алгоритма перекраски

В этом разделе мы используем иной вероятностный подход, нежели до сих пор, и докажем следующую теорему, придуманную Бекем и Спенсером.

**Теорема 3.** Пусть дано  $n$  и  $x$  – максимальное число, для которого существует  $p \in [0, 1]$ , удовлетворяющее неравенству

$$x \cdot (1-p)^n + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot (1+p)^n < 1.$$

Тогда  $m(n) \geq x \cdot 2^{n-1}$ .

Опять-таки, сравним теорему 3 с теоремой 2, приводя ниже результаты компьютерных вычислений. Аналитические методы позволяют показать, что здесь оптимальное значение  $x$  – это  $c \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{\ln n}}$ , но мы не хотим здесь требовать от читателя даже

знания того, что такое  $\ln n$ . В любом случае оценка еще круче прежней.

**Доказательство теоремы 3.** Пусть  $H = (V, E)$  –  $n$ -однородный гиперграф с

$$m = \lceil x \cdot 2^{n-1} \rceil$$

ребрами. Покажем, что существует раскраска в 2 цвета множества  $V$ , при которой все ребра неодноразноцветны. Раскраску будем строить с помощью следующего рандомизированного алгоритма.

*Шаг 1.* Красим вершины независимо друг от друга, с вероятностью  $\frac{1}{2}$  выбирая для каждой вершины один из двух цветов – красный или синий. Пусть  $D$  – случайное множество вершин, принадлежащих одноцветным ребрам (объединение всех ребер, которые оказались одноцветными). Это может быть и пустое множество, например.

*Шаг 2.* Рассматриваем только вершины из множества  $D$ . У каждой из них мы независимо ото всех остальных вершин множества  $D$  меняем цвет на противоположный с вероятностью  $p$  и не меняем цвет с вероятностью  $1 - p$ . Иными словами, у нас как бы есть монета со смещением, вообще говоря, центром тяжести. При случайном бросании монета ложится решкой кверху с вероятностью  $p$  и орлом – с вероятностью  $1 - p$ . Мы бросаем монету  $|D|$  раз, и если в очередном бросании монета падает решкой кверху, то меняем цвет соответствующей вершины из  $D$ ; иначе не меняем.

Понятно, что шаг 1 – это обычная случайная раскраска, с помощью которой мы доказывали неравенство  $m(n) \geq 2^{n-1} + 1$ . Таким образом, шаг 2 – это попытка исправить ошибки шага 1 за счет того, что шаг 1 не чувствителен к виду исходного гиперграфа, а шаг 2 пытается учесть его структуру и повысить, тем самым, вероятность того, что на выходе все ребра окажутся неодноразноцветными.

Пусть  $\mathcal{F}$  – событие, состоящее в том, что раскраска не удалась, т.е. существуют одноцветные ребра. Как конкретное ребро  $f$  может оказаться одноцветным? Есть всего 6 вариантов:

1.  $A_{f,1}$ : ребро  $f$  красное после шага 1 и красное после шага 2;
2.  $A_{f,2}$ : ребро  $f$  красное после шага 1 и синее после шага 2;
3.  $A_{f,3}$ : ребро  $f$  синее после шага 1 и синее после шага 2;
4.  $A_{f,4}$ : ребро  $f$  синее после шага 1 и красное после шага 2;
5.  $C_{f,1}$ : ребро  $f$  неодноразноцветное после шага 1 и красное после шага 2;
6.  $C_{f,2}$ : ребро  $f$  неодноразноцветное после шага 1 и синее после шага 2.

Очевидно,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \bigcup_{f \in E} (A_{f,1} \cup A_{f,2} \cup A_{f,3} \cup A_{f,4} \cup C_{f,1} \cup C_{f,2}), \\ \mathbb{P}(A_{f,1}) &= \mathbb{P}(A_{f,3}), \quad \mathbb{P}(A_{f,2}) = \mathbb{P}(A_{f,4}), \\ \mathbb{P}(C_{f,1}) &= \mathbb{P}(C_{f,2}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}) \leq 2 \sum_{f \in E} (\mathbb{P}(A_{f,1}) + \mathbb{P}(A_{f,2}) + \mathbb{P}(C_{f,1})).$$

Оценим вероятности, стоящие в скобках под знаком суммирования. Совсем легко разобраться с первыми двумя:

$$\mathbb{P}(A_{f,1}) = 2^{-n} \cdot (1-p)^n, \quad \mathbb{P}(A_{f,2}) = 2^{-n} \cdot p^n.$$

А вот с третьей вероятностью намного труднее.

Как могло случиться, что ребро  $f$  неодноразноцветное после шага 1, но красное после шага 2? Конечно, синие вершины ребра  $f$ , имевшиеся в нем после шага 1, должны были переокраситься. Но почему? Как они попали в множество  $D$ , если  $f$  неодноразноцветное и в формировании  $D$  не участвовало? Значит, было еще хотя бы одно ребро  $\varphi$ , которое было синим после шага 1 и которое имеет непустое пересечение с  $f$ . Это именно следствие, не равносильность! Все могло быть очень и очень хитро. Например, красные после шага 1 вершины ребра  $f$  тоже могли попасть в  $D$  и пытаться поменять цвет, но монетка легла орлом. И так далее. Но мы точно знаем, что следствие имеет место, откуда

$$\mathbb{P}(C_{f,1}) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{\varphi} B_{f,\varphi}\right),$$

где объединение берется по всем  $\varphi \in E$ , которые имеют непустое пересечение с  $f$ , а  $B_{f,\varphi}$  – событие, состоящее в том, что  $f$  неодноразовое после шага 1,  $f$  красное после шага 2 и  $\varphi$  синее после шага 1. Таким образом,

$$P(C_{f,1}) \leq \sum_{\varphi} P(B_{f,\varphi}),$$

и нам нужно оценить величину  $P(B_{f,\varphi})$ .

Положим  $h = |f \cap \varphi| \geq 1$ . Посмотрим отдельно на  $a = f \cap \varphi$ , отдельно на  $b = \varphi \setminus f$  и отдельно на  $c = f \setminus \varphi$ . С вершинами из  $a$  все ясно. Они были синими и стали красными. Вероятность этого  $2^{-h} \cdot p^h$ . Так же просто все и в случае  $c$ . Вершины там были синими, а что с ними стало, мы не знаем. Вероятность этого не больше, чем  $2^{-(n-h)} \cdot 1$ . Интереснее всего обстоят дела с  $b$ . Пусть  $v \in b$ . Есть два варианта. Во-первых,  $v$  могла быть синей и стать красной. Вероятность этого  $\frac{1}{2} \cdot p$ . Во-вторых,

она могла быть красной и остаться красной. Как произошло последнее, мы не знаем: то ли  $v$  попала в  $D$ , но монетка легла орлом, то ли  $v$  не попала в  $D$  и просто не пыталась сменить цвет. В любом случае здесь вероятность не больше, чем  $\frac{1}{2} \cdot 1$ . Итого для данной  $v \in b$  имеем оценку вероятности величиной, равной сумме оценок вероятностей первого и второго варианта, т.е.  $\frac{p}{2} + \frac{1}{2}$ . В целом по  $b$  за счет независимости вероятность оценивается величиной  $\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-h}$ . Собирая все оценки вместе, получаем

$$\begin{aligned} P(B_{f,\varphi}) &\leq 2^{-h} \cdot p^h \cdot 2^{-(n-h)} \cdot \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)^{n-h} = \\ &= 2^{h-2n} \cdot p^h \cdot (1+p)^{n-h}. \end{aligned}$$

Очевидно, последняя величина принимает максимальное значение при  $h = 1$  (она убывает по  $h$ ). Значит, всегда

$$\begin{aligned} P(B_{f,\varphi}) &\leq 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^{n-1} < \\ &< 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n. \end{aligned}$$

Вернемся к оценке вероятности  $C_{f,1}$ . Ясно, что

$$\begin{aligned} P(C_{f,1}) &\leq \sum_{\varphi} P(B_{f,\varphi}) < |E| \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n = \\ &= m \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n \leq \\ &\leq x \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{1-2n} \cdot p \cdot (1+p)^n = \\ &= x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F}) &\leq 2 \sum_{f \in E} (P(A_{f,1}) + P(A_{f,2}) + P(C_{f,1})) \leq \\ &\leq 2 \sum_{f \in E} (2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + \\ &\quad + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n) = \\ &= 2m (2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + \\ &\quad + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n) \leq \\ &\leq x \cdot 2^n (2^{-n} \cdot (1-p)^n + 2^{-n} \cdot p^n + \\ &\quad + x \cdot 2^{-n} \cdot p \cdot (1+p)^n) = \\ &= x \cdot (1-p)^n + x \cdot p^n + x^2 \cdot p \cdot (1+p)^n. \end{aligned}$$

Последняя величина меньше единицы по условию теоремы, и теорема доказана.

Заметим, что сейчас самые лучшие известные оценки при больших  $n$  имеют вид

$$c_1 \cdot \sqrt{\frac{n}{\ln n}} \cdot 2^n \leq m(n) \leq c_2 \cdot n^2 \cdot 2^n.$$

Таким образом, полученная нами верхняя оценка фактически лучшая из известных! А нижняя оценка отличается от самой лучшей лишь видом корня, что тоже уже близко к рекорду.

Пока нет даже правдоподобной гипотезы о том, как ведет себе на самом деле величина  $m(n)$ ! Возможно, читатель решит когда-нибудь эту проблему?

### Литература

1. *Н.Алон, Дж.Спенсер*. Вероятностный метод. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.
2. *А.М.Райгородский*. Вероятность и алгебра в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2015.
3. *Н.Я.Вилленкин*. Комбинаторика. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969.



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2570 предлагалась на IV Кавказской математической олимпиаде.

Автор задач Ф2577–Ф2580 – С.Варламов.

## Задачи M2570–M2573, Ф2577–Ф2580

**M2570.** Паша расставил числа от 1 до 100 в клетках квадрата  $10 \times 10$ , каждое по одному разу. После этого Дима рассмотрел всевозможные квадраты площади, большей 1, со сторонами, идущими по линиям сетки, и в каждом покрасил в зеленый цвет наибольшее число (при этом одно число могло быть покрашено несколько раз). Могло ли оказаться, что все двузначные числа покрашены в зеленый цвет?

*В.Брагин*

**M2571.** Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Пусть  $E$  и  $F$  – точки на сторонах  $AB$  и  $CD$  соответственно (рис. 1). Описанная окружность треугольника  $AEF$  вторично пересекает отрезок  $AD$  в точке

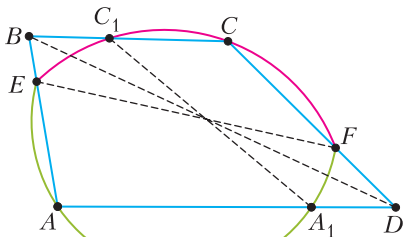


Рис. 1

$A_1$ , а описанная окружность треугольника  $CEF$  пересекает отрезок  $BC$  в точке  $C_1$ . Докажите, что прямые  $A_1C_1$ ,  $BD$  и  $EF$  пересекаются в одной точке.

*А.Кузнецов*

**M2572.** Пусть  $k$  – фиксированное натуральное число. Докажите, что все члены последовательности биномиальных коэффициентов  $C_2^1, C_4^2, C_8^4, \dots, C_{2^{n+1}}^{2^n}, \dots$ , начиная с некоторого члена, дают один и тот же остаток при делении на  $2^k$ .

*В.Расторгуев*

**M2573\***. Два муравья ползут по ребрам выпуклого многогранника. Маршрут каждого муравья заканчивается в той же вершине, что и начинается, при этом муравей не проходит ни одну точку дважды, пока не возвратится в начальную точку маршрута. На каждой грани  $F$  данного многогранника записывают количество ребер грани  $F$ , принадлежащих маршруту первого муравья, и количество ребер грани  $F$ , принадлежащих маршруту второго муравья. Существуют ли многогранник и пара определенных выше маршрутов такие, что ровно на одной грани два записанных числа различаются?

*Н.Белухов*

**Ф2577.** Плоская сетка с большим количеством ячеек в виде одинаковых ромбов сделана из жестких легких прямых длинных проволочек, скрепленных в узлах сетки шарнирами. Ребро каждой ячейки-ромба имеет длину  $a$ . Один узел-шарнир с координатами  $(0,0)$  удерживают неподвижным, а шарнир с координатами  $(n, m)$

начинают перемещать с постоянной скоростью вдоль параллельных проволочек ( $n$  и  $m$  – это целочисленные не равные нулю значения с единицей расстояния  $a$ ). В некий момент времени все ячейки сетки становятся квадратами. В этот момент скорость шарнира с координатами  $(n, m)$  имеет проекции на взаимно перпендикулярные проволочки  $v$  и  $u$ . С какой скоростью и с каким ускорением движется в этот момент шарнир с координатами  $(k, l)$ ?

**Ф2578.** Пористый материал имеет внутри себя множество пор – каналов-отверстий. Все эти каналы параллельны друг другу. Диаметр пор много меньше длины свободного пробега молекул. Таким материалом заполнены трубки тройника симметричной формы с непроницаемыми стенками. В центре тройника имеется свободное от пористого материала небольшое пространство, в которое выходит каждый канал одним из своих концов. Попадание молекулы в канал с какой-либо стороны означает, что у молекулы имеется определенная вероятность  $\alpha > 0,5$  вылететь из этого канала через то же отверстие, в которое она влетела, и вероятность  $(1 - \alpha)$  вылететь из другого отверстия этого канала. Эти вероятности не зависят от температуры. Тройник соединяет три одинаковых сосуда с разреженным гелием. Сначала гелий во всех трех сосудах имел одинаковую температуру  $T_0$  и одинаковое начальное давление  $p_0$ . Затем в одном из сосудов температуру оставили прежней, во втором подняли два раза, а в третьем подняли в три раза. Температура внутри тройника не изменилась. Какие давления установятся в этих сосудах и в свободном пространстве внутри тройника через большое время? Считайте, что суммарный объем всех каналов и свободного пространства внутри тройника мал в сравнении с объемом любого из сосудов.

**Ф2579.** В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке 2, резисторы имеют одинаковые сопротивления  $R$ , а конденсаторы – одинаковые емкости  $C$ . Батареи имеют ЭДС  $3\varepsilon$  слева вверху и  $\varepsilon$  справа внизу. В начальный момент кон-

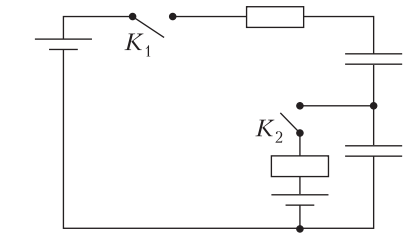


Рис. 2

денсаторы разряжены. В какой последовательности и с какой временной задержкой  $\tau$  нужно замкнуть ключи  $K_1$  и  $K_2$ , чтобы в электрической цепи выделилось как можно меньше тепла?

**Ф2580.** Неподвижная пластина из золота малой толщины ( $d \approx 1$  мкм), имеющая температуру  $T = 200$  К, подвергается облучению потоком нейтронов. Каждый нейтрон имеет кинетическую энергию  $E_0 = 0,8$  кэВ. Иногда из пластины выбиваются атомы золота. Оцените максимальную скорость, которую может иметь выбитый нейтроном из пластины атом золота. Известны термодинамические параметры золота: молярная масса  $M = 197$  г/моль; плотность (при н.у.)  $\rho = 19,3 - 19,32$  г/см<sup>3</sup>; температура плавления  $T_{пл} = 1337,33$  К; молярная теплота плавления  $L_{пл} = 12,68$  кДж/моль; температура кипения  $T_{кип} = 3129$  К; молярная теплота испарения  $L_{исп} = 340$  кДж/моль; температура Дебая 170 К. При температурах выше температуры Дебая молярная теплоемкость золота равна примерно  $C = 3R = 25$  Дж/(К · моль). Кристаллическая решетка золота – кубическая гранцентрированная типа Сu.

### Решения задачи М2558–М2561, Ф2565–Ф2568

**М2558.** На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться

того же, прыгая из начального положения только влево.

Рассмотрим кузнечика  $A$ , который в начальном положении находится левее всех других. Пусть тогда сначала все кузнечики, кроме  $A$ , перепрыгнут через  $A$ . Ясно, что теперь кузнечики находятся в положении, которое симметрично изначальному. Тогда они могут, используя ходы, симметричные тем, которые они бы делали при прыжках вправо, добиться требуемого.

С.Дориченко

**M2559.** К плоскости приклеены два непересекающихся а) равных; б) не обязательно равных деревянных круга – серый и черный (рис.1). Дан бесконечный

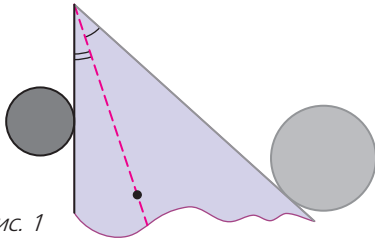


Рис. 1

деревянный угол, одна сторона которого серая, а другая – черная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи угла, причем серая сторона касалась серого круга, а черная – черного (касание происходит не в вершине). Докажите, что внутри угла можно нарисовать луч, выходящий из вершины, так, чтобы при всевозможных положениях угла этот луч проходил через одну и ту же точку плоскости.

а) Покажем, что искомый луч – это биссектриса угла  $BAC$  между серой и черной

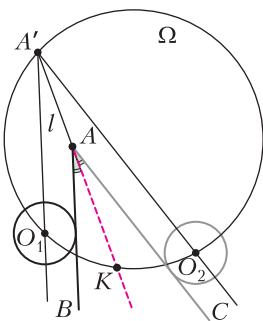


Рис. 2

сторонами деревянного угла. Точки этой биссектрисы равноудалены от сторон угла. Проведем через центры  $O_1$  и  $O_2$  серого и черного кругов прямые, параллельные сторонам угла (рис.2). Пусть они пересекаются в

точке  $A'$ . Поскольку угол  $O_1A'O_2$  равен углу  $BAC$  и, следовательно, постоянный, описанная окружность  $\Omega$  треугольника  $O_1A'O_2$  не зависит от положения деревянного угла. Прямая  $l$ , содержащая биссектрису угла  $O_1A'O_2$ , проходит тогда через фиксированную точку  $K$  – середину дуги  $O_1O_2$  (не содержащей  $A'$ ) окружности  $\Omega$ . Точки прямой  $l$  равноудалены от прямых  $O_1A'$  и  $O_2A'$ , а серая и черная стороны угла «отодвинуты» от прямых  $O_1A'$  и  $O_2A'$  на одно и то же расстояние, равное радиусу кругов, в сторону точки  $K$ . Следовательно, прямая  $l$  содержит и биссектрису угла деревянного треугольника.

б) В общей ситуации, когда радиусы  $r_1$  и  $r_2$  серой и черной окружностей не обязательно равны, искомый луч  $m$  – это геометрическое место лежащих внутри угла точек, для которых отношение расстояний до серой и черной сторон угла равно  $r_1/r_2$ . Обоснование вполне аналогично решению пункта а). Проведем внутри угла  $O_1A'O_2$  прямую  $l$ , для точек которой отношение расстояний  $h_1/h_2$  до прямых  $O_1A'$  и  $O_2A'$  равно  $r_1/r_2$ . Пусть прямая  $l$  проходит через точку  $K$  дуги  $O_1O_2$  (не содержащей  $A'$ ) окружности  $\Omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} O_1K/O_2K &= \\ &= (2R \sin \angle O_1A'K)/(2R \sin \angle O_2A'K) = \\ &= (A'K \sin \angle O_1A'K)/(A'K \sin \angle O_2A'K) = \\ &= h_1/h_2 = r_1/r_2. \end{aligned}$$

Итак, точка  $K$  определяется равенством  $O_1K/O_2K = r_1/r_2$  (нетрудно убедиться, что такая точка  $K$  на данной дуге единственна). Остается заметить, что серая и черная стороны угла «отодвинуты» от прямых  $O_1A'$  и  $O_2A'$  на расстояния  $r_1$  и  $r_2$ , поэтому расстояния от точек прямой  $l$  до серой и черной сторон угла пропорциональны  $r_1$  и  $r_2$ . Таким образом, прямая  $l$  содержит луч  $m$ .

В.Расторгуев, И.Богданов, Е.Бакаев, П.Кожевников

**M2560.** Перед Шариком лежит бесконечное число котлет, на каждой сидит по мухе. На каждом ходу Шарик последовательно делает две операции:

- 1) съедает какую-то котлету вместе со всеми сидящими на ней мухами;
- 2) пересаживает одну муху с одной котлеты на другую (на котлете может быть сколько угодно мух).

Шарик хочет съесть не более миллиона мух. Докажите, что он не может действовать так, чтобы каждая котлета была съедена на каком-то ходу.

Предположим противное: Шарик съел в каком-то порядке все котлеты и при этом съел не более миллиона мух. Приведем два возможных рассуждения, дающих решение задачи.

1. Заметим, что с какого-то момента Шарик будет есть только котлеты без мух. С этого момента число котлет без мух не может увеличиться после хода Шарика: если он и образовал какую-то новую котлету без мух (переложив с нее муху), то перед этим съел какую-то котлету без мухи. Тогда с какого-то момента число котлет без мух стабилизируется. После этого момента Шарик каждым ходом съедает котлету без мухи и перекладывает муху с котлеты, на которой ровно одна муха, на котлету, где уже есть мухи. Тем самым, появится котлета, на которой хотя бы две мухи, и эту котлету Шарик уже никогда не съест (с таких котлет он мух уже не снимает, а котлеты с мухами уже не ест). Противоречие. Задача решена.

2. Пронумеруем котлеты в том порядке, в каком Шарик будет их есть. За первые  $10^6$  ходов Шарик переложит некоторых мух на какие-то котлеты. Пусть  $n$  – наибольший среди номеров этих котлет. Рассмотрим первые  $n$  котлет. За первые  $10^6$  ходов суммарное количество мух на них не уменьшалось (не считая мух, которые Шарик съел). Значит, перед тем, как съесть  $n$ -ю котлету, Шарик успеет переложить на котлеты с большими номерами не более  $(n-1) \cdot 10^6$  мух. Следовательно, за первые  $n$  шагов он съест хотя бы  $10^6 + 1$  муху. Противоречие. Задача решена.

*И. Митрофанов*

**M2561\***. Решение этой задачи см. в статье К. Кохася «Составные лесенки».

**Ф2565.<sup>1</sup>** При исследовании автомобильных пробок инженерам-дорожникам приходится рассчитывать пропускные способности дорог – максимальное количество машин, которые могут проехать по тому или иному участку дороги – причем исходя из возможностей и предпочтений усредненного водителя. Пусть по прямому участку шоссе движется поток машин. Их скорости одинаковы и не меняются с течением времени. Дан график зависимости скорости  $v$  (в километрах в час), с которой едут машины в потоке, от числа машин  $n$ , проходящихся на 100 метров дороги (рис. 1). Какое максималь-

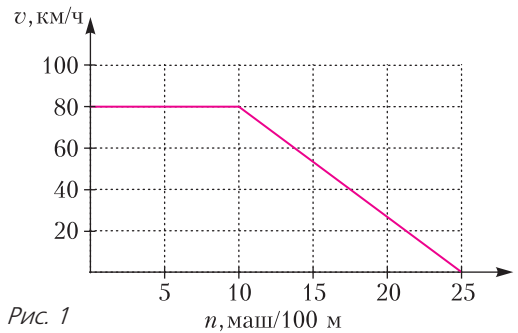


Рис. 1

ное количество машин может проехать за 1 час около некоторой отметки на дороге?

Если машин на дороге мало, то несмотря на большие скорости по дороге проезжает небольшое их количество. Если машин на дороге много, то они имеют малые скорости и количество проезжающих по дороге машин снова мало. Следовательно, при какой-то оптимальной концентрации машин на дороге ее пропускная способность будет максимальной. Найдем эту концентрацию. Пусть на 100 метров дороги приходится  $n$  машин. Подсчитаем, сколько машин проезжают какую-то точку на шоссе за интервал времени  $\Delta t$ . Так как все машины движутся с одинаковой скоростью  $v(n)$ , мимо рассматриваемой точки успеют проехать те машины, которые находятся на расстоянии не больше чем  $v\Delta t$  от этой точки. А их количество  $N$  можно найти из

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2565–Ф2568 – С. Муравьев.

данного графика (см. рис.1):

$$N = 10v(n)n\Delta t,$$

где  $n$  – число машин, проходящихся на 100 метров дороги, скорость задана в километрах в час, время – в часах. Таким образом, чтобы найти максимальное количество машин, которые могут проехать мимо какой-то точки на дороге, нужно найти максимум выражения  $v(n)n$  как функции числа машин  $n$ , проходящихся на 100 метров дороги. Дифференцируя эту функцию и приравнявая производную к нулю, получим

$$(v(n)n)' = v'(n)n + v(n) = 0.$$

Значит, максимум произведения  $v(n)n$  достигается в такой точке графика, в которой

$$v'(n) = -\frac{v(n)}{n},$$

или, другими словами, в которой угол наклона касательной к графику  $v(n)$  равен по модулю и противоположен по знаку углу наклона прямой, проведенной в эту точку из начала координат, т.е. при таком значении  $n_0$ , при котором треугольник  $OAB$  – равнобедренный (рис.2). Это зна-

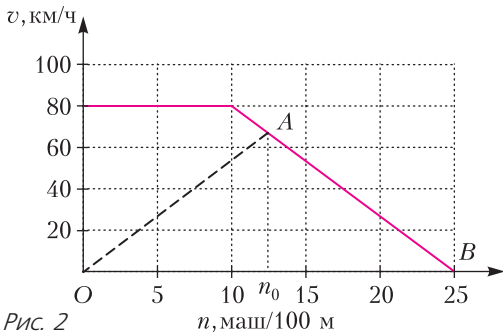


Рис. 2

чит, что  $n_0$  делит интервал  $OB$  пополам, или что

$$n_0 = 12,5.$$

Определив по графику значение  $v(n_0) = 66,7$  км/ч, находим максимальное количество машин, которое может проехать за 1 час мимо какой-то точки дороги:

$$N_{\max} = 8337,5 \approx 8338 \text{ машин}.$$

**Ф2566.** В вертикальную плоскую стену вбиты два гладких гвоздя, перпендику-

лярных стене. На них повесили круглый обруч с равномерным распределением массы по ободу, и он с места не сдвинулся.

Положение одного гвоздя известно – оно показано на рисунке 1. Прямой отрезок с концами в центре обруча и в этом гвозде образует с вертикалью угол  $\varphi < \pi/2$ . Где может находиться второй гвоздь?

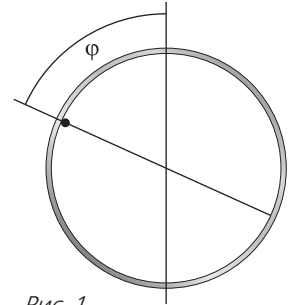


Рис. 1

На обруч действуют всего три силы: его сила тяжести и две силы реакции со стороны двух гладких гвоздей. Следовательно, линии действия этих трех сил пересекаются в одной точке – в центре обруча. Поскольку сумма этих трех сил должна быть равной нулю, то это означает, что со стороны второго гвоздя на обруч действует сила, которая имеет горизонтальную составляющую, компенсирующую горизонтальную составляющую силы, действующей на обруч со стороны первого гвоздя. Это возможно только для таких мест расположения второго гвоздя, когда эта горизонтальная составляющая направлена вправо (условие 1) и сумма вертикальных составляющих сил, действующих на обруч со стороны гвоздей, направлена вверх (условие 2), чтобы скомпенсировать силу тяжести.

Если второй гвоздь находится «внутри» обруча, то оба условия можно выполнить, только если второй гвоздь расположен а) правее центра масс обруча и б) выше точки обруча, находящейся на противоположном конце диаметра обруча  $D$ , содержащего первый гвоздь. Условие б) связано с тем, что две силы реакции со стороны гвоздей должны компенсировать составляющую силы тяжести, перпендикулярную диаметру  $D$ . Красной линией на рисунке 2 отмечены соответствующие точки внутри обруча.

Если же второй гвоздь находится вне обруча, то оба условия 1 и 2 можно удовлетво-

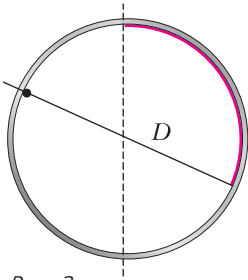


Рис. 2

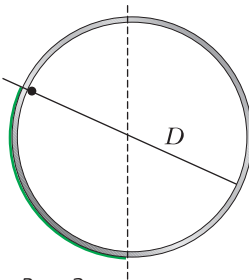


Рис. 3

речь, только если второй гвоздь расположен левее центра масс обруча и ниже первого гвоздя. Такие точки отмечены на рисунке 3 линией зеленого цвета.

Заметим, что красная и зеленая линии расположены симметрично относительно центра обруча.

**Ф2567.** В секретной лаборатории синтезировали необычный материал. Его удельная теплоемкость  $c$  зависит от температуры  $t$  по шкале Цельсия по закону  $c(t) = c_0(1 + \gamma t)$ , где  $c_0 = 2,1 \cdot 10^3$  Дж/(кг·град) и  $\gamma = 0,05$  град $^{-1}$  – известные постоянные. Образец данного материала массой  $m = 0,5$  кг и начальной температурой  $0$  °С бросают в воду массой  $2m$  и температурой  $t_1 = 45$  °С. Какая установится температура? Удельная теплоемкость воды  $c_{\text{в}} = 2c_0 = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·град). Потерями тепла можно пренебречь.

Пусть установившаяся температура равна  $t_x$ . Тогда вода отдает количество теплоты

$$Q_{\text{отд}} = 2mc_{\text{в}}(t_1 - t_x) = 4mc_0(t_1 - t_x).$$

Поскольку потерь тепла нет, это количество теплоты получит наш необычный материал с переменной теплоемкостью. Чтобы рассчитать, к какому изменению температуры приведет это тепло, разделим температурный интервал  $t_x - t_0$  на малые интервалы  $\Delta t_i$ , внутри каждого из которых теплоемкость секретного материала можно считать постоянной. Тогда количество теплоты, полученное секретным материалом, есть сумма количеств теплоты, полученных на каждом малом интервале, а последние могут быть найдены по стандартной формуле. Поэтому имеем

$$Q_{\text{пол}} = \sum_i mc(t_i)\Delta t_i = mc_0 \left( \sum_i \Delta t_i + \gamma \sum_i t_i \Delta t_i \right).$$

Первая сумма в скобках равна полному изменению температуры  $t_x - t_0 = t_x$  (все температуры заданы в градусах Цельсия). Вторая сумма в скобках аналогична сумме, которую приходится вычислять при определении работы силы упругости и которая находится графически. Применяя здесь аналогичные соображения, находим

$$\sum_i t_i \Delta t_i = \frac{1}{2} t_x^2.$$

Приравнявая отданное и полученное количества теплоты, получаем уравнение для искомой температуры  $t_x$ :

$$\gamma t_x^2 + 10t_x - 8t_1 = 0,$$

откуда находим

$$t_x = \frac{-10 + \sqrt{100 + 32\gamma t_1}}{2\gamma} = 31,2 \text{ °С}.$$

**Ф2568.** Имеется плоская металлическая пластинка. Если пластинку расположить перпендикулярно солнечным лучам, то ее освещенная сторона будет иметь температуру  $t_1 = 50$  °С, а противоположная сторона – температуру  $t_2 = 30$  °С. Какими будут температуры освещенной и теневой сторон, если взять пластинку удвоенной толщины? Считайте, что пластинка очень тонкая и отдает энергию окружающей среде благодаря теплопроводности. Температура окружающей среды  $t_0 = 25$  °С.

*Указание.* В установившемся режиме поток тепла между телами пропорционален разности их температур и площади контакта и обратно пропорционален расстоянию между ними (закон теплопроводности Фурье).

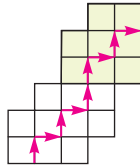
Пусть пластинка в единицу времени получает от потока солнечных лучей энергию  $Q$ . В установившемся режиме вся эта энергия должна быть отдана окружающей среде. Вблизи пластинки установится некоторое распределение температур воздуха: около самой пластинки воздух будет иметь температуру, равную температуре пластинки, вдали – температуру окружающей среды. Поэтому потоки тепла от освещенной и теневой сторон пластинки в окружающую среду будут пропорциональны раз-



правлением первого звена второй змейки (рис.2), т.е.  $A_k = B_0$  и  $\overline{A_{k-1}A_k} = \overline{B_0B_1}$ .



2-змейка и 3-змейка  
Рис. 2



Объединение 5-лесенки и 4-лесенки  
Рис. 3

Если несколько змеек нарисованы последовательно, то соответствующие лесенки не имеют общих клеток. Мы объединим их в одну клетчатую фигуру, которую будем называть *составной лесенкой* (рис.3).

Пусть дан набор натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Обозначим через  $S$  составную лесенку, являющуюся объединением  $a_1$ -лесенки,  $a_2$ -лесенки, ...,  $a_n$ -лесенки. Обозначим через  $D$  количество разбиений фигуры  $S$  на доминошки, т.е. на прямоугольнички  $1 \times 2$ . Если говорить более точно, вместо  $S$  стоило бы использовать обозначение  $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , а вместо  $D$  – обозначение  $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**Вопрос.** Чему равно  $D$ ?

Прежде чем продолжать, отметим, что этот с виду «совершенно ясный» вопрос сформулирован совершенно непонятно. Действительно, а что мы хотим услышать в ответ на этот вопрос? Число  $D$  полностью определяется  $n$  параметрами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Вряд ли в качестве ответа мы хотели бы получить текст программы, которая позволяет вычислять  $D$ , скорее, нам хотелось бы получить «простую формулу», которая задаст зависимость  $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Но в каком смысле простую? Функция  $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$  на самом деле является многочленом степени  $n$  от  $n$  переменных! Много ли читателю известно «интересных» многочленов от  $n$  переменных с «несложной формулой»?

После этих замечаний вопрос уже не покажется очень простым. Недавно Ильке

Чанакчи и Ральф Шиффлер опубликовали (I.Canakci, R.Schiffler. Cluster algebras and continued fractions// Compositio Mathematica, v.154, is. 3, March 2018, p. 565) замечательную теорему, которая дает на него в некотором смысле ответ – совершенно непонятный, зато удивительно красивый.

Но сначала – отгадка.

**Отгадка.**  $k$ -лесенку можно разрезать на доминошки ровно  $k$  способами.

Действительно, пусть  $A$  – верхняя правая клетка лесенки. Если положить доминошку на клетку  $A$  так, чтобы она пересекала змейку, то оставшуюся фигуру можно разрезать на доминошки лишь одним

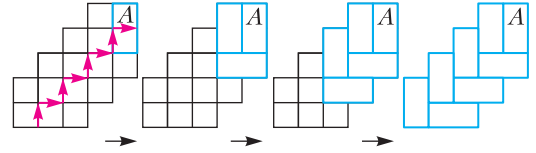


Рис. 4

способом (рис.4).

Если же вырезать доминошку с клеткой  $A$  так, чтобы она не пересекала змейку, у нас останется  $(k - 1)$ -лесенка (рис.5).

Значит, общее рассуждение нужно оформлять по индукции. База индукции очевидна для лесенки, а индукционный переход мы фактически только что проверили: первый вариант расположения доминошки на клетке  $A$  дает один способ, а второй вариант приводит к предположению индукции и дает еще  $k - 1$  способов.

Отвлечемся немного. Напомним, что цепной (или непрерывной) дробью называется выражение вида

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}. \quad (1)$$

Такие выражения не слишком удобны при выполнении арифметических операций с рациональными числами, разве что рассматривать их как задачи с вопросом «упростить выражение» для школьного учеб-

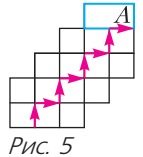


Рис. 5



ника. Например,

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{\frac{71}{16}} = 3 + \frac{16}{71} = \frac{355}{71}. \quad (2)$$

Предлагаем читателю проверить, рассматривая этот пример, что ни на каком шаге «упрощения» цепной дроби не появляются сократимые дроби.

Запишем цепную дробь, заданную формулой (1), в виде (автоматически несократимой) рациональной дроби  $P/Q$ :

$$\frac{P}{Q} = \frac{P(a_1, a_2, \dots, a_n)}{Q(a_1, a_2, \dots, a_n)} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}. \quad (3)$$

**Теорема.** *Количество разбиений на домино составной лесенки  $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$  равно числителю цепной дроби (3), т.е.  $D(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .*

Знаменатель цепной дроби тоже имеет простое истолкование с помощью доминошек. Из арифметических соображений ясно, что знаменатель цепной дроби (3) равен числителю цепной дроби

$$a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}$$

(посмотрите, как в примере (2) появился знаменатель 113). Кстати, то, что знаменатель цепной дроби не зависит от  $a_1$ , очевидно. Значит, если верить в утверждение теоремы,

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = P(a_2, \dots, a_n) = D(a_2, \dots, a_n). \quad (4)$$

**Доказательство теоремы** состоит в индукционном рассуждении, столь же простым, как и в загадке выше. В этот раз индукция будет по  $n$ , т.е. по числу лесенок, из которых построена составная лесенка.

База индукции  $n = 1$  – это в точности утверждение загадки.

Докажем индукционный переход. Если

мы уже установили справедливость утверждения теоремы для любой составной лесенки, построенной из  $n - 1$  частей, то формула (4) верна по индукционному предположению. Рассмотрим место стыка  $a_1$ -лесенки и составной лесенки  $S(a_2, \dots, a_n)$ , верхнюю правую клетку  $a_1$ -лесенки обозначим через  $A$  (рис.6).

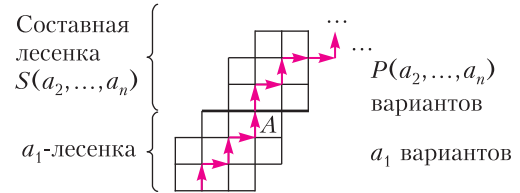


Рис. 6

Если доминошка, содержащая клетку  $A$ , не пересекает стык, дальнейшее разбиение  $a_1$ -лесенки и составной лесенки  $S(a_2, \dots, a_n)$  на домино можно строить независимо. И различные разбиения на домино всей фигуры получаются, если любое из  $a_1$  разбиений  $a_1$ -лесенки дополнить любым из  $P(a_2, \dots, a_n)$  разбиений составной лесенки  $S(a_2, \dots, a_n)$ . Итого, имеется  $a_1 P(a_2, \dots, a_n)$  вариантов разбиения на домино.

Если же доминошка, содержащая клетку  $A$ , пересекает стык, то в пределах  $a_1$ -лесенки остается нечетное число незанятых клеток, поэтому рядом с рассматриваемой доминошкой должна находиться еще одна доминошка, пересекающая стык! Таким образом, и в  $a_1$ -лесенке, и в соседней  $a_2$ -лесенке обе клетки, прилегающие к стыку, уже заняты. Но тогда, как мы видели в загадке, незанятая часть  $a_1$ -лесенки и незанятая часть  $a_2$ -лесенки заполняются доминошками однозначно! Различные варианты могут появиться только при замощении составной лесенки  $S(a_3, \dots, a_n)$ ; по предположению индукции их число равно  $P(a_3, \dots, a_n)$  или, что то же самое,  $Q(a_2, \dots, a_n)$  (рис.7).

Итак, мы получили формулу

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 P(a_2, \dots, a_n) + Q(a_2, \dots, a_n).$$

(Продолжение см. на с. 34)

# Упаковки и покрытия

В задачах об упаковке требуется найти минимальную фигуру заданной формы, в которую можно уложить  $n$  непересекающихся простейших фигур.

В задачах о покрытии требуется найти максимальную фигуру заданной формы, которую могут покрыть  $n$  простейших фигур.

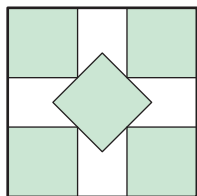
Раздел математики, который занимается решением подобных задач, называется комбинаторной геометрией. Методы их решения не просты. Полное решение известно в основном для небольшого числа частных случаев. Нередко такие задачи имеют практическое приложение.

На странице математика и популяризатора науки Эрика Фридмана (Erich Friedman) <http://www2.stetson.edu/~efriedma/packing.html> собрано много известных результатов. На их основе можно изготовить головоломки, фигурки которых несложно вырезать из картона.

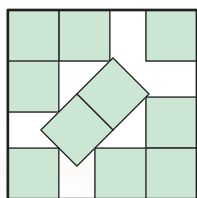
Приведем несколько иллюстраций. Около каждой иллюстрации указано, в каком году найдено решение или доказан соответствующий результат об оптимальности.

## Упаковки

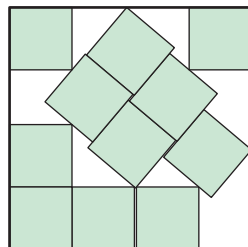
5 квадратов в квадрат со стороной  $a = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 2,707$  (доказано в 1979)



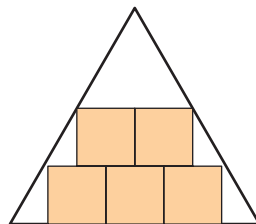
10 квадратов в квадрат со стороной  $a = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 3,707$  (доказано в 2003)



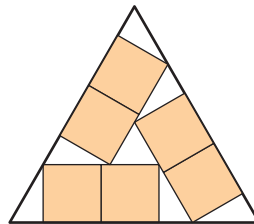
11 квадратов в квадрат со стороной  $a \approx 3,877$  (найдено в 1979)



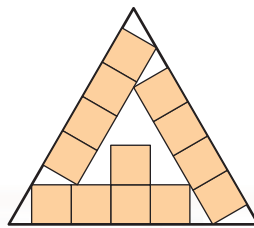
5 квадратов в правильный треугольник со стороной  $a = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 4,309$  (найдено в 1997)



6 квадратов в правильный треугольник со стороной  $a = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 4,309$  (найдено в 1997)



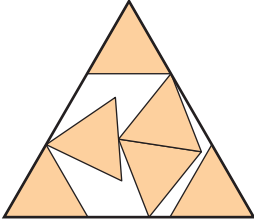
13 квадратов в правильный треугольник со стороной  $a = 4 + \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 6,309$  (найдено в 1997)



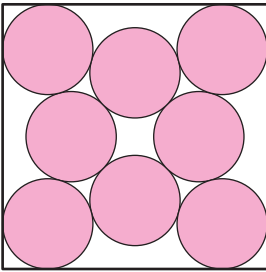
$$a = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$



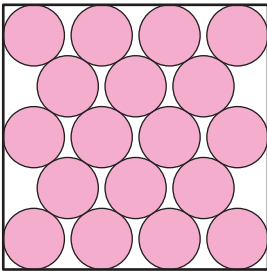
6 треугольников в правильный треуголь-  
ник со стороной  $a = \frac{13+3\sqrt{13}}{8} \approx 2,977$   
(найдено в 1997)



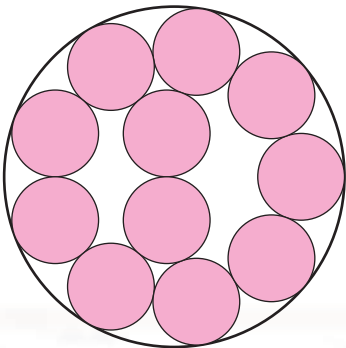
8 кругов в квадрат со стороной  
 $a = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6} \approx 5,863$  (доказано в 1964)



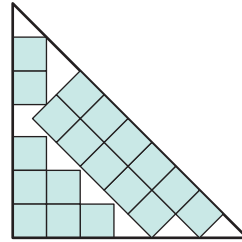
18 кругов в квадрат со стороной  
 $a = 2 + \frac{24}{\sqrt{13}} \approx 8,656$  (доказано в 1991)



11 кругов в круг радиуса  $r \approx 3,923$  (до-  
казано в 1991)

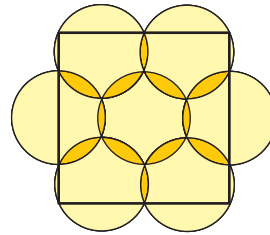


19 квадратов в равнобедренный прямоу-  
гольный треугольник со стороной  
 $a = 2 + \frac{7}{\sqrt{2}} \approx 6,95$  (найдено в 2005)

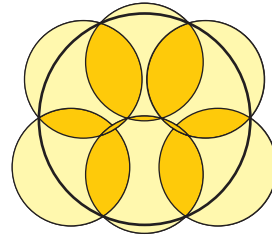


**Покрывия**

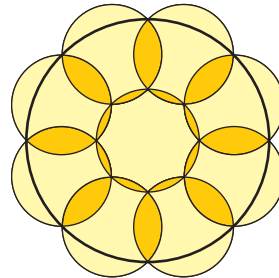
7 кругов покрывают квадрат со стороной  
 $r = 1 + \sqrt{7} \approx 3,646$  (доказано в 1997)



6 кругов покрывают круг радиуса  
 $r \approx 1,798$  (доказано в 1979)



9 кругов покрывают круг радиуса  
 $r = \sqrt{2} + 1 \approx 2,414$  (доказано в 1996)



Материал подготовил Н.Панюнин

$$a = 2 + \frac{9}{\sqrt{3}} \approx 4,309$$

(Начало см. на с. 29)

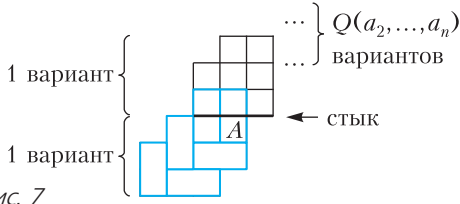


Рис. 7

Что же касается цепных дробей, для них это рекуррентное соотношение очевидно:

$$\begin{aligned} \frac{P(a_1, a_2, \dots, a_n)}{Q(a_1, a_2, \dots, a_n)} &= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} = \\ &= a_1 + \frac{1}{\frac{P(a_2, \dots, a_n)}{Q(a_2, \dots, a_n)}} = a_1 + \frac{Q(a_2, \dots, a_n)}{P(a_2, \dots, a_n)} = \\ &= \frac{a_1 P(a_2, \dots, a_n) + Q(a_2, \dots, a_n)}{P(a_2, \dots, a_n)}. \end{aligned}$$

Иначе говоря,

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 P(a_2, \dots, a_n) + Q(a_2, \dots, a_n). \quad (5)$$

Таким образом, величины  $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  совпадают, поскольку задаются одинаковыми рекуррентными соотношениями. Теорема доказана.

Итак, мы нашли ответ на вопрос, чему равно  $D$ , настолько же изящный, насколько далекий от явного вида. Это скорее программа для вычисления  $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , а не явная формула.

Теперь мы получили из этой теоремы следствие, которое хорошо известно тем, кто работал с цепными дробями, но совершенно неожиданно для неопитов.

**Следствие.** Числители цепных дробей

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} \text{ и } a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_1}}}$$

падают.

В завершение, как обещано, приведем решение задачи из «Задачника «Кванта».

**Задача М2561\*.** Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с нача-

лом в точке  $(0;0)$  и вершинами в целых точках, что каждое очередное звено идет по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует червяк – фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно  $N > 2$  различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших  $N$  и взаимно простых с  $N$ .

Заметим, что червяк из условия задачи – это в точности наша составная лесенка  $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , в которой  $n \geq 3$  и  $a_1 = a_n = 1$ . Достаточно доказать **утверждение:** количество составных лесенок  $S(1, a_2, \dots, 1)$ , для которых  $D = N$ , равно количеству несократимых дробей вида  $\frac{N}{q}$ , где  $q > N/2$ , т.е. количеству  $\psi(N)$  натуральных чисел, больших  $N/2$  и взаимно простых с  $N$ . Количество червяков из условия задачи на самом деле вдвое больше, так как соответствующая ломаная может начинаться из точки  $(0;0)$  звеном вверх или вправо. А количество  $\varphi(N)$  натуральных чисел, меньших  $N$  и взаимно простых с  $N$ , вдвое больше, чем  $\psi(N)$ , поскольку числа, взаимно простые с  $N$ , разбиваются на пары вида  $x \leftrightarrow N - x$ .

Чтобы доказать утверждение, заметим следующее. Для каждого набора натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  числитель  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и знаменатель  $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$  цепной дроби (3) взаимно просты. Мы отмечали этот эффект в вычислении (2), а доказать его можно индукцией по  $n$ , пользуясь равенствами (4) и (5). Кроме того, при  $n \geq 3$  и  $a_1 = a_n = 1$  значение цепной дроби (3) находится между 1 и 2, т.е. для интересующих нас дробей (тех, для которых  $D = N$ ) значение (3) равно несократимой дроби вида  $\frac{N}{q}$ , где  $q > N/2$ . Наконец, каждая такая дробь раскладывается единственным образом в цепную дробь (3), для которой  $n \geq 3$  и  $a_1 = a_n = 1$ .

## Задачи

1. Имеется бумажный прямоугольник, длина которого в 2 раза больше ширины. Разрежьте его на четыре части и сложите из них прямоугольник, длина которого в 4 раза больше ширины.

*Фольклор*



2. На шахматной доске стоят шесть ладей и несколько слонов. Никакая фигура не бьет другую. Каково наибольшее количество фигур на доске?

*А.Шаповалов*



3. Есть несколько различных двузначных чисел. Половина всех цифр в этих числах — 2, в половине из этих чисел есть цифра 3, в трети из этих чисел есть цифра 5. Сколько всего чисел?

*Т.Кутузова*

Эти задачи предлагались на XXV Турнире математических боев имени А.П.Савина.



4. На острове живут по шесть рыцарей, лжецов и монахов, причем все жители выглядят одинаково. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Если монаху задать вопрос, он находит в «Книге готовых ответов на все вопросы» точно такой же вопрос и отвечает так, как написано в ответе. Один островитянин забыл, кто есть кто, включая его самого. Задавая вопросы, требующие ответа «да» или «нет», он хочет выяснить, кто он: рыцарь, лжец или монах. Как ему это сделать: а) за 15 вопросов; б) за 14 вопросов?

*М.Хачатурян*



# Кювета с водой в поезде

С.ДВОРЯНИНОВ

ПРЕДСТАВИМ СЕБЕ ТАКУЮ СИТУАЦИЮ. На столике поезда, который движется прямолинейно и равномерно со скоростью  $v$ , находятся две одинаковые кюветы  $A$  и  $B$  с водой, имеющие форму параллелепипеда размером  $a \times b \times c$ ,  $a > b$

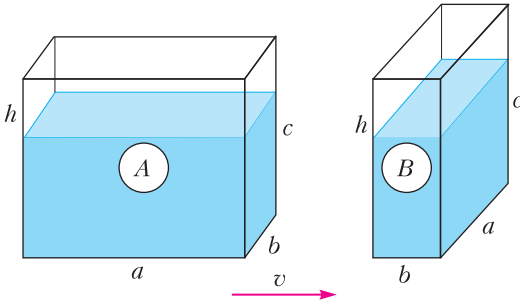


Рис. 1

(рис.1). В обеих кюветах поверхность воды горизонтальна, уровень воды отстоит от верхнего края кюветы на  $h$ , ребра основания кювет параллельны рельсам.

Рассмотрим два случая.

1) Поезд начал тормозить, и из одной кюветы вода выплеснулась на столик. Из какой? Кюветы остались неподвижными относительно стола.

2) Поезд начал раскачиваться из стороны в сторону, и из одной кюветы вода выплеснулась на столик. Из какой?

В первом случае внимательный пассажир поезда заметил, что при торможении поверхность воды остается плоской, но теперь она не горизонтальна. Если вода поднимется с одной стороны до верхнего края кюветы, то она окажется внутри прямой призмы, основанием которой является прямоугольная трапеция, показанная на рисунке 2. Основания трапеции в обеих кюветах имеют длину  $c$  и  $c - 2h$ . Изменение положения центра масс воды в каждой кювете определяется положением центра масс заштрихованного треугольника. Ясно, что их центры масс ле-

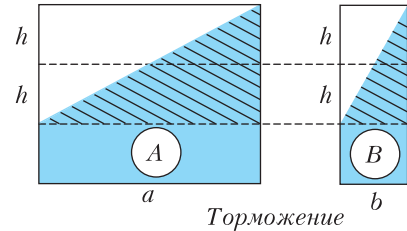


Рис. 2

жат на одной высоте, а именно на  $\frac{2}{3} \cdot 2h$  ниже верхнего края кюветы. Но масса треугольника для кюветы  $A$  больше массы треугольника для кюветы  $B$ . Поэтому вода достигнет верхнего края кюветы  $A$  при большем внешнем воздействии, чем вода в кювете  $B$ . Следовательно, сначала вода выплеснется из кюветы  $B$ .

Из сказанного выше следует, что во втором случае внешнее воздействие в первую очередь коснется короткой стороны основания кюветы. Значит, при раскачивании вагона из стороны в сторону вода сначала выплеснется из кюветы  $A$ .

Заметим, что для наглядного подтверждения поведения воды в кюветах в первом случае, т.е. при торможении поезда, легко провести простой эксперимент. Две одинаковые кюветы с водой закрепите соответствующим образом (как показано на рисунке 1) на неподвижном основании. Затем начните перемещать основание с ускорением и посмотрите, из какой кюветы вода выльется в первую очередь. Желаем успехов!

# XXV Турнир математических боев имени А.П.Савина

## Избранные задачи

1. (7–8)<sup>1</sup> Докажите, что для любого натурального  $n$  между числами  $n$  и  $3n$  найдется число, которое невозможно представить в виде суммы двух слагаемых с одинаковыми суммами цифр.

*А.Шаповалов*

2. (5–8) В каждой клетке прямоугольной таблицы стоит рыцарь или лжец. Каждый из них заявил, что в одной строке с ним находится больше рыцарей, чем в одном столбце. Докажите, что количество рыцарей делится на количество столбцов таблицы.

*А.Грибалко*

3. (8) Все степени двойки от 1 до  $2^{100}$  выписаны последовательно без пробелов: 12481632...6. Докажите, что полученное число не является степенью двойки.

*С.Токарев*

4. (7) В круговом турнире участвуют  $2n$  команд, среди которых ровно половина «топовых». Организаторы хотят составить расписание так, чтобы в каждом туре было не более одного матча между «топовыми» командами. При каком наибольшем значении  $n$  это возможно?

*А.Блинков*

5. (7–8) Известно, что число  $a$  представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, разность которых больше 1. Докажите, что число  $(a+1)^2$  представимо в виде суммы квадратов пяти попарно различных натуральных чисел.

*А.Грибалко*

6. (8) В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AP$  и  $BQ$ ,  $M$  – середина  $AB$ ,  $N$  – середина  $PQ$ . Прямая  $CN$  пересекает  $AB$  в

точке  $D$ , а прямая  $CM$  пересекает  $PQ$  в точке  $E$ . Докажите, что  $DE$  – перпендикуляр к  $AB$ .

*М.Волчкевич*

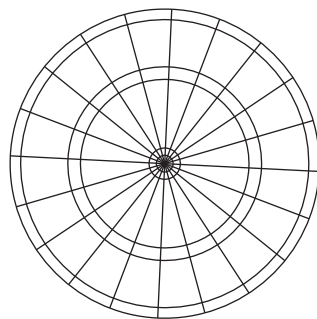
7. (6) Петя ставит на шахматную доску коня. Вася доски не видит. Своим ходом он обстреливает любые три клетки доски. Если на одной из этих клеток стоит конь, Вася выиграл, иначе Петя делает ход конем. Вася опять обстреливает три клетки и так далее. Может ли Вася наверняка выиграть не более чем за 1000 ходов?

*А.Шаповалов*

8. (6–8) Числа  $1, 2, 3, \dots, N$  записали по кругу в каком-то порядке. За одну операцию между каждыми двумя соседними числами записывают их полусумму, а исходные числа стирают. При каких  $N$  после нескольких таких операций снова могли получиться  $N$  целых чисел?

*С.Токарев*

9. (6–8) Мишень для игры в дартс поделена на 20 секторов (см. рисунок). В каждом секторе записано число от 1 до 20,



причем каждое число использовано один раз. Назовем мишень правильной, если любые два соседних сектора не имеют общего делителя, большего 1. Докажите, что количество различных правильных мишеней кратно 20. (Если одну мишень можно повернуть так, что получится дру-

<sup>1</sup> В скобках после номера задачи указаны классы, в которых она предлагалась.

гая, то такие мишени считаются одинаковыми.)

*Н.Наконечный*

**10.** (8) Докажите, что для любого натурального  $n > 3$  существует выпуклый равносторонний  $n$ -угольник, который можно разрезать непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники.

*А.Грибалко*

**11.** (7–8) Двое по очереди закрашивают клетки доски размером  $99 \times 99$ . Первый игрок закрашивает по две клетки, причем одна из них должна быть на две строчки выше и на два столбца правее другой. Второй игрок закрашивает по три клетки, образующие уголок. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков

может обеспечить себе победу, как бы ни играл соперник?

*Е.Бакаев*

**12.** (7–8) При каких  $N$  из чисел  $0, 1, 2, 3, \dots, N$  можно одно выкинуть, а остальные расставить по кругу так, чтобы все разности между соседними числами были различными? (Из большего числа вычитается меньшее.)

*А.Хачатурян*

**13.** (8) Можно ли равносторонний треугольник со стороной 3 разрезать на шесть выпуклых многоугольников, которыми удастся полностью покрыть какую-нибудь окружность радиуса более 2?

*А.Грибалко*

*Публикацию подготовил А.Блинков*

## НАМ ПИШУТ

### Связь разбиения треугольника с формулой квадрата суммы и ее обобщение

Через точку, лежащую внутри произвольного треугольника, проведем три прямые, параллельные сторонам (рис.1). При этом треугольник разобьется на три треугольника, подобных

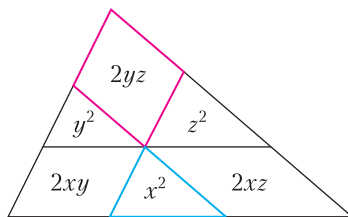


Рис. 1

исходному, и три параллелограмма. Обозначим площади «маленьких» треугольников через  $x^2$ ,  $y^2$  и  $z^2$ . Выразим площадь исходного треугольника через  $x$ ,  $y$  и  $z$  двумя способами. С одной стороны, коэффициент подобия исходного треугольника, например, синему треугольнику равен  $(x + y + z)/x$  (это следует из того, что соответствующие стороны маленьких треугольников в сумме составляют сторону большого). Поэтому площадь исходного треугольника равна  $(x + y + z)^2$ . С другой сторо-

ны, площадь исходного треугольника можно найти, просуммировав площади трех треугольников и трех параллелограммов, на которые он разрезан. Площади параллелограммов несложно выразить через площади примыкающих к ним треугольников. Например, площадь красного параллелограмма равна  $2yz$ , т.е. удвоенному среднему геометрическому площадей примыкающих треугольников (докажите это!). Приравняв площади исходного треугольника, найденные первым и вторым способами, получим геометрическую иллюстрацию формулы квадрата суммы трех слагаемых:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

А что будет, если рассмотреть аналогичную конструкцию в пространстве и записать формулу «суммы объемов»? Если через точку внутри тетраэдра провести четыре плоскости, параллельные граням, тетраэдр разобьется на 14 частей (уже сам этот факт не слишком очевиден), 4 из которых – «маленькие» тетраэдры, примыкающие к граням большого тетраэдра и подобные исходному тетраэдру. Еще 4 части – параллелепипеды, примыкающие к вершинам большого тетраэдра. Несколькo сложнее увидеть оставшиеся 6 частей – шестигранники, примыкающие к ребрам исходного тетраэдра.



На рисунке 2 один из таких шестигранников выделен красным цветом (синим цветом выделен один из тетраэдров, примыкающих к граням). Обозначая объемы маленьких тетраэдр-

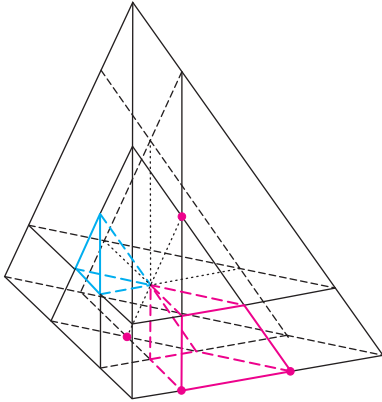


Рис. 2

ров через  $x^3$ ,  $y^3$ ,  $z^3$ ,  $t^3$  и рассуждая аналогично плоскому случаю, можно вычислить объем большого тетраэдра. Этот объем равен  $(x + y + z + t)^3$ . Далее, зная объемы двух маленьких тетраэдров  $x^3$  и  $y^3$ , можно найти объем шестигранника «между ними». Для этого достаточно заметить, что каждый из таких шестигранников можно получить из «среднего» тетраэдра, отрезав от него два маленьких тетраэдра (рис.3). Для красного шестигранни-

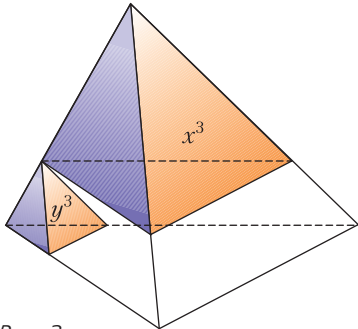


Рис. 3

ка на рисунке 2 вершины соответствующего среднего тетраэдра отмечены жирными красными точками. Если объемы маленьких тетраэдров, примыкающих к красному шестиграннику, равны  $x^3$  и  $y^3$ , то его объем равен

$$(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y).$$

Объемы же угловых параллелепипедов равны  $6xyz$  и т.д. Просуммировав по всем многогранникам разбиения, получим формулу

объемов:

$$\begin{aligned} (x + y + z + t)^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + t^3 + \\ &+ 3xy(x + y) + 3xz(x + z) + 3xt(x + t) + \\ &+ 3yz(y + z) + 3yt(y + t) + 3zt(z + t) + \\ &+ 6xyz + 6xyt + 6xzt + 6yzt. \end{aligned}$$

Здесь первая группа слагаемых ( $x^3$ ,  $y^3$ ,  $z^3$ ,  $t^3$  – симметричных относительно одной переменной) – объемы частей разбиения, каждая из которых примыкает к одной грани исходного тетраэдра, вторая группа слагаемых ( $3xy(x + y)$  и т.д. – симметричных относительно пары переменных) – объемы частей разбиения, каждая из которых примыкает к двум граням исходного тетраэдра, и, наконец, третья группа слагаемых ( $6xyz$  и т.д. – симметричных относительно тройки переменных) – объемы частей разбиения, каждая из которых примыкает к трем граням исходного тетраэдра.

Отметим, что простейший случай разбиения отрезка точкой на два отрезка с длинами  $x$  и  $y$  тоже укладывается в нашу формулу, которая в этом случае будет выглядеть тривиально:  $(x + y)^1 = x + y$ .

Гораздо интереснее тот факт, что наша конструкция может быть обобщена на произвольные конечные размерности – формула для  $n$ -й степени  $n + 1$  слагаемых может быть интерпретирована через  $n$ -мерные объемы частей симплекса (многомерного аналога треугольника и тетраэдра). Пусть через точку внутри  $n$ -мерного симплекса проведено  $n + 1$  гиперплоскостей (гиперплоскостью называется плоскость, размерность которой на 1 меньше размерности рассматриваемого пространства), параллельных гиперграням данного симплекса. Тогда выражение  $(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1})^n$  можно представить в виде  $2^n - 2$  слагаемых, разбитых на  $n$  групп. Причем  $k$ -я группа будет содержать  $\binom{n+1}{k}$  слагаемых, каждое из которых (симметричное относительно  $k$  переменных) будет отвечать за  $n$ -мерный объем одного из  $n$ -мерных многогранников разбиения, примыкающих в точности к  $k$  гиперграням симплекса.

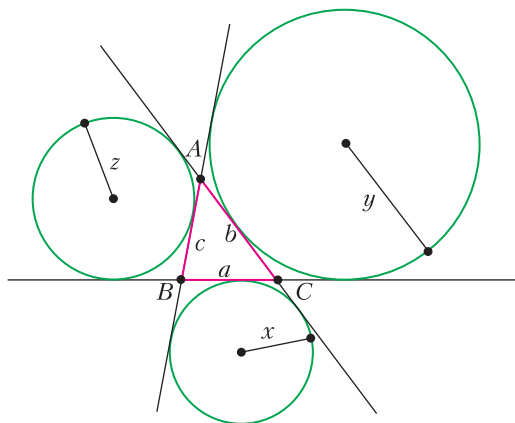
*В.Леуко*

# Треугольник и классические неравенства

В. ДРОЗДОВ

## Вычисление сторон треугольника

Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух его других сторон, называется вневписанной. Пусть в треугольнике  $ABC$  длины сторон соответственно равны:  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Чтобы избежать индексов, обозначим через  $x$ ,  $y$ ,  $z$  радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон  $a$ ,  $b$ ,  $c$  соответственно (см. рисунок).



Поскольку в школьном курсе математики повышенного уровня формулы для этих радиусов выводятся, то приведем сразу готовые формулы:

$$\begin{cases} x = \frac{S}{p-a}, \\ y = \frac{S}{p-b}, \\ z = \frac{S}{p-c}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $S$  – площадь треугольника  $ABC$ , а  $p = \frac{a+b+c}{2}$  – его полупериметр. Очевид-

но, что

$$x = y = z \Leftrightarrow a = b = c.$$

По формулам (1) имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{c}{S}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{b}{S}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{S}. \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда находим отношения сторон  $a$ ,  $b$ ,  $c$  треугольника:

$$a : b : c = \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),$$

т.е.

$$\begin{cases} a = \left(\frac{xz + xy}{xz + yz}\right) \cdot c, \\ b = \left(\frac{xy + yz}{xz + yz}\right) \cdot c. \end{cases} \quad (3)$$

Из формул (1) выразим сумму попарных произведений (по пути используем формулу Герона):

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &= S^2 \left( \frac{1}{(p-a)(p-b)} + \frac{1}{(p-a)(p-c)} + \frac{1}{(p-b)(p-c)} \right) = \\ &= \frac{S^2(p-c+p-b+p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= \frac{S^2 p^2}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p^2. \end{aligned}$$

Значит, периметр треугольника равен

$$a + b + c = 2p = 2\sqrt{xy + xz + yz}. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) можно выразить  $c$  через  $x$ ,  $y$  и  $z$  (проделайте это!) и получить аналогичные выражения для  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} a = \frac{x(y+z)}{\sqrt{xy+xz+yz}}, \\ b = \frac{y(x+z)}{\sqrt{xy+xz+yz}}, \\ c = \frac{z(x+y)}{\sqrt{xy+xz+yz}}. \end{cases} \quad (5)$$

Эти формулы свидетельствуют о том, что

треугольник однозначно определяется заданием трех радиусов вневписанных окружностей и что любые три положительных числа могут быть равны этим радиусам. Действительно, очевидно, что из формул (5) вытекают неравенства  $a + b > c$ ,  $a + c > b$ ,  $b + c > a$  при любых  $x, y, z$ .

#### Нахождение иных элементов треугольника

Продолжим выкладки. Из формул (1), (4), (5) выводим

$$S = \frac{xyz}{\sqrt{xy + xz + yz}}. \quad (6)$$

Из формул (4), (6) выражаем через  $x, y, z$  радиус  $r$  вписанной окружности:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{xyz}{xy + xz + yz}. \quad (7)$$

Из формул (5) и (6) находим радиус  $R$  описанной окружности и длины высот треугольника  $h_a, h_b, h_c$ :

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4(xy+xz+yz)},$$

$$h_a = \frac{2yz}{y+z}, \quad h_b = \frac{2xz}{x+z}, \quad h_c = \frac{2xy}{x+y}.$$

Согласно известным формулам

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} = \frac{r}{p-c},$$

применяя (7), (1) и (4), получим

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} = \frac{x}{\sqrt{xy + xz + yz}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} = \frac{y}{\sqrt{xy + xz + yz}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} = \frac{z}{\sqrt{xy + xz + yz}}.$$

Отсюда не составит труда вывести

$$\sin \frac{\angle A}{2} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}},$$

$$\sin \frac{\angle B}{2} = \frac{y}{\sqrt{(y+x)(y+z)}},$$

$$\sin \frac{\angle C}{2} = \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}.$$

#### Быстрое доказательство геометрических неравенств

Найденные в предыдущем разделе формулы позволяют очень просто доказать ряд неравенств, относящихся к геометрии треугольника (отметим, что во всех неравенствах равенство достигается только для равнобедренного треугольника). Так, неравенства

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} + \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} \geq \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\angle A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\angle B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\angle C}{2} \geq 1,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) \leq x+y+z$$

сразу и без каких-либо искусственных действий сводятся к неравенству

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0.$$

Неравенства

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} \geq 3, \quad \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{3R}{2}$$

сводятся к неравенствам

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2, \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2.$$

Неравенства

$$\sin \frac{\angle A}{2} \sin \frac{\angle B}{2} \sin \frac{\angle C}{2} \leq 1, \quad R \geq 2r$$

могут быть сведены к неравенствам

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad \frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz}, \quad \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}.$$

А неравенства

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}, \quad S \geq 3\sqrt{3} \cdot r^2, \quad 2\sqrt{3} \cdot r \leq \frac{a+b+c}{3},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\angle A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\angle A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\angle C}{2} \geq 3\sqrt{3}$$

трансформируются в неравенство

$$\frac{xy + xz + yz}{3} \geq \sqrt[3]{xy \cdot xz \cdot yz}$$

(неравенство о средних для величин  $xy, yz, zx$ ).

Читатель может самостоятельно провести описанные выше вычисления и убедиться в «высокой эффективности» переменных  $x, y, z$  в этих задачах.

# Период ангармонических колебаний

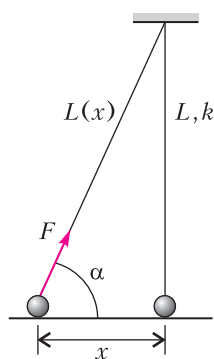
Ф. ГРИГОРЬЕВ

ГАРМОНИЧЕСКИМИ НАЗЫВАЮТ КОЛЕБАНИЯ, при которых ускорение тела после смещения из положения равновесия направлено к положению равновесия и прямо пропорционально величине смещения. Период гармонических колебаний не зависит от амплитуды и максимальной скорости колебаний.

В реальных колебательных системах закон прямой пропорциональности ускорения и смещения часто нарушается с ростом амплитуды колебаний. Например, колебания математического маятника становятся *ангармоническими*, если амплитуда колебаний сравнима с длиной нити или если угол отклонения нити от вертикали перестает быть малым по сравнению с единицей (величина угла выражается в радианах).

Если слагаемые в возвращающей силе, пропорциональные более высокой степени смещения, чем первая, много меньше линейного слагаемого, то ангармонизм колебаний может быть рассмотрен как малое возмущение, дающее поправку в зависимость смещения от времени и в период колебаний. Однако в некоторых случаях ангармонизм не может быть учтен таким образом. Рассмотрим пример такой системы.

Пусть гладкий шарик массой  $m$  лежит на горизонтальной поверхности и прикреплен к нижнему концу подвешенной недеформированной легкой резинки жесткостью  $k$  и длиной  $L$  (см. рисунок). Если отклонить шарик от положения равновесия на



малую величину  $x \ll L$  и отпустить, то под действием силы упругости резинки  $F$ , горизонтальная составляющая которой направлена против смещения, возникнут колебания:

$$ma_x = -F \cos \alpha = -\frac{k\Delta L}{L} x, \quad (1)$$

где  $\Delta L = L(x) - L$  – деформация резинки. На первый взгляд, в уравнении (1) ускорение прямо пропорционально смещению, как и в гармоническом законе, однако это не так. Дело в том, что деформация тоже зависит от смещения. Чтобы сделать эту зависимость более удобной для рассмотрения, преобразуем  $\Delta L$  с учетом условия малости колебаний  $x \ll L$ :

$$\begin{aligned} \Delta L = L(x) - L &= \frac{L^2(x) - L^2}{L(x) + L} \approx \\ &\approx \frac{(L^2 + x^2) - L^2}{L(x) + L} \approx \frac{x^2}{2L}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в уравнение (1), получим

$$ma_x = -\gamma x^3, \quad (2)$$

где  $\gamma = k/(2L^2)$ . Мы видим, что ускорение пропорционально кубу смещения. Такие колебания не будут гармоническими, так как зависимость вида  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$  не является решением уравнения (2) в произвольный момент времени, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

Интересно, что период таких колебаний, в отличие от периода гармонических колебаний, зависит от амплитуды колебаний  $A$ . Покажем это, исходя из соображений размерности. Период  $T$  может зависеть только от  $\gamma$ ,  $m$  и  $A$ . Поскольку  $\gamma/m$  имеет размерность  $m^{-2} \cdot c^{-2}$ , есть только одна комбинация этих величин, имеющая размерность времени:

$$T \sim \left(\frac{1}{A}\right) \cdot \left(\frac{m}{\gamma}\right)^{1/2},$$

откуда следует, что период колебаний описанной системы обратно пропорционален амплитуде.

Точно найти период можно, опираясь на закон сохранения механической энергии  $E$  при колебаниях с потенциальной энергией

$U(x)$ :

$$\frac{mv_x^2}{2} + U(x) = E.$$

Выразим отсюда скорость, рассматривая движение на участке, на котором проекция скорости положительна:

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{2(E - U(x))}{m} \right)^{1/2}.$$

Разделим переменные:

$$dt = \frac{dx}{(2(E - U(x)))/m)^{1/2}}.$$

Шарик проходит расстояние, равное амплитуде колебаний, за четверть периода. Возьмем интеграл от обеих частей последнего равенства:

$$\frac{T}{4} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}/m}.$$

Чтобы вычислить правую часть, необходимо знать зависимость потенциальной энергии упругой резинки от смещения. Учитывая связь проекции силы и потенциальной энергии:  $F_x = -dU/dx$ , а также равенство нулю потенциальной энергии в положении равновесия, найдем

$$U(x) = \frac{\gamma x^4}{4}.$$

Поскольку в крайних положениях скорость равна нулю, механическая энергия колебаний выражается через амплитуду следующим образом:  $E = \gamma A^4/4$ . Используя замену переменных  $x = zA$ , для периода колебаний получим

$$T = \left( \frac{4}{A} \right) \cdot \left( \frac{2m}{\gamma} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}.$$

Входящий в это выражение интеграл не зависит от характеристик колебательной системы. Он выражается через специальные функции (бета-функции) и приблизительно равен 1,3. Впрочем, его можно найти численно на компьютере. Учитывая, что  $\gamma = k/(2L^2)$ , период можно выразить через жесткость и длину резинки:

$$T \approx \left( \frac{10L}{A} \right) \cdot \left( \frac{m}{k} \right)^{1/2}.$$

Интересно сравнить период ангармонических колебаний с периодом гармонических колебаний, возникающих, если в начальном состоянии резинка растянута на  $\Delta L$ , а амплитуда колебаний  $A \ll \Delta L$ . Проекция второго закона Ньютона на направление смещения в этом случае имеет вид

$$ma_x = -\frac{k\Delta L}{L}x$$

и период колебаний равен

$$T = 2\pi \left( \frac{mL}{k\Delta L} \right)^{1/2}.$$

Теперь найдем отношение периодов ангармонических и гармонических колебаний:

$$\frac{T_{\text{анг}}}{T_{\text{г}}} = \left( \frac{5}{\pi} \right) \cdot \left( \frac{L\Delta L}{A^2} \right)^{1/2}.$$

Это отношение не зависит от жесткости резинки и массы шарика. Заметим также, что при условии примерного равенства амплитуд гармонических и ангармонических колебаний период последних будет существенно больше.

Зависимость периода колебания от амплитуды – типичная особенность ангармонических колебаний. Например, если возвращающая сила пропорциональна пятой степени смещения:

$$ma_x = -\beta x^5,$$

то период колебаний обратно пропорционален квадрату амплитуды:

$$T = \left( \frac{4}{A^2} \right) \cdot \left( \frac{3m}{\beta} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^6}},$$

где интеграл приблизительно равен 1,2.

# Бесконечность – не предел

Ф.НОСКОВ

ЭТА СТАТЬЯ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ ПОПЫТКУ дать первичное описание порядковых чисел (ординалов). Похожий предмет в «Кванте» уже обсуждался в статье А.Кириллова, И.Клумовой и А.Сосинского «Сюрреальные числа» (№11 за 1979 г.), однако тогда ординалы были упомянуты вскользь, отмечалась лишь их связь с бесконечными последовательностями. Примерно этой связью руководствовались и мы, и Кантор, когда их, собственно, открыл.

Среди комиксов известного в интернете автора под псевдонимом Дюран стоит отметить «Бесконечную шутку». Этот комикс великолепный; в частности, в нем главный герой рассказывает бесконечному числу математиков анекдот про, собственно, рассказчика анекдота. Это порождает некую цикличность, но суть не в этом. Суть в анекдоте

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20190806>

про бесконечное число математиков, заходящих в бар. Вот он:

*Заходит бесконечное число математиков в бар. Первый говорит бармену: «Мне кружку пива». Второй говорит: «Мне полкружки». Третий: «Мне четверть». И так далее. «Ну вас к черту», – восклицает бармен и наливает две кружки.*

Пусть бармен обслужил бесконечное число математиков за 2 секунды. А именно, нулевой математик (а в дискретной математике принято отсчитывать от нуля) обслуживается за 1 секунду, первый – за полсекунды, второй – за четверть и так далее,  $n$ -й обслуживается за  $\frac{1}{2^n}$  секунды. Итак, все математики будут обслужены за 2 секунды. После этого в бар заходит еще один математик.

Каждому из предыдущих математиков мы могли присвоить номер. Нет вопросов в том, какого математика считать вторым, какого – нулевым, а какого – сотысячным. Но вот каким числом занумеровать этого нового математика, который зашел в бар? Присвоим ему номер  $\omega$ , и количество математиков перед ним также будем обозначать  $\omega$ . Да, это бесконечное число, но ничего страшного в этом нет. Следующего за ним математика назовем  $(\omega + 1)$ -м, следующего за этим –  $(\omega + 2)$ -м и так далее. Пусть и эти математи-



ки пройдут бар за 2 секунды так же, как это сделали первые  $\omega$  математиков. Сколько же всего математиков прошло бар? Ответ прост:  $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ . А пусть зайдут еще  $\omega$  математиков! Теперь сколько их?  $\omega \cdot 3$ .

Хорошо, сделаем анекдот еще смешнее: теперь  $\omega$  математиков заходят в бар за 1 секунду, потом еще  $\omega$  математиков заходят в бар за полсекунды, потом еще  $\omega$  математиков заходят в бар за четверть секунды и так далее. Сколько математиков окажется внутри бара за 2 секунды? Очевидно,  $\omega \cdot \omega = \omega^2$ .

Кажется, мы научились и складывать математиков, и умножать. Как же мы это делаем? Вот хотим сложить  $\alpha$  математиков и  $\beta$  математиков. Что это значит? Все просто: в бар зашли сначала  $\alpha$  математиков, потом  $\beta$  математиков, и их стало  $\alpha + \beta$ . Однако не все так просто. Рассмотрим следующую ситуацию: в бар сначала зашли два математика, а потом  $\omega$  математиков. Но возможно ли отличить этот случай от того, когда в бар заходят  $\omega$  математиков? Внимательно смотрим на рисунок 1 и понимаем, что нет (более точное обоснование требует введения понятия изоморфизма). Значит,  $2 + \omega = \omega$ . А вот если в бар зайдет  $\omega$  математиков, а за ними 2 математика, то ситуация будет совсем другой. Итак,  $2 + \omega$  не равно  $\omega + 2$ . Тем самым, в общем случае  $\alpha + \beta$  не равно  $\beta + \alpha$ , как мы привыкли.

Более интересным является введение умножения. Чтобы умножить 2 на 3, надо вместо каждого из трех математиков подставить двух и получить шесть математиков. Обобщим этот принцип на наш случай.

Скажем, мы хотим умножить  $\omega$  на 2. Рассмотрим ситуацию: стояли два математи-

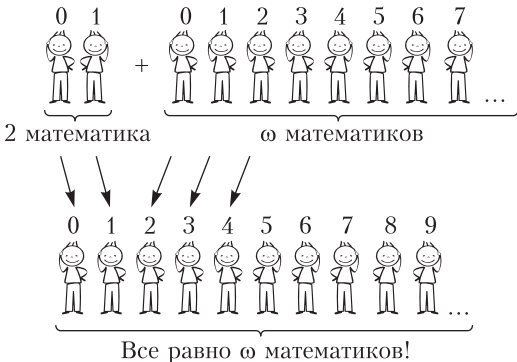


Рис. 1

ка. А мы вместо каждого поставили  $\omega$  математиков, и вышло  $\omega \cdot 2$  математиков (рис. 2). В другом случае мы хотим умножить  $\omega$  на

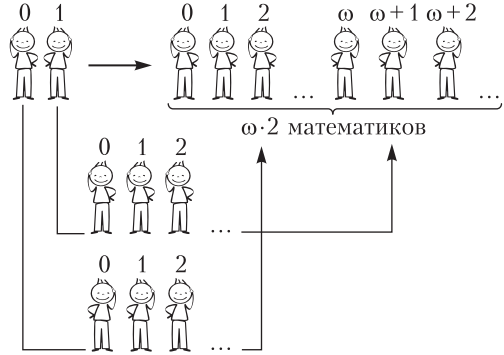


Рис. 2

$\omega$ : стояли  $\omega$  математиков, мы вместо каждого математика поставили  $\omega$  математиков. Таким образом, если мы хотим умножить  $\alpha$  на  $\beta$ , мы просто вместо каждого математика из  $\beta$  математиков подставляем  $\alpha$  математиков.

Есть ли тут что-нибудь интересное? Оказывается, да: что будет, если мы 2 умножим на  $\omega$ ? Подставим вместо каждого математика из  $\omega$  математиков двух математиков (рис. 3). Снова получим  $\omega$  математиков. Получается,  $\omega \cdot 2$  не равно  $2 \cdot \omega$ , т.е.  $\alpha \cdot \beta$  не равно  $\beta \cdot \alpha$  в общем случае.

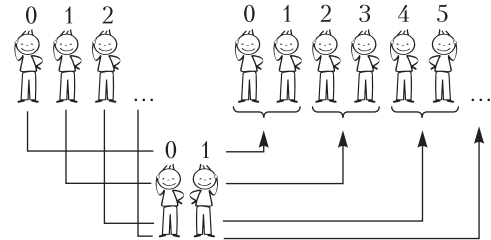


Рис. 3

В качестве упражнения хочется предложить читателям доказать на математиках для произвольных  $\alpha, \beta, \gamma$  такое соотношение:  $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ , т.е. возможность раскрытия скобок слева. Еще интереснее обосновать некорректность раскрытия скобок справа, т.е. найти примеры, когда  $(\beta + \gamma) \cdot \alpha \neq \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$ . (Подсказка. Рассмотрите выражение  $(\omega + 1) \cdot 2$ .)

Итак, было  $\omega$  математиков, мы вместо каждого из  $\omega$  математиков подставили  $\omega$  математиков, получили  $\omega^2$  математиков.

После вместо каждого из  $\omega^2$  математиков подставили  $\omega$  математиков, получили  $\omega^3$  математиков. Хорошо, я смогу получить хоть  $\omega^{100}$ . Как же определить  $\omega^\omega$  математиков?

Представим сотворение нового, идеально-го мира. *Жил на земле только один математик. Однажды на облаках в поднебесье собираются  $\omega$  богов на совет. Говорит бог номер 0: «Да будет на земле вместо каждого математика  $\omega$  математиков!» И стало  $\omega$  математиков. Бог номер 1 говорит: «Да будет на земле вместо каждого математика  $\omega$  математиков!» И появилось на земле  $\omega^2$  математиков. Бог номер 2 сказал: «Да будет на земле вместо каждого математика  $\omega$  математиков!» И стало математиков на земле  $\omega^3$ . И каждый следующий бог говорил: «Да будет на земле вместо каждого математика  $\omega$  математиков!» И стало на земле  $\omega^\omega$  математиков. И поняли боги, что это хорошо.*

Что же сделали боги? Они  $\omega$  раз умножили  $\omega$  на само себя (чуть более детальное обоснование происходящего дано ниже мелким шрифтом). И получили  $\omega^\omega$  математиков.

Теперь представим новую ситуацию. *Жил на земле только один математик. В поднебесье собрался пантеон из  $\omega^0$  богов. И сказал нулевой бог: «Да будет на земле вместо каждого математика  $\omega$  математиков!» А первый бог сказал: «Да будет на земле вместо каждого математика  $\omega$  математиков!» И второй бог это сказал, и бог номер  $\omega+1$  это сказал, и бог номер  $\omega^2 + \omega \cdot 2 + 4$  это сказал, так все боги, кроме нулевого, это сказали. И появилось на земле  $\omega^\omega$  математиков. И поняли боги, что это хорошо.*

Итак, как нам получить  $\alpha$  в степени  $\beta$  математиков? Надо, чтобы на небесах сидели  $\beta$  богов, на земле жил только один математик и каждый бог сказал: «Да будет на земле вместо каждого математика  $\alpha$  математиков!» Что делают боги? Они  $\beta$  раз умножают  $\alpha$  на само себя. Делают то же, что обычно делаем в таких случаях мы, когда 2 возводим в куб.

Ключевым свойством ординалов (т.е. всех этих чисел, которыми мы считаем бесконечное число математиков) является возможность индукции по ним. Такая индукция называется трансфинитной. Рассмотрим подробнее одну из формулировок

принципа математической индукции. Пусть  $\varphi(n)$  – некоторое утверждение относительно натурального числа  $n$  (к примеру,  $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ ), тогда принцип можно сформулировать так:

*Если из того, что для любых  $m$  меньших, чем  $n$ , выполняется  $\varphi(m)$ , следует, что выполняется  $\varphi(n)$ , то для любого натурального  $n$  выполняется  $\varphi(n)$ .*

Как таким принципом пользуются? Говорят: «Давайте предположим, что для всех натуральных

ных  $m < n$  выполняется  $\sum_{i=0}^m i = \frac{m(m+1)}{2}$ . Докажем

тогда, что  $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ ». Заметим, что в такой

формулировке база задается неявно: утверждение «для всех натуральных  $m < 0$  выполняется

$\sum_{i=0}^m i = \frac{m(m+1)}{2}$ » является истинным просто потому,

что таких  $m$  нет. Таким образом, чтобы доказать утверждение для  $n$ , нам все равно надо рассмотреть два случая: 1)  $n = 0$ ; 2) существует натуральное число  $n - 1$ , которое меньше  $n$ , а

значит, для него верно  $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}$ .

После того, как мы доказали утверждение для  $n$  в двух этих случаях, мы получаем посылку принципа индукции: «Из того, что для любых  $m$  меньших, чем  $n$ , выполняется  $\varphi(m)$ , следует, что выполняется  $\varphi(n)$ ». Зная, что принцип индукции истинен, мы заключаем, что для любого натурального  $n$  верно

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Однако точно таким же образом мы можем идти индукцией по математикам. Пусть стоят  $\alpha$  математиков и про математика номер  $\beta$  мы можем сказать какое-то утверждение  $\varphi(\beta)$ . Пусть нам известно, что из того, что для любого математика с номером  $\gamma$  меньшим, чем  $\beta$ , справедливо  $\varphi(\gamma)$ , следует, что справедливо  $\varphi(\beta)$ . Тогда по принципу индукции утверждение  $\varphi$  справедливо для всех  $\alpha$  математиков.

Иногда мы говорим о рекурсии или об индуктивном определении. Примером может послужить определение возведения в натуральную степень:

1.  $a^0 = 1$ ,
2.  $a^{n+1} = a^n \cdot a$ .

В действительности не очевидно, отчего мы сможем посчитать  $a^n$  для любого натурального  $n$  и произвольного  $a$  в результате такого определения. Возможность рекурсии следует из справед-



ливости самого принципа индукции. Таким образом, в нашем примере с богами мы «дали» индуктивное определение возведения в степень, заметя под ковер один важный момент. Рассмотрим три случая:

1. В пантеоне нет богов, а на земле 1 математик. Выходит, что  $a^0 = 1$ .

2. В пантеоне  $\beta + 1$  богов. Тогда после слов последнего бога появится  $a^{\beta+1} = a^\beta \cdot a$ .

3. В пантеоне  $\alpha$  богов, причем нет такого ординала  $\gamma$ , что  $\alpha = \gamma + 1$ . Примером такого  $\alpha$  является  $\omega$  — у этого «числа» нет предыдущего. В таком случае говорят о взятии супремума (sup) по всем меньшим ординалам. Говоря о супремуме, мы имеем в виду некоторое слияние последовательностей математиков. Пример получения  $\omega$  математиков таким способом показан на рисунке 4.

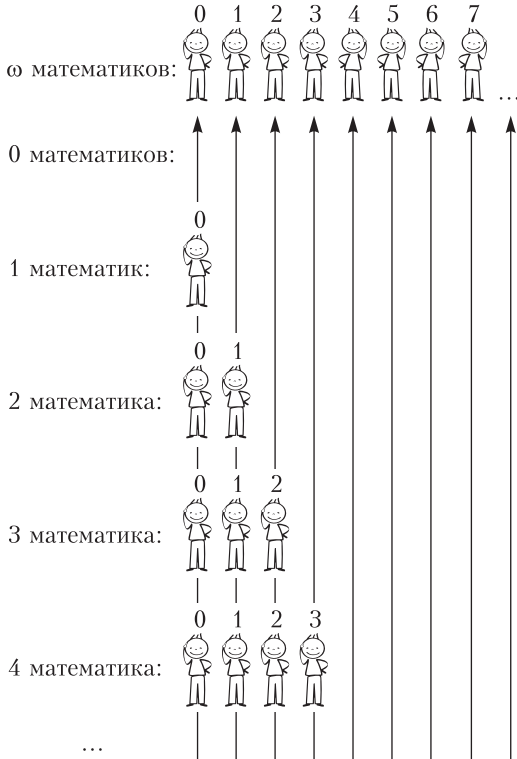


Рис. 4

В результате такой операции должна получиться наименьшая последовательность, содержащая все конечные последовательности математиков в качестве своих начальных подпоследовательностей. Таким образом мы хотим сказать, что  $\omega = \sup \{ \gamma \mid \gamma \text{ — конечный ординал} \}$ .

Похожим образом определяется степень в случае ординала, не имеющего предыдущего, т.е.  $\delta^\alpha = \sup \{ \delta^\gamma \mid \gamma < \alpha \}$ . Напомним, что в результате

получается слияние последовательностей, созданных предыдущими богами, описанным на рисунке 4 способом.

Итак, мы определили возведение в большую степень через возведение в меньшие. Сославшись на возможность трансфинитной рекурсии, поймем, что таким образом мы научились возводить ординалы в любую степень.

Сейчас мы подходим к финалу истории. Вот ее окончание:

*В поднебесье сидели  $\omega$  богов. И нулевой бог сказал: «Да будет на земле  $\omega$  математиков!» И первый бог сказал: «Да будет на земле  $\omega$  математиков в такой степени, в какой их уже на земле есть!» И второй бог это сказал, и третий бог это сказал, и все следующие боги это сказали. И стало на земле  $\epsilon_0$  математиков. И поняли боги, что это хорошо.*

*Но позавидовал дьявол тому, что делали боги. Пришел в поднебесье и сказал: «Да будет на земле  $\omega$  математиков в такой степени, в какой их уже есть на земле!» Но математиков осталось все равно  $\epsilon_0$ . Так дьявол был посрамлен.*

Что же произошло в этой истории? После слов нулевого бога на земле  $\omega$  математиков, после слов первого  $\omega^\omega$  математиков, после слов второго  $\omega^{\omega^\omega}$ , после слов третьего  $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$  и так далее. «Число», которое получилось в результате, называется  $\epsilon_0$ . Оно обладает одним замечательным свойством:  $\omega^{\epsilon_0} = \epsilon_0$ .

Все эти бесконечные числа называются ординалами. В действительности они обозначают специальный вид порядка на различных множествах, о чем мы здесь распространяться не будем. Подробнее об этом можно прочитать в книге Н.К.Верещагина и А.Шеня «Начала теории множеств» (М.: МЦНМО, 1999).

# Олимпиада «Покори Воробьевы горы!»

## ФИЗИКА

Олимпиада «Покори Воробьевы горы!» проходит с 2005 года. С самого начала она возникла как социальный проект, направленный на поиск талантливых школьников во всех регионах России.

В 2018/19 учебном году олимпиада по физике проводилась для двух категорий школьников: «младшие» (7, 8 и 9 классы) и «старшие» (10 и 11 классы). Отборочный этап олимпиады проходил дистанционно: каждому участнику после получения заданий давалась неделя (168 часов) на выполнение задания. Заключительный этап проводился в очной форме в шести городах РФ: Железноводск, Кемерово, Москва, Челябинск, Нижний Новгород, Уфа. В олимпиаде традиционно используются оригинальные задачи достаточно высокого уровня сложности, наиболее сложные и интересные — в творческой части отборочного этапа. У некоторых из них не бывает «единственно правильного» решения, так как участник может использовать различные модели рассматриваемых явлений, а оценка его решения зависит и от адекватности и уровня точности используемой модели, и от корректности решения в рамках выбранной модели.

Ниже приводятся примеры заданий обоих этапов олимпиады по физике для «старших» школьников.

### Отборочный этап

#### Часть I (тестовое задание)

1. Цилиндрический медный стержень длиной 2 м вносят в область, где создано электрическое поле с напряженностью  $50 \text{ В/м}$ , и располагают так, что его ось составляет угол  $60^\circ$  с направлением напряженности этого поля (каким оно было до внесения стержня). Найдите разность потенциалов между концами стержня. Ответ запишите в вольтах, без указания единиц измерения.

2. Маленький тяжелый шарик бросили с балкона под углом к горизонту со скоростью  $9 \text{ м/с}$ . Спустя время  $t$ , когда его скорость стала перпендикулярна исходной, она равна

$12 \text{ м/с}$ . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите  $t$ . Ускорение свободного падения считайте равным  $10 \text{ м/с}^2$ . Ответ запишите в секундах, без указания единиц измерения, с точностью до десятых.

3. Постоянное количество гелия участвует в процессе, в котором газ сначала расширяется адиабатически, а затем в изобарном процессе возвращается к исходной температуре. Во всем процессе гелий совершил работу  $735 \text{ Дж}$ . Найдите работу, совершенную гелием в адиабатическом процессе. Ответ запишите в джоулях, без указания единиц измерения, при необходимости округлив до ближайшего целого значения.

#### Часть II (творческое задание)

##### Неизвестные исследования д-а Ф.Д.Ч. Уилларда

##### 1. Тени на орбите

В одном из проектов Ф.Д.Ч. Уилларда, известного специалиста по криогенике, по-



требовалось разместить его установку на геостационарном спутнике. Так называют спутники, вращающиеся в плоскости земного экватора таким образом, что они все время находятся над одной точкой земной поверхности. Оборудование на спутнике работает от солнечных батарей, но поступление энергии от Солнца, конечно же, неравномерное. Энергопотребление установки было очень небольшим, поэтому ее нужно было снабдить аккумулятором, рассчитанным только

на те периоды времени, когда свет от Солнца не достигает спутника. Какова может быть максимальная длительность такого периода? Какова может быть максимальная длительность периода «бесперебойного» освещения? При необходимости используйте следующие данные:

- расстояние от Земли до Солнца меняется от  $r_a \approx 152$  млн км (от афелия, который Земля проходит в июле) до  $r_n \approx 147$  млн км (до перигелия, который Земля проходит в январе);
- угловой размер Солнца при наблюдении с Земли  $\beta \approx 32'$ ;
- период обращения Земли вокруг Солнца  $T_0 \approx 365,25$  суток;
- радиус Земли  $R_3 \approx 6380$  км;
- длительность земных суток  $T = 24$  ч;
- ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g \approx 9,8$  м/с<sup>2</sup>;
- угол между осью собственного вращения Земли и перпендикуляром к плоскости орбиты движения Земли вокруг Солнца  $\alpha \approx 23,44^\circ$ .

**2. Лазерный пинцет**

Однажды в ходе эксперимента д-ру Уилларду было необходимо «подвесить» прозрачный шарик радиусом  $R = 1,2$  мкм с массой  $m = 10^{-12}$  г. Для этого он решил использовать два встречных лазерных пучка специального сечения – в виде полукруга радиусом  $r = 0,2$  мкм (рис.1). Они направ-

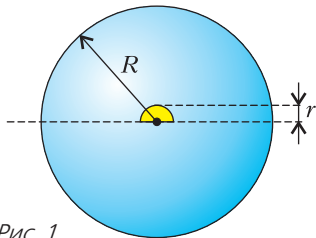


Рис. 1

лялись на шарик с двух сторон по центру шарика точно над его горизонтальным сечением. Показатель преломления вещества шарика  $n = 2,5$ , отражением света от его поверхности и поглощением света внутри можно пренебречь. Какой должна быть мощность пучков для удержания шарика? Ускорение свободного падения считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. В квантовой теории свет можно рассматривать как поток фотонов – частиц, у которых

энергия и импульс связаны соотношением  $E = c|\vec{p}|$ .

**3. Нелинейный светильник.** Как-то на досуге Ф.Д.Ч.Уиллард решил собрать светильник из двух одинаковых ламп, двух одинаковых резисторов и четырех одинаковых аккумуляторов. У него был довольно точный амперметр, и он измерил силу тока в цепи при подключении одной лампы к одному аккумулятору. Она оказалась равной  $I_1 = 1,50$  А. Затем он измерил силу тока аккумулятора при подключении к нему двух ламп, соединенных параллельно. Теперь сила тока оказалась равной  $I_2 = 2,40$  А. Наконец, он измерил силу тока в цепи из одного аккумулятора и одного резистора: она была равна  $I_0 = 0,40$  А. Тогда исследователь собрал светильник по схеме, показанной на рисунке 2. Во сколько раз отличались в нем

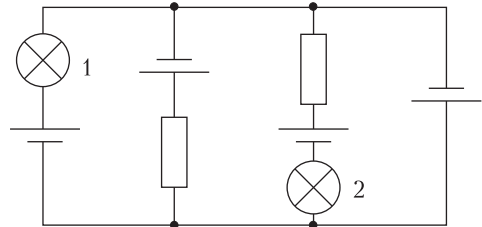


Рис. 2

мощности потребления ламп 1 и 2? Известно, что у этих ламп сила тока пропорциональна корню квадратному из приложенного напряжения. Получите в ответе численное значение, добившись максимальной возможной точности (ошибка показаний амперметра – половина единицы последнего указанного разряда).

**4. Смесь паров.** В лабораторных журналах Ф.Д.Ч.Уилларда был найден отчет об одном интересном эксперименте. В нем исследовалось поведение давления смеси сухого воздуха и паров двух довольно необычных синтезированных исследователем веществ при изменении объема смеси. На рисунке 3 показаны зависимости давлений насыщенных паров этих веществ от температуры (в той области значений температуры, в которой проводились исследования). В качестве примера ниже приведена таблица значений давления смеси в сосуде под поршнем при разных объемах для некоторой постоянной температуры. В журнале отмечено, что полученная в этом опыте изотерма обладает

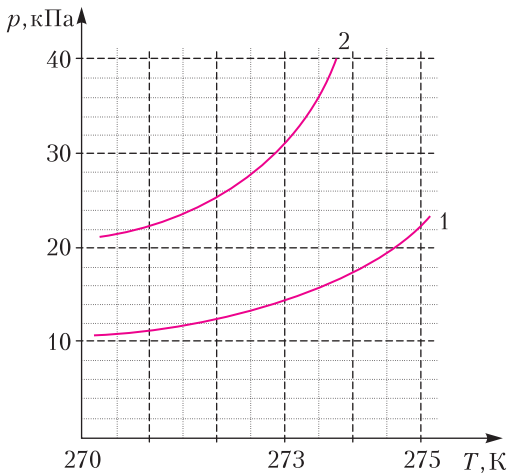


Рис. 3

интересной особенностью – на ней заметен только один излом, положение которого отмечено в таблице «звездочкой». Определите

$V$ , л	30,0	40,0	50,0*	60,0	70,0
$p$ , кПа	127,61	104,16	90,08	75,07	64,34

температуру изотермы и вычислите количества веществ 1 и 2 в смеси. Найдите, до какой температуры нужно нагреть смесь при объеме 40 л, чтобы в ней не осталось жидких компонент. Известно, что в жидком состоянии эти вещества не смешиваются. Опыт проводился в невесомости, и никакие из компонент смеси не покидали сосуда.

### Заключительный этап

#### Вариант 1

##### Задание 1

**Вопрос.** Кубик массой  $m$  покоится на очень шероховатой ( $\mu \approx 1$ ) горизонтальной поверхности. При помощи какой минимальной силы его можно заставить начать вращение вокруг одного из своих горизонтальных ребер? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**Задача.** Уголок, изготовленный из однородной проволоки, имеет два перпендикулярных «плеча» с длинами  $l_1 = a = 20$  см и  $l_2 = \frac{3}{2}a = 30$  см. Его повесили за конец короткого плеча на шарнирном подвесе (который позволяет ему свободно вращаться в вертикальной плоскости вдоль стенки, не

касаясь ее). Затем в стену на одной вертикали с подвесом вбили горизонтально гладкий гвоздь – так, что теперь уголок опирается на гвоздь серединой длинного плеча (рис.4). Во сколько раз и как изменилась из-за появления гвоздя величина силы, с которой уголок действует на подвес?

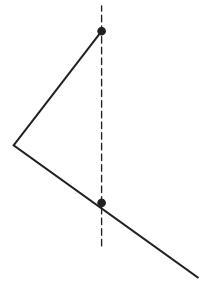


Рис. 4

##### Задание 2

**Вопрос.** Как связаны между собой изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа и полученное им количество теплоты в изобарном процессе?

**Задача.** Количество  $\nu = 2$  моль одноатомного идеального газа находится в теплоизолирующем вертикальном цилиндре с подвижным поршнем площадью  $S$  и массой  $m$ . Дно цилиндра равномерно заряжено зарядом  $q$ , а поршень заряжен зарядом  $(-q)$ . Расстояние между дном сосуда и поршнем намного меньше диаметра цилиндра. Газ медленно получает от нагревателя количество теплоты  $Q$ . На какое расстояние при этом сдвинется поршень? Считайте, что электрическое поле остается однородным, трения нет. Диэлектрическая проницаемость газа равна единице, электрическая постоянная  $\epsilon_0$ , ускорение свободного падения  $g$ , давление над поршнем  $p_0$ .

##### Задание 3

**Вопрос.** Допустим, что для некоторого элемента цепи связь тока с приложенным напряжением дается уравнением  $I = f(U)$ , где  $f$  – известная функция. Как нужно рассчитывать мощность, которую будет потреблять этот элемент при подключении к клеммам источника с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ ?

**Задача.** К источнику постоянной ЭДС подключают гирлянду из последовательно соединенных резистора и  $n$  одинаковых светодиодов, вольт-амперная характеристика которых показана на рисунке 5 ( $U_0 = 1$  В). Если включить в гирлянду  $n_1 = 10$  светодиодов, то полная потребляемая ими мощность составит  $P_1 = 175$  Вт, если включить  $n_2 = 28$  светодиодов, то  $P_2 = 238$  Вт. Определите оптимальное число светодиодов, при

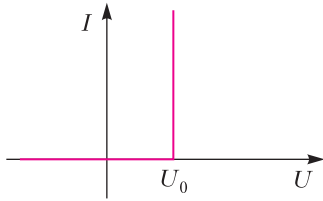


Рис. 5

котором потребляемая мощность максимальна, а сила тока через каждый из светодиодов – минимальна (из возможных при этой мощности). Найдите максимальную потребляемую мощность. Чему равна ЭДС источника?

**Задание 4**

**Вопрос.** При выполнении каких условий линзу можно считать тонкой?

**Задача.** Предмет и его прямое изображение располагаются на оси тонкой линзы перпендикулярно этой оси и симметрично относительно одного из фокусов линзы. Расстояние между предметом и изображением  $l = 20$  см. Чему может равняться фокусное расстояние линзы?

**Вариант 2**

**Задание 1**

**Вопрос.** Суммарная кинетическая энергия двух тел одинаковой массы в результате абсолютно неупругого соударения уменьшилась ровно в два раза. Каким был угол между векторами скоростей тел до соударения?

**Задача.** При взрыве снаряда, летевшего вертикально, в механическую энергию была преобразована часть энергии заряда, в 10 раз превосходящая кинетическую энергию снаряда перед взрывом. В результате взрыва снаряд раскололся на три осколка. На долю двух осколков – с массами  $m_1 = 0,5$  кг и  $m_2 = 3$  кг – пришлось 50% и 25% общей кинетической энергии соответственно, причем угол разлета этих осколков составил  $90^\circ$ . Третий осколок полетел в горизонтальном направлении. Пренебрегая массой пороховых газов, найдите массу третьего осколка.

**Задание 2**

**Вопрос.** Чему равна работа идеального газа массой  $m$  в процессе, уравнение которо-

го в координатах плотность–давление имеет вид  $p(\rho) = p_0 \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right)$ , а плотность изменяется от  $3\rho_0$  до  $2\rho_0$ ? Константы  $\rho_0$  и  $p_0$  считать известными.

**Задача.** Над постоянным количеством идеального газа производят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изотерм. Работа в этом цикле положительна и в  $k = 2$  раза меньше, чем количество теплоты, полученное газом в процессе изохорного нагревания. Абсолютная температура «более горячей» изотермы в  $k$  раз выше, чем температура «более холодной». Пусть этот процесс – цикл рабочего тела тепловой машины. Чему равен КПД этого цикла?

**Задание 3**

**Вопрос.** Как вычисляется потенциальная энергия электростатического взаимодействия системы точечных зарядов? Найдите максимальную кинетическую энергию каждого из двух тел одинаковой массы и с одинаковым зарядом  $q$ , отпущенных без начальной скорости с расстояния  $l$  в пустом пространстве? Электрическая постоянная равна  $\epsilon_0$ .

**Задача.** Три одинаковых небольших тела массой  $m$  с зарядом  $q$  каждое удерживают на горизонтальной плоскости в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a$ . Какое расстояние  $s$  пройдет каждое из тел, если их отпустить? Какую максимальную скорость  $u$  приобретут тела в процессе движения? Коэффициент трения тел о плоскость равен  $\mu$ . Электрическая постоянная равна  $\epsilon_0$ .

**Задание 4**

**Вопрос.** Опишите явление полного внутреннего отражения.

**Задача.** Точечный источник света расположен перед торцом длинного стеклянного цилиндрического световода с показателем преломления  $n$ . Источник находится на оси цилиндра. Чему равен угол  $\delta$  между крайними лучами конического светового пучка, выходящего из противоположного торца световода?

*Публикацию по физике подготовил  
К.Парфенов*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №7)

1. 5.

2. 4.

Раз каждая из 8 сестер была сфотографирована 2 или 3 раза, то в совокупности они были сфотографированы от 16 до 24 раз. Это количество должно быть в 5 раз больше, чем количество фотографий, так что фотографий было  $20/5 = 4$ .

3. Из развертки д.

4. 3.

Сумма всех чисел в квадрате равна  $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 5 = 75$ , в каждой области по  $75/3 = 25$ . Рассмотрим область, в которую вписана двойка. В пустые клетки этой области нельзя поставить четыре одинаковые цифры, поэтому там стоит не больше трех пятерок, а оставшиеся две цифры не больше чем четверки. Итого сумма шести чисел в этой области не больше  $5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 2 = 25$  и сумма 25 достигается только при таком наборе чисел.

Итак, в левой нижней области три пятерки. Значит, в правой верхней области пятерок не больше двух. В ней, опять же, нет четырех одинаковых цифр, а также нет двух троек одинаковых цифр. Значит, сумма цифр в ней не больше  $4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 3 = 25$  и, опять же, эта сумма достигается только при таком наборе чисел. Расставляются этот набор чисел также однозначным образом. Следовательно, в правом верхнем углу стоит цифра 3.

## XXV ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЕВ ИМЕНИ А.П.САВИНА

Использованы как авторские решения, так и решения членов методической комиссии Турнира.

1. При  $n > 6$  между  $n$  и  $3n$  найдется число, у которого сумма цифр нечетна и все цифры, кроме первой, девятки (берем число с тем же числом знаков и либо сохраняем первую цифру и все девятки, либо первую цифру увеличиваем на 1 и сохраняем все девятки – оба эти числа меньше чем  $3n$ ). Тогда его сумма цифр равна сумме сумм цифр слагаемых (потому что не может быть переходов через десяток). Но два равных числа не могут в сумме дать нечетную сумму цифр.

2. Если рыцарей нет, то требуемое утверждение выполняется. Если они есть, то найдем столбец, в котором их больше всего (возможно, не единственный). Рассмотрим каждого из рыцарей этого столбца. В строке, где он стоит, лжецов нет,

иначе лжец говорил бы правду. Значит, эти строки состоят из одних рыцарей. Других рыцарей в таблице нет (иначе это противоречит максимальнойности рыцарей в выбранном столбце). Следовательно, количество рыцарей делится на количество столбцов.

3. Пусть  $A_n$  – число, полученное последовательным выписыванием степеней двойки от 1 до  $2^n$ , а  $v(n)$  – количество цифр в десятичной записи числа  $2^n$ . Докажем по индукции, что  $A_{2n}$  делится на  $2^{2n}$  и не делится на  $2^{2n+1}$ . Проверив утверждение для  $n = 1$ , предположим, что оно верно для всех  $n$ , не превосходящих некоторого натурального числа  $m$ . Имеем

$$A_{2m+2} = A_{2m} \cdot 10^{v(2m+1)+v(2m+2)} + 2^{2m+1} \cdot 10^{v(2m+2)} + 2^{2m+2},$$

где первые два слагаемых делятся на  $2^{2m+3}$  (так как  $v(2m+1) \geq 1$  и  $v(2m+2) \geq 2$ ), тогда как третье делится на  $2^{2m+2}$  и не делится на  $2^{2m+3}$ . Значит,  $A_{2m+2}$  делится на  $2^{2m+2}$  и не делится на  $2^{2m+3}$ , что и требовалось доказать. Остается заметить, что  $A_{100} > 2^{100}$ , и если бы  $A_{100}$  было степенью двойки, то оно было бы кратно  $2^{101}$ .

4. При  $n = 4$ .

Оценка. «Топовые» команды должны сыграть между собой  $\frac{n(n-1)}{2}$  матчей за  $2n - 1$  тур.

Условие задачи будет выполнено, если  $\frac{n(n-1)}{2} \leq 2n - 1$ . Это неравенство приводится к виду  $n^2 - 5n + 2 \leq 0$ . При  $n \geq 5$  это неравенство не выполняется. Учитывая, что  $n$  – натуральное число, получим  $n = 4$ . В этом случае 4 «топовые» команды должны провести между собой 6 матчей за 6 туров из семи.

Пример. Разобьем 8 команд на две четверки, в одной из которых три «топовых», а в другой – одна. В первых трех турах в каждой четверке команды играют между собой и условие задачи автоматически выполняется. В следующих четырех турах встречаются команды из разных четверок по «шеффенгенской» системе; например, см. таблицу (буквами обозначены команды, цифрами – номера туров, цветом выделены «топовые» команды и матчи между ними).

	Е	F	G	H
A	4	7	6	5
B	5	4	7	6
C	6	5	4	7
D	7	6	5	4

Пример можно построить и в явном виде, предъявив расписание матчей по турам.

5. Пусть  $a = x^2 + y^2$  и  $x - y > 1$ , где  $x$  и  $y$  – натуральные числа. Тогда

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) + 1 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 + (x + y)^2 + (x - y)^2 + 1^2,$$

что и требовалось.

Все слагаемые попарно различны, так как  $2xy \geq 2x > x + y > x - y > 1$  и  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) > x + y$ . Кроме того,  $x^2 - y^2 \neq 2xy$ . Это можно доказать различными способами.

Например,  $x^2 - y^2 = 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 = 2y^2$ , что не выполняется ни при каких натуральных значениях  $x$  и  $y$ , так как квадрат и удвоенный квадрат натуральных чисел не могут быть равны.

Также можно рассмотреть равенство  $x^2 - y^2 = 2xy$  как квадратное уравнение относительно любой из переменных и показать, что его корни не целые.

6. Треугольники  $PCQ$  и  $ACB$  подобны, поэтому их медианы образуют одинаковые углы со сторонами, к которым они проведены:  $\angle CNQ = \angle CMB$  (рис.1). Следовательно, точки  $M, D$ ,

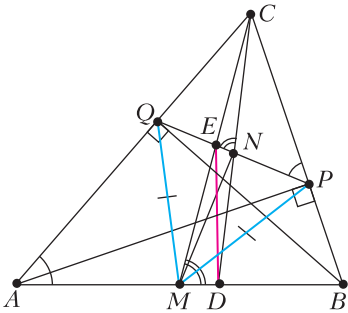


Рис. 1

$N$  и  $E$  лежат на одной окружности. Треугольник  $PMQ$  – равнобедренный, значит,  $MN \perp PQ$ . Тогда  $ME$  – диаметр этой окружности. Следовательно,  $\angle EDM = 90^\circ$ .

Отметим, что  $CM$  – медиана треугольника  $ABC$ , а  $CD$  – симедиана; в треугольнике  $PCQ$  они меняются «ролями».

7. Нет.

Пусть Петя на ход вперед знает, какие клетки обстреляет Вася. Тогда сначала он ставит коня на черную клетку, которую Вася первым ходом не обстреляет. Из каждой черной клетки можно сделать ход на 4 другие черные клетки (рис.2). Петя ходит на ту из них, которую Вася следующим ходом не обстреляет. Действуя так, Петя предотвратит победу Васи в течение любого числа ходов.

8. При  $N = 4k$ .

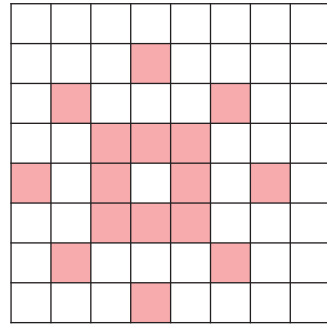


Рис. 2

Будем рассуждать «с конца». Пусть у нас получились целые числа. Тогда за один шаг до этого суммы во всех парах были четными. Теперь рассмотрим несколько случаев.

1)  $N = 4k + 2$  – числа разбиваются на пары, в каждой паре сумма четна. Но сумма всех данных чисел нечетна. Противоречие.

2)  $N = 2k + 1$ . Пусть  $x$  – первое число, тогда второе число  $2k - x$ , третье  $2l + x$ , четвертое  $2m - x$  и так далее, последнее число имеет вид  $2s + x$ . Его сумма с первым числом равна  $2s + 2x$ . Так как это четное число, то  $x$  целое, а значит, все указанные числа целые. Но уже после первого шага обязательно найдется нецелое число, так как хотя бы одна пара соседей – числа разной четности.

3)  $N = 4k$ . Существует пример. Расставим числа по возрастанию:  $1, 2, 3, \dots, 4k$ . Тогда на втором шаге все числа снова станут целыми.

9. Заметим, что числа  $1, 11, 13, 17$  и  $19$  не имеют общих делителей ни с какими другими расставленными числами. Из каждой правильной мишени перестановками чисел  $1, 11, 13, 17, 19$  можно получить  $5! = 120$  правильных мишеней. Такие мишени не получают друг из друга поворотом. Значит, общее количество правильных мишеней кратно  $120$ , а следовательно, и  $20$  тоже.

10. Любое  $n > 3$  можно представить в виде суммы  $n = 2^m + k$ , где  $0 \leq k < 2^m$  (т.е.  $2^m$  – наибольшая степень двойки, не превосходящая  $n$ ). Построим некоторую окружность с центром  $O$ , выберем на ней две точки  $A$  и  $B$ , разобьем меньшую дугу  $AB$  на  $k$  равных дуг (если  $k = 0$ , то точки  $A$  и  $B$  совпадут) и построим хорды, стягивающие эти дуги. Далее построим описанную окружность треугольника  $OAB$ , разобьем дугу  $AB$  этой окружности, содержащую точку  $O$ , на  $2^m$  равных дуг

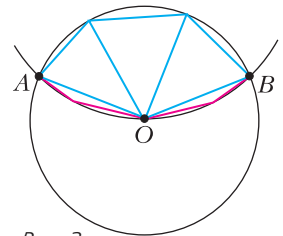


Рис. 3

и также построим хорды, стягивающие их (рис. 3; здесь  $m = 2$  и  $k = 3$ ). После этих построений получится выпуклый  $n$ -угольник, который можно разбить непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Действительно, соединив точку  $O$  с точками, делящими первую окружность на дуги, мы получим  $k$  равнобедренных треугольников. Точки деления второй окружности можно сначала соединить через одну, при этом будут отрезаны равнобедренные треугольники, а в оставшейся фигуре количество хорд на второй окружности уменьшится вдвое. После этого можно снова соединить точки через одну и так далее.

Осталось добиться того, чтобы хорды первой и второй окружностей были равными. Если точки  $A$  и  $B$  выбрать очень близко друг к другу, то хорды первой окружности будут меньше, чем хорды второй. Будем двигать точки  $A$  и  $B$  по окружности в разные стороны, непрерывно увеличивая длину дуги  $AB$ . Когда они станут почти диаметрально противоположными, дуга  $AB$  второй окружности будет очень близка к диаметру первой. Значит, дуга  $AB$  второй окружности будет меньше, чем дуга первой, а так как  $k < 2^m$ , то хорды второй окружности будут меньше, чем хорды первой. Следовательно, в силу теоремы о промежуточном значении, в какой-то момент длины хорд обеих окружностей были равны, т.е. построенный  $n$ -угольник был равносторонним.

**11.** Второй.

Разобьем доску на части так, как показано на рисунке 4. Тогда каждым ходом первый игрок закрасивает две клетки, находящиеся в одной части. В ответ второй может закрасить уголок, находящийся полностью в этой же части между только что закрасенными клетками (на рисунке 4 показаны два варианта ответного хода второго). Таким образом, у второго всегда будет ход, поэтому он не проиграет, а так как игра рано или поздно закончится, то он выиграет.

**12.** При  $N = 4k$  или  $N = 4k + 1$ .

*Оценка.* Пусть числа получилось расставить тре-

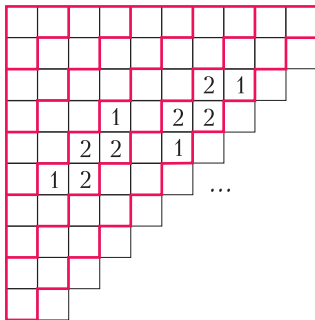


Рис. 4

буемым образом. Тогда разности между соседними числами равны  $1, 2, \dots, N - 1$  в каком-то порядке. Будем идти по кругу, следя за четностью чисел. При переходе через нечетную разность (и только в этом случае) четность будет меняться. Чтобы круг замкнулся, нечетных разностей должно быть четное количество. Но это будет только для  $N = 4k$  и  $N = 4k + 1$ .

*Примеры.* 1)  $N = 4k$ . Выкидываем число  $3k$ . Далее расставляем числа по часовой стрелке так:  $1, 4k, 2, 4k - 1, 3, 4k - 2, 4, 4k - 3, \dots, 3k + 1, k + 1$ . Тогда расставлены числа от 1 до  $k + 1$  и все числа, большие выкинутого. Получили разности от  $2k$  до  $4k - 1$  включительно. Затем от 1, двигаясь против часовой стрелки, последовательно расставляем:  $2k, 2k + 1, 2k - 1, 2k + 2, 2k - 2, 2k + 3, 2k - 3, \dots, 2k - (k - 2), 2k + (k - 1)$ , т.е. на нечетных местах числа уменьшаются от  $2k$  до  $k + 2$ , на четных местах они растут от  $2k + 1$  до  $3k - 1$ . Тем самым расставлены все оставшиеся числа, кроме выкинутого. Получили разности от 1 до  $2k - 3$  включительно. Разность  $2k - 1$  будет между единицей и числом  $2k$ . Разность  $2k - 2$  будет между числами  $3k - 1$  и  $k + 1$  и замкнет круг.

2)  $N = 4k + 1$ . Выкидываем число  $3k + 1$ . Далее расставляем числа так:  $1, 4k + 1, 2, 4k, 3, 4k - 1, 4, 4k - 2, \dots, 3k + 2, k + 1$ . Тогда расставлены числа от 1 до  $k + 1$  и все числа, большие выкинутого. Получили разности от  $2k + 1$  до  $4k$  включительно. После этого в другую сторону от единицы расставляем числа так:  $2k + 1, 2k, 2k + 2, 2k - 1, 2k + 3, 2k - 2, \dots, 2k - (k - 2), 2k + (k - 1)$ , т.е. на четных местах числа уменьшаются от  $2k$  до  $k + 2$ , на нечетных растут от  $2k + 1$  до  $3k$ . Тем самым расставлены все оставшиеся числа, кроме выкинутого. Получили разности от 1 до  $2k - 2$  включительно. Разность  $2k$  будет между единицей и числом  $2k + 1$ . Разность  $2k - 1$  будет между числами  $3k$  и  $k + 1$  и замкнет круг.

**13.** Можно.

Пусть, например,  $O$  – центр равностороннего треугольника  $ABC$  со стороной 3, а точки  $D, E$  и  $F$  делят отрезки  $OA, OB$  и  $OC$  в отношении  $2 : 1$

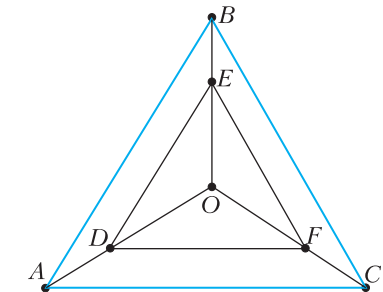


Рис. 5



соответственно, считая от  $O$  (рис.5). Тогда  $\triangle ABC$  можно разрезать на три равнобедренных треугольника с основанием 2 и углом  $120^\circ$  при вершине и три равнобедренные трапеции, основания которых равны 2 и 3, а угол при большем основании равен  $30^\circ$ .

Докажем, что каждый полученный треугольник может покрыть дугу  $60^\circ$ . Действительно, рассмотрим в окружности с центром  $S$  и радиусом 2 хорду  $DF$  длины 2 (рис.6). Она стягивает дугу

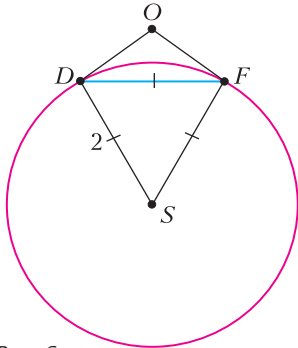


Рис. 6

величиной  $60^\circ$ . Касательные  $OD$  и  $OF$  к окружности образуют с этой хордой углы, равные  $30^\circ$ , поэтому угол  $DOF$  равен  $120^\circ$ . Следовательно, три дуги по  $60^\circ$  можно покрыть тремя равнобедренными треугольниками с основанием 2 и углом при вершине, равным  $120^\circ$ .

Теперь докажем, что полученная трапеция может покрыть дугу немного больше  $60^\circ$ . Действительно, высота трапеции  $ADFC$  равна

$$h_1 = \frac{AC - DF}{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

а высота сегмента окружности радиуса 2, ограниченного хордой длины 2 и соответствующей дугой, равна  $h_2 = 2 - \sqrt{3}$ , так как высота треугольника  $DSF$  равна  $\sqrt{3}$ . Сравним  $h_1$  и  $h_2$ . Так как  $147 > 144$ ,

то  $7\sqrt{3} > 12$ , т.е.  $\sqrt{3} > \frac{12}{7}$ . Тогда  $\frac{\sqrt{3}}{6} > \frac{2}{7}$ , а

$2 - \sqrt{3} < \frac{2}{7}$ . Таким образом,  $h_1 > h_2$ , следовательно, рассмотренный сегмент можно покрыть трапецией с небольшим запасом, поэтому можно

чуть-чуть увеличить радиус окружности. Более того, если немного уменьшить высоту трапеции и, тем самым, увеличить основание треугольника, то треугольник  $DOF$  также будет покрывать дугу окружности большего радиуса.

### ПРОЗРАЧНОЕ И НЕПРОЗРАЧНОЕ

1. Солнечная или, что романтичнее, лунная дорожка на воде, изображенная на первом рисунке в статье, это известная задача. Ширина и длина

дорожки, т.е. углы наблюдения, зависят от положения источника света и наблюдателя и диапазона наклонов поверхности волн. На втором рисунке вы видите рыбу, отраженную от поверхности воды. Снимок сделан из-под воды. А почему поверхность кажется зеркальной? Потому что это так называемое полное внутреннее отражение. Правда, в индустрии красоты им воспользоваться будет затруднительно. Попробуйте разобраться, почему.

2. Первая простейшая мысль такова. Если мы подозреваем, что видимое нами это мнимое изображение, то просто надо посмотреть на то место, где должен быть объект. А если это невозможно, может быть, поможет перемещение, например, глаза? Но нет, изображение не переместится. А вот поискать дубликат может помочь... Правда, бывают катастрофические ситуации, когда мнимые изображения сливаются. Когда?

3. Ультразвуковое «зрение» летучих мышей и дельфинов человек освоить мог бы. Но при частоте, например, 30 кГц и скорости звука в воздухе 300 м/с получается длина волны 1 см. Будет примерно такая разрешающая способность – это очень плохо. В воде скорость звука втрое больше, но дельфины работают на более высокой частоте, в итоге получается примерно то же. Инфракрасное «зрение» змей освоить вроде бы можно, вопрос в том, из чего и как сделать «глаз». То, как он реализован у змей, дает, несмотря на змеиную мудрость, низкую разрешающую способность. В ультрафиолете видеть вообще не получится – ближний ультрафиолет вреден, а дальний (короче 0,2 мкм) поглощается атмосферой.

4. Как зачем? Чтобы «глаза светились в темноте»! А на самом деле – чтобы вернуть поглощенные кванты в клетку, вдруг она их поглотит. Если при одном проходе поглощается 30–50% исходного излучения, то при втором добавится еще 20–25% от исходного. Понятно, почему? А, скажем, интерференционное покрытие может что-то дать? Может, но немного – от поверхности хрусталика отражаются единицы процентов.

5. Которое светит в ультрафиолете. А для этого оно должно быть холоднее или теплее? Согласно закону Вина, длина волны, на которой плотность мощности максимальна, обратно пропорциональна температуре. Чтобы уполонинить длину волны, надо удвоить температуру фотосферы. Это будет спектральный класс А. Например, это может быть  $\alpha$  Лирь (Вега) или  $\alpha$  Большого Пса (Сириус). Шикарные звездочки.

6. Расстояние видимости зависит, естественно, от размера капель  $D$  и от среднего расстояния между ними  $L$ . Рассмотрим простую модель –

капли расположены слоями, слой от слоя на расстоянии  $L$ , а в слое опять же на среднем расстоянии  $L$ . Тогда каждый слой перехватывает долю  $D^2/L^2$  квантов, средний пробег будет  $L^2/D^2$  слоев, т.е.  $L^3/D^2$ . Любопытства ради, посчитайте длину свободного пробега в воздухе, которым мы дышим.

7. Если коэффициенты преломления совпадают, то рассеивания не будет. А что будет, если коэффициенты преломления зависят от длины волны, причем при какой-то они совпадают? На этой длине волны будет прозрачность. Кстати, а может за прозрачным объектом быть тень? Странный вопрос. Например, за любой лупой есть тень – раз есть перераспределение потока, то возможна и тень.

**ОЛИМПИАДА  
«ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»**

**Ф И З И К А**

**Отборочный этап**

**Часть I**

1. 0.      2. 1,5.      3. 441.

**Часть II**

1. Определим  $R$  – радиус орбиты ГСС (геостационарного спутника). Период его обращения должен равняться земным суткам, т.е.  $\frac{2\pi R}{v} = T$

( $v$  – скорость ГСС). С другой стороны, из уравнения для центростремительной компоненты ускорения спутника, которое создается силой притяжения к Земле (ее массу обозначим  $M$ ):

$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$ , следует, что  $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ . Значит,

$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$ , или, поскольку  $\frac{GM}{R_3^2} = g$ ,

$R = R_3 \cdot \sqrt[3]{\frac{gT^2}{4\pi^2 R_3}} \approx 6,62R_3 \approx 42200$  км. Скорость

спутника на этой орбите равна  $v = \sqrt{\frac{gR_3^2}{R}} \approx$

$\approx 3,07$  км/с. За Землей существует область полной тени, в которую солнечные лучи не попадают. Из-за конечного размера Солнца эта область ограничена: ее длина  $L_{\max} = \frac{2R_3}{\beta} \approx 1,4 \cdot 10^6$  км,

что значительно больше  $R$ . Таким образом, сходимость области земной тени в нашей задаче можно пренебречь (на самом деле те лучи, которые проходят у самого края Земли, испытывают преломление в земной атмосфере, что значитель-

но сокращает размеры области полной тени, но она все равно остается достаточно велика). Но ГСС далеко не всегда проходит через эту область – ведь его орбита лежит в экваториальной плоскости Земли, которая наклонена по отношению к плоскости земной орбиты. Этот угол, как видно из рисунка 7, а, постоянно изменяется: ось вращения

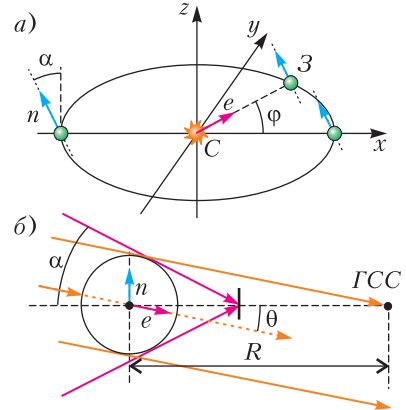


Рис. 7

Земли сохраняет постоянное направление в пространстве (вдоль этой оси направлен вектор  $\vec{n}$  с единичной длиной) и в процессе движения Земли по орбите Солнце оказывается то «выше», то «ниже» экваториальной плоскости по отношению к  $\vec{n}$ . Например, вблизи положения летнего солнцестояния солнечные лучи падают «сверху» под углом  $\alpha$  к экваториальной плоскости. Тогда область тени закрывает точки экваториальной плоскости на расстоянии не более  $R_1 = \frac{R_3}{\sin \alpha} \approx 2,51R_3 \approx 16000$  км от центра Земли. Значит, в этот период ГСС при движении по своей орбите не проходит через область полной тени. Аналогично обстоит дело вблизи положения зимнего солнцестояния. Однако есть моменты, когда Солнце оказывается вблизи экваториальной плоскости, и тогда на ГСС происходят солнечные затмения, создаваемые Землей. Понятно, что длительность затмений максимальна, когда Солнце попадает точно в экваториальную плоскость. Тогда ГСС преодолевает область полной тени, ширина которой практически равна земному диаметру. Если пренебречь кривизной орбиты ГСС на этом участке (длина орбиты ГСС больше диаметра Земли более чем в 20 раз), то максимальное время затмения будет  $\tau_{\max} \approx \frac{2R_3}{v} \approx 69,2$  мин.

Учет кривизны орбиты незначительно изменяет результат:  $\tau_{\max} \approx \frac{2R}{v} \arcsin\left(\frac{R_3}{R}\right) \approx 69,4$  мин. Теперь определим периоды, когда затмений не бы-

вает. Как видно из рисунка 7,б, ГСС проходит через область полной тени, если угол между солнечными лучами и экваториальной плоскостью  $|\theta| < \varphi = \arcsin\left(\frac{R_3}{R}\right) \approx 8,7^\circ$ . Введем в солнечной системе декартовы координаты: плоскость  $(xy)$  – плоскость земной орбиты, причем ось  $x$  проходит через положение солнцестояний. Тогда единичный вектор, направленный вдоль оси вращения Земли, имеет координаты  $\vec{n} = (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ . Введем еще один вектор с единичной длиной  $\vec{e}$  (см. рис.7,а), направленный вдоль радиуса орбиты Земли. Нетрудно заметить, что его координаты  $\vec{e} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ , где  $\varphi$  – угол поворота Земли от положения летнего солнцестояния. Как видно из рисунка 7,б, угол между этими векторами равен  $90^\circ + \theta$ . Значит,

$$\sin \theta = -\cos(90^\circ + \theta) = -\vec{n} \cdot \vec{e} = \sin \alpha \cos \varphi.$$

Поэтому условием прохождения через область полной тени является требование  $\sin \alpha |\cos \varphi| < \frac{R_3}{R}$ , т.е.  $|\cos \varphi| < \frac{R_3}{R \sin \alpha} \approx 0,380$ . Значит, в течение года есть два периода без затмений, длительность которых

$$t \approx \frac{1}{\pi} \arccos \frac{R_3}{R \sin \alpha} \cdot T_0 \approx 137 \text{ суток.}$$

Изменение расстояния между Солнцем и Землей и изменение ориентации орбиты ГСС по отношению к Солнцу в течение года, конечно же, влияют на поток солнечной энергии, падающей на спутник, однако для нашего исследования (в котором нас интересует только то, попадает ли в принципе солнечный свет на спутник или нет) эти факторы оказались несущественными.

**2.** Рассмотрим прохождение лучей через шарик. Пусть луч, падающий на поверхность шарика в точке  $A$  (рис.8), идет на расстоянии  $b$  от параллельной ему прямой, проходящей через центр шарика, в плоскости  $(xy)$ . Тогда угол падения равен  $\alpha = \arcsin \frac{b}{R}$ , а угол преломления равен  $\beta = \arcsin \frac{b}{nR}$ . Поскольку треугольник  $AOB$  рав-

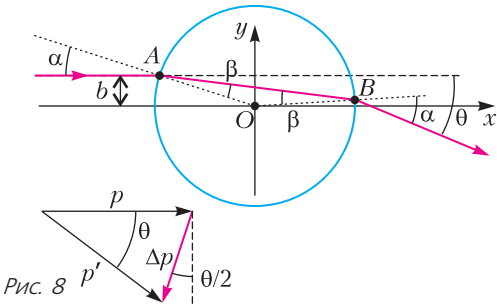


Рис. 8

нобренный, то угол падения луча на поверхность шара изнутри равен  $\beta$ , а угол преломления в точке  $B$  равен  $\alpha$ . Нетрудно заметить, что общий угол поворота луча от исходного направления равен

$$\theta = 2(\alpha - \beta) = 2\left(\arcsin \frac{b}{R} - \arcsin \frac{b}{nR}\right).$$

Если рассматривать свет как поток фотонов, то очевидно, что их энергия не изменяется (в веществе шара нет поглощения). Следовательно, не изменяется и модуль импульса. Но тогда изменение импульса каждого фотона, прошедшего через шарик, будет равно (см. рис.8)  $|\Delta \vec{p}| = 2|\vec{p}|\sin \frac{\theta}{2} = 2 \frac{E}{c} \sin \frac{\theta}{2}$ . Проекция этого импульса на ось  $y$  равна  $\Delta p_y = -|\Delta \vec{p}| \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{E}{c} \sin \theta$ , поэтому шарик при прохождении одного фотона получит импульс отдачи, проекция которого на ось  $y$  равна

$\Delta p'_y = +\frac{E}{c} \sin \theta$ . Отметим, что при  $b \ll R$  соответствующие выражения упрощаются:

$$\theta \approx \frac{2(n-1)b}{nR} \text{ и } \Delta p'_y \approx +\frac{E}{c} \frac{2(n-1)}{nR} b.$$

Энергия светового потока в пучке равномерно распределена по площади полукруга, т.е. на единицу площади в единицу времени приходится энергия  $\frac{2P}{\pi r^2}$ , где

$P$  – мощность светового пучка. Рассмотрим малую часть площади пучка (рис.9), ограниченную интервалом расстояний от оси  $(b, b + \Delta b)$  и интервалом значений угла  $\varphi$ , отсчитываемого от оси  $y$ ,  $(\varphi, \varphi + \Delta \varphi)$ . Энергия, приходящаяся на эту часть в единицу времени,

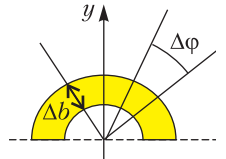


Рис. 9

равна  $\frac{2P}{\pi r^2} b \Delta \varphi \Delta b$ . Проекция импульса отдачи, переданного от этой части светового пучка шарик в единицу времени, на ось, т.е. действующая сила, равна  $\Delta F_y = \frac{1}{c} \frac{2(n-1)}{nR} b \cdot \frac{2P}{\pi r^2} b \Delta \varphi \Delta b \cos \varphi$ . За-

метим, что у двух встречных пучков  $x$ -компоненты сил сократятся (как и компоненты вдоль направления, перпендикулярного  $x$  и  $y$ ), а  $y$ -компоненты удвоятся. Тогда ясно, что вклад в общую силу, действующую на шарик по оси  $y$ , от этой части площади пучков, равен

$$\Delta F_y = \frac{8(n-1)P}{\pi c n R} \frac{b^2}{r^2} \Delta b \cos \varphi \cdot \Delta \varphi.$$

Суммы по всем возможным значениям  $0 \leq b \leq r$  и  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pm \frac{\pi}{2}$

дают  $\sum b^2 \Delta b = \frac{1}{3} \sum \Delta(b^3) = \frac{r^3}{3}$  и  $\sum \cos \varphi \cdot \Delta \varphi =$

$= \sum \Delta \sin \varphi = 2$ . Итак, результирующая сила направлена перпендикулярно пучкам и равна  $F_y = \frac{16(n-1)r}{3\pi cnR} P$ . Чтобы она уравновесила силу тяжести шарика  $mg$ , должно выполняться условие

$$P = \frac{3\pi cnR}{16(n-1)r} mg \approx 18 \text{ мкВт.}$$

**3.** Пусть  $\varepsilon$  и  $r$  – ЭДС и внутреннее сопротивление аккумулятора, а  $R$  – сопротивление резистора. Согласно условию, напряжение на лампе можно связать с протекающим через нее током соотношением  $U = \alpha I^2$ , где  $\alpha$  – постоянный коэффициент. Тогда при подключении одной лампы:  $\varepsilon - I_1 r = \alpha I_1^2$ , а при подключении двух:

$\varepsilon - I_2 r = \alpha \left(\frac{I_2}{2}\right)^2$ . Разделив эти уравнения одно на другое, найдем  $\varepsilon = \frac{I_1 I_2 (4I_1 - I_2)}{(2I_1 - I_2)(2I_1 + I_2)} r = \bar{I} r$ .

Подставив значения  $I_1$  и  $I_2$ , получим  $\bar{I} = 4,00 \text{ А}$ . Тогда при подключении резистора:

$\varepsilon = I_0 (r + R) = \bar{I} r$ , т.е.  $R = \frac{\bar{I} - I_0}{I_0} r = 9r$ . Теперь для нашей схемы, обозначив  $\varphi_A - \varphi_B = U$ , запишем (рис.10)

$$\begin{aligned} U &= -\bar{I}r + I_1' r + \alpha I_1'^2, \\ U &= -\bar{I}r + I_2' \cdot 10r + \alpha I_2'^2, \\ U &= \bar{I}r - I_3' \cdot 10r, \\ U &= \bar{I}r - I_4' r, \\ I_1' + I_2' &= I_3' + I_4'. \end{aligned}$$

Эта система уравнений позволяет найти все не-

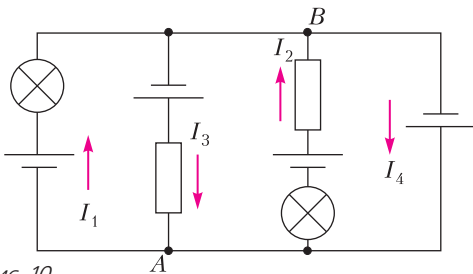


Рис. 10

известные, но при аналитическом решении она приводит к уравнению высокой степени, поэтому лучше ее решать именно в числах. Для этого введем безразмерные переменные  $x_i = \frac{I_i'}{\bar{I}}$ ,  $i =$

$= 1, 2, 3, 4$ , и  $u = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{U}{\bar{I}r}$ . Учтем также, что

$$\alpha = \frac{\bar{I} - I_1}{I_1^2} r = \frac{\bar{I}(\bar{I} - I_1)}{I_1^2} \frac{r}{\bar{I}} = \frac{40}{9} \frac{r}{\bar{I}}.$$

стема преобразуется к виду

$$\begin{aligned} x_1^2 + \frac{9}{40} x_1 - \frac{9}{40} (1+u) &= 0, & x_1 &= \frac{8}{9} (-0,1 + \sqrt{0,01+z}), \\ x_2^2 + \frac{9}{4} x_2 - \frac{9}{40} (1+u) &= 0, & x_2 &= \frac{8}{9} (-1 + \sqrt{1+z}), \\ x_3 &= 0, 1 - 0, 1u, & \Rightarrow z &= \frac{8}{45} (1+u), \\ x_4 &= 1 - u, & \sqrt{1+z} + \sqrt{0,01+z} &= \\ x_1 + x_2 &= x_3 + x_4 & &= \frac{55}{18} - \frac{11}{2} z. \end{aligned}$$

Теперь все свелось к решению последнего уравнения для переменной  $z$ , а затем через нее выражаются токи через обе лампы. Проще всего решить его численно – например, с помощью программы Excel, вычислив в соседних колонках значения правой и левой частей уравнения. Тогда получим  $z \approx 0,25760 \pm 0,00001$ . Сам по себе корень можно найти и с большей точностью, но это не имеет особого смысла – токи измерены с точностью около 1%, так что мы и так сохранили два «запасных» порядка для промежуточных вычислений. Теперь легко можно найти  $x_1 \approx 0,46947 \pm 0,00001$  и  $x_2 \approx 0,13661 \pm 0,00001$  (и здесь указаны ошибки вычислений при решении уравнений). Как видно, точность результатов при таком подходе определяется в основном точностью данных измерений. Поэтому для величин токов через лампы (в этих выражениях будем указывать реальную точность) следует принять  $I_1' \approx (1,878 \pm 0,005) \text{ А}$  и  $I_2' \approx (0,546 \pm 0,005) \text{ А}$ .

Мощность, потребляемая лампой, равна  $P = U(I) \cdot I = \alpha I^3$ , поэтому

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{I_1'}{I_2'}\right)^3 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 \approx 40,6 \pm 1,1.$$

Относительная ошибка в этом результате увеличивается: само отношение мы находим с точностью чуть лучше 1%, поэтому его куб мы получаем с точностью чуть лучше 3%, так как при малых отклонениях  $\frac{\Delta(a^3)}{a^3} \approx 3 \frac{\Delta a}{a}$ .

**4.** Давление смеси создается суммой парциальных давлений сухого воздуха и паров веществ. Обозначим  $v$  – количество сухого воздуха в смеси,  $v_1$  и  $v_2$  – количества веществ 1 и 2. Тогда, пока оба вещества находятся только в газообразном состоянии, давление равно  $p = (v + v_1 + v_2) \frac{RT}{V}$ . Точка излома на изотерме паровоздушной смеси появляется, когда пар начинает конденсироваться. Единственность излома означает, что оба вещества начинают конденсироваться одновременно, т.е. парциальное дав-

ление каждого из них становится равным давлению насыщенного пара при одном и том же значении объема. Значит, в точке излома  $p_0 V_0 = (v + v_1 + v_2) RT = vRT + p_1 + p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  – давления насыщенных паров 1 и 2 при температуре  $T$ . Кроме того,  $\frac{RT}{V_0} = \frac{p_1}{v_1} = \frac{p_2}{v_2}$ , откуда  $\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_2}{v_1}$ . Запишем выражение для давления при значении объема  $V_A < V_0$ :  $p_A = p_1 + p_2 + \frac{vRT}{V_A}$ . Исключая из этого выражения и из уравнения  $p_0 = p_1 + p_2 + \frac{vRT}{V_0}$  значение  $vRT$ , получим  $p_1 + p_2 = \frac{p_0 V_0 - p_A V_A}{V_0 - V_A}$ . Например, для  $V_A = 30$  л найдем  $p_1 + p_2 \approx 33,785$  кПа. Аналогично, для  $V_B = 40$  л найдем  $p_1 + p_2 \approx 33,76$  кПа и для большей точности возьмем среднее этих значений:  $p_1 + p_2 \approx 33,77$  кПа.

Вспользуемся графиком давлений насыщенных паров: температура изотермы соответствует температуре, при которой сумма этих давлений равна найденному значению. Можно заметить, что с неплохой точностью нам подходит  $T \approx 271,0$  К. При этом  $p_1 \approx 11,26$  кПа и  $p_2 \approx 22,51$  кПа (конечно, последний разряд здесь указан «про запас» – реальная точность позволяет уверенно находить значения с точностью не выше  $\pm 0,2$  кПа). Как видно,  $\frac{p_2}{p_1} \approx 2,0$ . Значит,  $\frac{v_2}{v_1} \approx 2,0$ . Это значение при аккуратной работе может быть определено с точностью около 3%.

Теперь мы можем определить требуемые количества веществ:  $v_1 = \frac{p_1 V_0}{RT} \approx 0,25$  моль и  $v_2 \approx 0,50$  моль.

При температуре изотермы и объеме  $V_B = 40$  л оба вещества частично сконденсированы, и для их полного испарения температуру нужно повысить, чтобы давление каждой компоненты стало меньше или равно давлению насыщенного пара. Значит, для определения минимальной необходимой температуры нам нужно решить уравнение  $\frac{vRT}{V_B} = p_n(T)$ . Это можно сделать графически, построив на графике для каждого вещества прямую  $p = \frac{vRT}{V_B}$  и найдя ее пересечение с  $p_n(T)$ , или численно, сняв зависимость  $p_n(T)$  и вычислив величину  $\frac{p_n(T)}{T}$ , а затем найти точку, где она равна  $\frac{vR}{V_B}$ . Получается, что в ходе изохорического нагревания при объеме  $V_B = 40$  л

вещество 2 полностью испарится при температуре  $T_2 \approx 272,6$  К, а вещество 1 – при  $T_1 \approx 273,0$  К. Значит, для полного испарения обеих компонент нужно нагреть смесь до 273 К.

**Заключительный этап**

ВАРИАНТ 1

**Задание 1**

**Вопрос.** Ясно, что для придания вращения необходимо, чтобы момент внешней силы как минимум уравновесил момент силы тяжести, действующей на кубик. Момент силы тяжести относительно одного из нижних ребер равен  $M = mg \frac{a}{2}$ , где  $a$  – длина ребра кубика. Минимальная сила будет соответствовать максимальной величине плеча силы  $l_{\max} = a\sqrt{2}$ . Поэтому  $F_{\min} = \frac{M}{l_{\max}} = \frac{mg}{2\sqrt{2}}$ . При этом горизонтальная проекция внешней силы будет равна  $F = \frac{F_{\min}}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{2} < \mu mg$ , т.е. кубик скользить не будет.

**Задача.** Из сил, приложенных к уголку, только сила реакция гвоздя и сила тяжести короткого плеча имеют ненулевые моменты относительно шарнира (рис. 11). Запишем правило моментов (с учетом однородности уголка массой  $m$ ):

$$\frac{2m}{5} g \frac{a}{2} \sin \alpha - N \frac{3a}{4} = 0,$$

откуда  $N = \frac{4mg}{25}$ .

Здесь мы учли, что  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ . Из условия равновесия сил в проекциях на

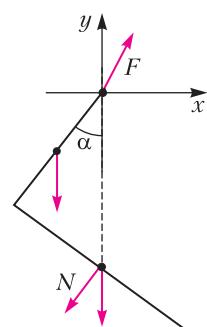


Рис. 11

$$F_x = N \sin \alpha = \frac{12mg}{125},$$

$$F_y = mg + N \cos \alpha = \frac{141mg}{125}$$

находим

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{3\sqrt{89}}{25} mg.$$

Ясно, что до появления гвоздя сила реакции шарнира была равна  $mg$ , поэтому из-за наличия гвоздя эта сила увеличилась в  $\frac{3\sqrt{89}}{25} \approx 1,13$  раза.

**Задание 2**

**Вопрос.** Рассмотрим изменение объема газа от  $V_1$  до  $V_2$ . Изменение внутренней энергии при

постоянном давлении  $p$  равно

$$\Delta U = \Delta \left( \frac{3}{2} vRT \right) = \frac{3}{2} \Delta(pV) = \frac{3}{2} p(V_2 - V_1).$$

Работа газа в изобарном процессе равна  $A = p(V_2 - V_1) = \frac{2}{3} \Delta U$ . Поэтому  $Q = A + \Delta U = \frac{5}{3} \Delta U$ .

**Задача.** Поскольку электрическое поле однородно, сила притяжения между поршнем и дном цилиндра не зависит от положения поршня и

равна  $F_{эл} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$ . Следовательно, давление  $p$  газа во время опыта постоянно и равно, с учетом

наружного атмосферного давления и веса поршня,  $p = p_0 + \frac{mg + q^2/(2\epsilon_0 S)}{S}$ . Полученное газом

количество теплоты связано с работой по перемещению поршня соотношением  $Q = \frac{5}{2} A$ , или

$pS \cdot \Delta h = \frac{2}{5} Q$ . Поэтому смещение поршня равно

$$\Delta h = \frac{4}{5} \frac{\epsilon_0 QS}{2\epsilon_0 (p_0 S^2 + mgS) + q^2}.$$

### Задание 3

**Вопрос.** В общем случае мощность, потребляемая элементом цепи, вычисляется по формуле  $P = IU$ . В случае заданной вольт-амперной характеристики  $U = \mathcal{E} - rI$ , или  $U + rf(U) = \mathcal{E}$ . Это уравнение может решаться как аналитически, так и графически, а затем вычисляется  $P = Uf(U)$ .

**Задача.** Рассмотрим гирлянду из  $n$  светодиодов, в которой течет ток, т.е. ЭДС источника  $\mathcal{E} > nU_0$ .

Сила тока  $I = \frac{\mathcal{E} - nU_0}{R}$  (где  $R$  – сопротивление внешней части цепи). Потребляемая гирляндой

мощность  $P = nU_0 I = nU_0 \frac{\mathcal{E} - nU_0}{R} = P_0 n(\bar{n} - n)$ ,

где  $P_0 = \frac{U_0^2}{R}$  и  $\bar{n} = \frac{\mathcal{E}}{U_0}$ . Как видно, зависимость

мощности от числа светодиодов – квадратичная и максимум мощности соответствует значению

$n = \frac{\bar{n}}{2}$ . Из соотношений  $P_1 = P_0 n_1 (\bar{n} - n_1)$  и

$P_2 = P_0 n_2 (\bar{n} - n_2)$  получаем  $P_2 n_1 (\bar{n} - n_1) =$

$= P_1 n_2 (\bar{n} - n_2)$ . Таким образом,  $\bar{n} = \frac{n_2^2 P_1 - n_1^2 P_2}{n_2 P_1 - n_1 P_2} =$

$= 45$ . Следовательно,  $\mathcal{E} = \bar{n} U_0 = 45$  В. Поскольку число светодиодов – целое число, а парабола

симметрична относительно оси, то можно сделать вывод, что максимум мощности достигается

при  $n = 22$  и  $n = 23$ . По условию оптимальности нам нужна меньшая сила тока, поэтому  $n_{\text{опт}} = 23$ . Соответственно, максимальная мощность

$$P_m = P_1 \frac{n_{\text{опт}} (\bar{n} - n_{\text{опт}})}{n_1 (\bar{n} - n_1)} = \frac{253}{175} P_1 = 253 \text{ Вт}.$$

### Задание 4

**Вопрос.** При выводе формул, описывающих тонкие линзы, используются два приближения: пренебрегают смещением световых лучей вдоль плоскости линзы по сравнению с ее диаметром и

считают малыми все углы между световыми лучами и главной оптической осью линзы (используются соотношения *параксиального приближения*  $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$ ).

Смещение луча вдоль плоскости линзы по величине порядка геометрической толщины самой линзы, т.е. ее толщина должна быть много меньше ее диаметра. Это требование также можно переформулировать следующим образом: диаметр линзы должен быть много меньше радиусов кривизны ограничивающих ее сферических поверхностей. Второе требование – все рассматриваемые лучи должны быть параксиальными.

**Задача.** Прямые изображения предметов создаются рассеивающие линзы при любом расстоянии от предмета до линзы и собирающие линзы, когда расстояние от предмета до линзы меньше ее фокусного расстояния. В обоих случаях изображение будет мнимым, т.е. будет располагаться с предметом по одну сторону от линзы. Пусть  $a$  – расстояние от предмета до линзы, а  $b = -|b|$  – расстояние от линзы до мнимого изображения.

Для рассеивающей линзы  $a = |F| + \frac{l}{2}$ , а

$|b| = |F| - \frac{l}{2}$ . Согласно формуле линзы,

$\frac{1}{|F| + \frac{l}{2}} - \frac{1}{|F| - \frac{l}{2}} = -\frac{1}{|F|}$ , или  $|F|^2 - l|F| - \frac{l^2}{4} = 0$ .

Выбирая положительный корень, находим

$|F| = \frac{(\sqrt{2} + 1)l}{2} \approx 24,14$  см. Аналогично, для собирающей линзы  $a = F - \frac{l}{2}$ ,  $|b| = F + \frac{l}{2}$ ,

$F^2 - lF - \frac{l^2}{4} = 0$ ,  $F = \frac{(\sqrt{2} + 1)l}{2} \approx 24,14$  см. В общем виде  $F = \pm \frac{(\sqrt{2} + 1)l}{2} \approx \pm 24,14$  см.

ВАРИАНТ 2

**Задание 1**

**Вопрос.** Пусть  $\vec{v}_{1,2}$  – скорости тел до удара, а  $\vec{V}$  – их общая скорость после удара. Тогда из закона сохранения импульса  $m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = 2m\vec{V}$  следует  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 2\vec{V}$ . Возведем это соотношение в квадрат:  $v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha = 4V^2$ , где  $\alpha$  – искомый угол. По условию,  $\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = 2 \frac{2mV^2}{2}$ , откуда  $v_1^2 + v_2^2 = 4V^2$ . Значит,  $\cos \alpha = 0$ , т.е.  $\alpha = 90^\circ$ .

**Задача.** Законы сохранения импульса и энергии можно записать в виде

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = M\vec{V} - m_3\vec{v}_3,$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{m_3v_3^2}{2} = 11\frac{MV^2}{2},$$

причем  $M = m_1 + m_2 + m_3$ ,  $\vec{V}$  – скорость снаряда перед взрывом,  $m_1v_1^2 = \frac{11}{2}MV^2$ ,  $m_2v_2^2 = \frac{11}{4}MV^2$ . Отсюда  $m_3v_3^2 = \frac{11}{4}MV^2$ . Возводя уравнение, описывающее закон сохранения импульса, в квадрат и учитывая перпендикулярность пар векторов  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_3$  и  $\vec{V}$ , найдем  $m_3^2v_3^2 + M^2V^2 = m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2$ , или  $\frac{11}{4}m_3 + m_1 + m_2 + m_3 = \frac{11}{2}m_1 + \frac{11}{4}m_2$ , откуда  $m_3 = \frac{18m_1 + 7m_2}{15} = 2$  кг.

**Задание 2**

**Вопрос.** В данном процессе  $p(V) = p_0\left(1 - \frac{\rho_0}{m}V\right)$ , т.е. в координатах давление–объем диаграмма процесса – прямая линия. Работа равна площади под этой диаграммой (площади трапеции):  $A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1)$ . Ясно, что  $p_1 = \frac{2}{3}p_0$ ,  $p_2 = \frac{1}{3}p_0$ ,  $V_1 = \frac{m}{3\rho_0}$  и  $V_2 = \frac{m}{2\rho_0}$ . Поэтому  $A_{12} = \frac{7p_0m}{72\rho_0}$ .

**Задача.** Ясно, что идеальный газ в этом цикле получает тепло в процессе изохорного нагревания, обозначим полученное количество теплоты  $Q$ , и в процессе изотермического расширения, в котором подведенное количество теплоты равно совершенной работе  $A_+$ . Следовательно, от нагревателя получено количество теплоты  $Q_{\text{н}} = Q + A_+$ . Работа в цикле равна сумме положительной работы в процессе изотермического расширения  $A_+$  и отрицательной – в процессе изотермического сжатия  $A_-$ . В изотермических процессах  $p(V) = \frac{\nu RT}{V}$ , поэтому при одинаковом количестве вещества  $\nu$  и одинаковом соотношении граничных объемов модули работ пропорциональны абсолютным температурам изотерм. Следовательно,  $A_- = -\frac{1}{n}A_+$  и  $A = \left(1 - \frac{1}{n}\right)A_+ = \frac{n-1}{n}A_+$ . По условию,  $A = \frac{Q}{k}$ , поэтому  $A_+ = \frac{n}{k(n-1)}Q$ . Значит,  $Q_{\text{н}} = \frac{k(n-1) + n}{k(n-1)}Q$  и КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{n-1}{k(n-1) + n} = \frac{3}{14} \approx 0,214.$$

**Задание 3**

**Вопрос.** Потенциальная энергия электростатического взаимодействия системы точечных зарядов вычисляется как сумма энергий попарных взаимодействий. Для каждой пары зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r_{12}$ , энергия взаимодействия  $U_{12} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r_{12}}$ . Два одинаковых тела в предложенном примере будут разгоняться симметрично и одинаковая максимальная кинетическая энергия каждого из них достигается при удалении на очень большое расстояние (где энергия взаимодействия практически равна нулю). Если пренебречь потерями энергии на излучение, то максимальная кинетическая энергия каждого из тел будет равна половине начальной энергии взаимодействия, т.е.  $E_{\text{к}}^{\text{max}} = \frac{q_1q_2}{8\pi\epsilon_0l}$ .

**Задача.** Благодаря симметрии системы все три тела пройдут одинаковое расстояние. К моменту остановки работа сил трения будет равна изменению потенциальной энергии взаимодействия тел. Три тела образуют три пары, а расстояние между телами в результате смещения на  $s$  увеличится от  $a$  до  $a + s\sqrt{3}$ . Сила трения скольжения  $F_{\text{тр}} = \mu mg$ . Значит,

$$3\mu mgs = 3\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + s\sqrt{3}}\right),$$

откуда

$$s = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\mu mga} - \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Ответ имеет смысл, если  $\mu < \frac{\sqrt{3}q^2}{4\pi\epsilon_0mga^2}$  (в противном случае трение не позволит телам сдвинуться с места). Для смещений  $x < s$  кинетическая энергия тел может быть найдена из закона изменения энергии

$$\frac{3mv^2}{2} = 3\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + x\sqrt{3}}\right) - 3\mu mgx.$$

Выразим отсюда кинетическую энергию одного тела через величину  $z = (a + x\sqrt{3})\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0\mu mg}{\sqrt{3}q^2}}$ :

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0a} + \mu mg\frac{a}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{q^2\mu mg}{4\pi\epsilon_0\sqrt{3}}}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Из очевидного неравенства  $\frac{(z-1)^2}{z} \geq 0$  следует, что при любом  $z \geq 0$  справедливо неравенство  $z + \frac{1}{z} \geq 2$ , причем равенство (т.е. минимальное значение этого выражения) достигается при  $z = 1$ . При этом значении выражение для кинети-

ческой энергии сворачивается в полный квадрат. Значит, максимум скорости определяется формулой

$$u = \sqrt{\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a m}} - \sqrt{\frac{2\mu g a}{\sqrt{3}}}.$$

#### Задание 4

**Вопрос.** Явление полного внутреннего отражения состоит в том, что при падении на границу раздела двух сред из оптически более плотной среды 1 в оптически менее плотную среду 2 с углами падения  $\alpha \geq \alpha_0 = \arcsin \frac{1}{n}$  преломленный луч отсутствует и энергия падающего луча в отсутствие поглощения полностью переходит в энергию отраженного луча. Здесь  $n = \frac{n_1}{n_2}$  – относительный показатель преломления сред. Угол  $\alpha_0 = \arcsin \frac{1}{n}$  называется углом полного внутреннего отражения.

**Задача.** Постольку источник точечный, т.е. его размеры много меньше диаметра световода, и находится вблизи торца, то максимальный угол падения лучей от него на этот торец близок к  $90^\circ$ . Источник расположен на оси цилиндра, поэтому пучок лучей в световоде распространяется, оставаясь симметричным относительно оси, и максимальный угол преломления при выходе из дальнего торца равен  $\delta/2$  (рис.12). Согласно

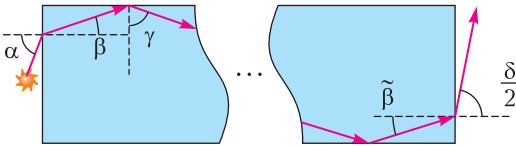


Рис. 12

закону преломления, максимальный угол преломления на ближнем торце световода равен  $\beta_{\max} = \arcsin \left( \frac{1}{n} \sin \alpha_{\max} \right) \approx \arcsin \frac{1}{n}$ . Минимальный угол падения на боковую поверхность  $\gamma_{\min} \approx \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{n}$ . Здесь могут быть две ситуации в зависимости от соотношения этого угла с углом полного внутреннего отражения  $\gamma_0 = \arcsin \frac{1}{n}$ . Если  $\gamma_{\min} \geq \gamma_0$  (это соответствует тому, что  $\sin \gamma_{\min} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \geq \frac{1}{n}$ , т.е.  $n \geq \sqrt{2}$ ), то все лучи, попавшие в световод, испытывают полное внутреннее отражение на боковых поверхностях и доходят до дальнего торца ( $\tilde{\beta}_{\max} = \beta_{\max}$ ). Поэтому  $\frac{\delta}{2} = \arcsin (n \sin \beta_{\max}) \approx \alpha_{\max}$ . Значит, в

этом случае угол раствора пучка близок к  $180^\circ$ . Если же  $\gamma_{\min} < \gamma_0$  (т.е.  $n < \sqrt{2}$ ), то распространяться по длинному световоду с многократным отражением от боковой поверхности смогут только

лучи с углом  $\gamma \geq \gamma_0 = \arcsin \frac{1}{n}$ . В этом случае

$$\tilde{\beta}_{\max} = \frac{\pi}{2} - \gamma_0,$$

$$\frac{\delta}{2} = \arcsin (n \sin \tilde{\beta}_{\max}) = \arcsin (\sqrt{n^2 - 1})$$

$$\text{и } \delta = 2 \arcsin (\sqrt{n^2 - 1}).$$

Таким образом,  $\delta = 2 \arcsin (\sqrt{n^2 - 1})$  при  $n < \sqrt{2}$  и  $\delta$  близок к  $180^\circ$  при  $n \geq \sqrt{2}$ .

### МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

(с.м. «Квант» №7)

#### Ф И З И К А

Первый тур

Вариант 1

1. Скорость катера относительно воды перпендикулярна  $CB$  и равна

$$v_k = v_0 \frac{AC}{\sqrt{AC^2 + AB^2}} = 3 \text{ км/ч}.$$

2.  $\Delta W = 3W_0 = 30 \text{ Дж}$ .

3.  $s = \frac{g\tau^2}{2} = 5 \text{ м}$  (здесь  $\tau = 1 \text{ с}$ ).

4.  $\frac{n_1}{n_2} = \frac{(Z_4/Z_1) - 1}{(Z_4/Z_2) - 1} = 2$ .

5. Шарик сначала движется по окружности радиусом  $L$ , затем (зацепившись за гвоздь) начинает двигаться по окружности радиусом  $L/2$ , а в некоторой точке траектории сила натяжения нити становится равной нулю и шарик движется как тело, брошенное под углом к горизонту:

$$H = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{L}{2} \cdot \frac{5}{27} = 5 \text{ м}.$$

6. Альфа-частица совершает колебания с частотой  $\omega = \sqrt{\frac{2eb}{m}} = \frac{2\pi}{T}$  и амплитудой  $x_0 = \frac{E_0}{b}$ . Максимальная кинетическая энергия равна

$$W_{\max} = \frac{m(x_0\omega)^2}{2} = \frac{eE_0^2}{b}$$

$$\text{и достигается через время } t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2eb}}.$$

7.  $T_2 = \frac{5}{6}T_1 + \frac{q}{3k} \approx 2569 \text{ К}$  (здесь  $k$  – постоянная Больцмана).



8. Записав условия равновесия для человека, платформы и подвижного блока, находим силу натяжения веревки:  $F = \frac{(m_1 + m_2)g}{4} = 250 \text{ Н}$ .

9. Из равенства момента сил Ампера  $I\pi R^2 B$  и момента сил тяжести  $mgR$  получаем  $B = \frac{mg}{I\pi R}$ .

Вариант 2

1.  $L = H \frac{\sqrt{(2v)^2 - v^2}}{v} = H\sqrt{3} = 1,73 \text{ км}$ .

2.  $r = 4R = 2 \text{ м}$  (траекторией муравья является циклоида).

3.  $\Delta T = \frac{Q}{2mc} = \frac{mgL}{2mc} = \frac{gL}{2c} = 0,05 \text{ К}$ .

4. Из равенства ускорений бруска и центра обруча найдем коэффициент трения:  $\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = 0,5$ .

5.  $T_2 = \frac{2p_1 V_1}{2,5R} \approx 385 \text{ К}$ .

6. К указанному моменту времени центр масс троса опустится на  $\Delta l = 1,25 \text{ м}$  и скорость троса достигнет величины  $v = \sqrt{2g\Delta l} = 5 \text{ м/с}$ .

7. Внешняя сила вместе с силой Архимеда работают против силы тяжести. Поэтому работа внешней силы равна  $A = \frac{mgL}{2} - \frac{4mgL}{9n} = \frac{7}{18} mgL$ .

8. Эквивалентная схема данной батареи конденсаторов изображена на рисунке 13. Ее начальная

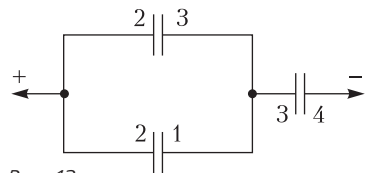


Рис. 13

емкость равна  $C_1 = \frac{2}{3} C_0 = \frac{2 \epsilon_0 S}{3 d}$ . После заполнения одного из конденсаторов диэлектриком емкость батареи станет  $C_2 = \frac{1 + \epsilon}{2 + \epsilon} \cdot C_0$ . Значит, через источник тока пройдет заряд

$$\Delta q = C_2 \epsilon - C_1 \epsilon = C_0 \epsilon \frac{\epsilon - 1}{3(2 + \epsilon)} = \frac{\epsilon_0 S \epsilon}{6d}$$

9. Емкость сферического конденсатора  $C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ , его заряд  $q = CU$ . Напряженность максимальна вблизи внутренней обкладки конденсатора:  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R_1^2}$ . Отсюда находим

$$U = \frac{ER_1(R_2 - R_1)}{R_2} = 240 \text{ кВ}$$

Второй тур

Вариант 1

1.  $s = \frac{mv^2 \alpha L}{4A}$ .

2. Записав закон сохранения энергии и второй закон Ньютона для верхнего шарика, а также условие равновесия для нижнего, найдем коэффициент трения:

$$\mu = \frac{\cos \alpha}{\frac{m_2}{m_1(3 \sin \alpha - 2)} + \sin \alpha} = 0,16$$

3.  $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = -\Delta U_{23} + A_{12} = -\frac{3}{4} Q_{23} + A_{12} = 50 \text{ Дж}$ .

4. При максимальном токе  $I_{\max}$  ЭДС индукции в катушке равна нулю, поэтому разность потенциалов между верхней и нижней обкладками конденсатора равна  $\epsilon$ . Через батарею протекает заряд  $q = C\epsilon - (-CU_0) = C(\epsilon + U_0)$ . Батарея совершает работу  $A = q\epsilon = C\epsilon(\epsilon + U_0)$ . Изменение энергии конденсатора равно  $\Delta W = \frac{C\epsilon^2}{2} - \frac{CU_0^2}{2}$ . По закону сохранения энергии,  $A = \Delta W + \frac{LI_{\max}^2}{2}$ . Отсюда находим

$$I_{\max} = (U_0 + \epsilon) \sqrt{\frac{C}{L}} = 70 \text{ мА}$$

После замыкания ключа начавшиеся колебания прекратятся из-за диода в тот момент, когда ток попытается начать течь в обратном направлении, т.е. по часовой стрелке. В этот момент ток равен нулю, а напряжение на конденсаторе равно  $U$  (разность потенциалов между верхней и нижней обкладками). Это напряжение и останется (установится) на конденсаторе. От момента замыкания ключа до момента прекращения тока батарея совершает работу  $A' = (CU - (-CU_0))\epsilon = C\epsilon(U - U_0)$ , энергия конденсатора изменяется на  $\Delta W' = \frac{CU^2}{2} - \frac{CU_0^2}{2}$ . По закону сохранения энергии,  $A' = \Delta W'$ . Отсюда получим

$$U = 2\epsilon - U_0 = 12 \text{ В}$$

причем полярность противоположна начальной. 5. Система будет совершать гармонические колебания с амплитудой  $A$ , равной максимальной деформации пружины. Используя законы сохранения импульса и энергии, найдем

$$A = \frac{2v}{9} \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

6. Запишем законы сохранения энергии и импульса для частицы:  $mc^2 = 2E_\gamma$ ,  $mv = 2p_\gamma \cos \frac{\theta}{2}$ ,

где  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ ,  $p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$ . Для образования электронно-позитронной пары нужна энергия  $2m_e c^2$ . Отсюда после преобразований находим искомое число пар:  $N = \frac{m_0}{m_e}$ .

### Вариант 2

1. При соскальзывании цепочки ее потенциальная энергия уменьшается, при этом растет кинетическая энергия и совершается работа против силы трения, которая по мере соскальзывания цепочки линейно убывает до нуля. Записав соответствующие соотношения, получим  $v = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$ .
2. Давление в пузырьке складывается из атмосферного, гидростатического и добавочного давления, обусловленного поверхностным натяжением. Записав уравнение состояния газа для двух рассматриваемых положений пузырька, найдем глубину водоема:

$$h = \frac{1}{\rho g} \left( p_0 (n^3 - 1) + \frac{4\sigma}{d} (n^2 - 1) \right).$$

$$3. m = \frac{A}{q} \frac{4^\alpha}{4^\alpha - 1}. \quad 4. Q = \frac{7}{6} q.$$

5. Мощность светового излучения, падающего на поверхность солнечной батареи,  $W_{\text{св}} = \frac{W\pi R^2}{4\pi r^2} = \frac{WR^2}{4r^2}$ . Сила светового давления, с учетом отражения,  $F_{\text{св}} = \frac{W_{\text{св}}(1+\rho)}{c}$ . Реактивная

сила тяги двигателя  $F_p = \mu v$ , где  $\mu$  – секундный расход топлива,  $v$  – относительная скорость вылета ионов, которую можно определить из условия  $eU = \frac{m_{\text{и}} v^2}{2}$ . Окончательно получим

$$\mu = \frac{WR^2(1+\rho)}{4r^2 c} \sqrt{\frac{m_{\text{и}}}{2eU}} = 0,12 \text{ кг/с}.$$

6. Искомую энергию кулоновского взаимодействия найдем из закона сохранения энергии и второго закона Ньютона для точки B:

$$W_B = W_A + \frac{1}{2}(3mg - F)R = -4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$



**БИБЛИО-ГЛОБУС**  
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

МЫ ПРЕДЛАГАЕМ  
БОЛЬШОЙ ВЫБОР ТОВАРОВ И УСЛУГ

<p><b>УСЛУГИ</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Интернет-магазин <a href="http://www.bgshop.ru">www.bgshop.ru</a></li> <li>■ Кафе</li> <li>■ Клубные (дисконтные) карты и акции</li> <li>■ Подарочные карты</li> <li>■ Предварительные заказы на книги</li> <li>■ Встречи с авторами</li> <li>■ Читательские клубы по интересам</li> <li>■ Индивидуальное обслуживание</li> <li>■ Подарочная упаковка</li> <li>■ Доставка книг из-за рубежа</li> <li>■ Выставки-продажи</li> </ul>	<p><b>АССОРТИМЕНТ</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Книги</li> <li>■ Аудиокниги</li> <li>■ Антиквариат и предметы коллекционирования</li> <li>■ Фильмы, музыка, игры, софт</li> <li>■ Канцелярские и офисные товары</li> <li>■ Цветы</li> <li>■ Сувениры</li> </ul>
--	--

г. Москва,  
м. Лубянка,  
м. Китай-город  
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1

8 (495) 781-19-00

[www.biblio-globus.ru](http://www.biblio-globus.ru)  
пн – пт 9:00 - 22:00  
сб – вс 10:00 - 21:00  
без перерыва на обед

# КВАНТ 12+

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru), [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru)**

### Отпечатано

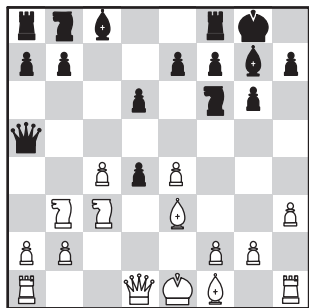
**в соответствии с предоставленными  
материалами  
в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»  
Телефон: +7 495 363-48-86,  
<http://capitalpress.ru>**

## Староиндийский ОГОНЬ

Староиндийская защита заслуженно имеет репутацию одного из самых сложных и захватывающих дебютов, в котором регулярно случаются результативные партии с обилием жертв с обеих сторон. На проходившем недавно чемпионате Азии молодой индийский гроссмейстер М.Картикеян обыграл в староиндийской защите при помощи жертвы ферзя восходящую звезду из Ирана А.Фируджу, дав нам повод посвятить сегодняшний выпуск этому яркому дебюту.

**А.Фируджа – М.Картикеян**  
Синтай, 2019

1. d4 ♖f6 2. c4 g6 3. ♘c3 ♙g7 4. e4 d6 5. h3 0-0 6. ♙e3 c5 7. ♘f3 ♚a5 8. ♘d2!? (с идеей получить типичную для структуры Мароци расстановку после 8... cd 9. ♘b3 ♚c7 10. ♘d4) 8... cd 9. ♘b3.



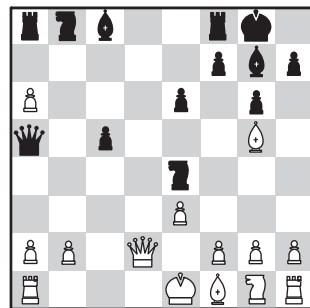
9... ♚c3+!!? Ошеломительный ход, который едва ли все-речь рассматривал Фируджа. Черные проводят комбинацию с позиционной жертвой ферзя за две легкие фигуры. 10. bc de 11. f3 (белые не хотят портить пешечную структуру, возможно, стоило предпочесть 11. ♚c2 с разменом пешки e3) 11... ♗h5! Важно взять под контроль поля e3 и f4. 12. ♚c1 ♙h6 13. g4 ♙f4 14. ♚d1 ♙e6 15. ♚c2 ♙c6 16. h4 ♙f4. Контроль над

черными полями – ключевой аспект стратегии черных. 17. ♚d1 ♙e5! Черные фигуры блестяще скоординированы и имеют объекты для атаки – слабые пешки c4 и f3, в то время как у белых нет никакой контригры. 18. ♘c1 ♙d7 19. a4 ♗ac8 20. ♙e2 ♙h6 21. g5 ♙g7 22. ♙h3 ♙f3 23. ♚d3 ♙e5 24. ♚c3 ♙c4 25. ♚f2. Пешку брать нельзя, после 25. ♚a7 ♙c6 26. ♙g3 ♗a8 27. ♚f2 ♙a4 позиция белых рушится. 25... ♗c5 26. ♗hb1 ♙c6 27. ♙g2 f5! Вводя в игру последнюю неактивную фигуру (ладью f8). 28. gf ♙f6 29. ♗f1 ♙c3 (еще точнее 29... ♙g7 30. ♚g1 ♗f1, и любое взятие ведет к потере пешки a4 или e4). 30. ♚c5 ♙c5 31. ♗f8+ ♗f8 32. ♚c3 ♙e5 33. a5 ♙e4+ 34. ♙e4 ♙e4. У черных 4 пешки за качество, остальное для гроссмейстера – дело техники. 35. ♘d4 ♙d5 36. ♘b5 a6 37. ♘c7 ♙c6 38. ♗f1+ ♗g7 39. ♙e6+ ♗h6 40. ♗f8 ♗h5 41. ♗h8 h6 42. ♗h7 ♗h4 43. ♗h6+ ♗g4 44. ♘d4 ♗g5 45. ♗h2 ♙d5 46. ♗e2 ♗f4 47. ♗f2+ ♙f3 48. ♗e2 e5 49. ♘c2 ♙e4 50. ♙e3 d5 51. ♚b4 ♙d4 52. ♗e1 ♗f3. **Выигрыш черных.**

Следующая партия была сыграна на чемпионате России 2002 года.

**А.Рязанцев – В.Невоструев**  
Краснодар, 2002

1. d4 ♖f6 2. c4 g6 3. ♘c3 ♙g7 4. ♙g5 c5 5. d5 b5! Переход в волжский гамбит – эффективный способ борьбы с ранним выходом слона. 6. cb (брать конем плохо из-за 6... ♙e4! 7. ♙c1 a6 8. ♘a3 ♙b2! 9. ♙b2 ♚a5 с выигрышем) 6... a6 7. e3 ♚a5 8. ♚d2 0-0 9. ba?! (в дебюте не стоит забывать о развитии фигур, 9. ♘f3 сильнее) 9...e6! 10. de de 11. ♘e4 ♙e4!! Черные смело жертвуют ферзя, рассчитывая использовать преимущество в развитии.



12. ♚a5 ♙b2 13. ♙e2?! После этого хода белым крайне сложно закончить развитие, вероятно, с практической точки зрения лучше было вернуть ферзя после 13. ♘d3 ♙c3+ 14. ♚c3 ♙c3. 13... ♙a1 14. ♙h6 ♙a6 15. ♙f8?! (лучше 15. ♚a4!? ♙b7 16. ♚b3 ♙d5 17. ♚b1 ♙g7 18. ♙g7 с дальнейшим развитием) 15... ♙c6 16. ♚c7. Компьютерный анализ показывает, что после 16. ♚b6!! ♗b8 17. ♚b8!! ♙b8 18. ♙e7 ♙c6 19. f3! ♙f8?! (лучше 15. ♚d2 позиция лучше уже у белых, однако найти такую серию ходов практически невозможно даже гроссмейстеру. 16... ♙b4 17. ♙h6 ♙e5. Король пойман в центре. 18. ♚d7 ♙d3+ 19. ♚d1 (жертва ферзя не спасает белых: 19. ♚d3 ♙d3 20. f3 ♙c3, и после серии разменов черные побеждают за счет проходной пешки на линии c) 19... ♗b8 20. ♘d4 ♗b1+ 21. ♚e2 ♙e1+ 22. ♘b5 ♙c3+ 23. ♚d2 ♗d1×. **Выигрыш черных.**

Впервые жертву ферзя за две легкие фигуры в староиндийской защите применил Д.Бронштейн в партии турнира претендентов против Б.Спасского в 1956 году в Амстердаме. Будущий чемпион мира устоял и праздновал победу, однако идея Бронштейна уже более полувекка находит последователей среди шахматных романтиков!

*А.Русанов*

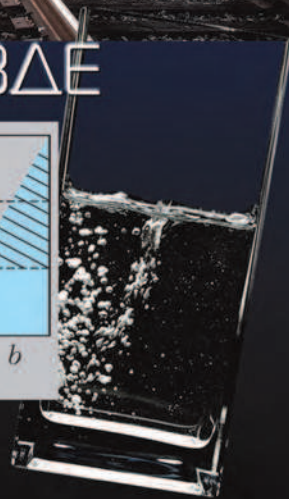
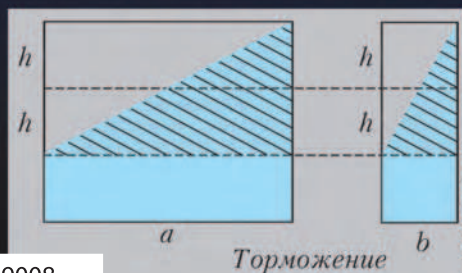
Индекс 90964



КОГДА ПОЕЗД ТОРМОЗИТ ИЛИ РАСКАЧИВАЕТСЯ ИЗ СТОРОНЫ В СТОРОНУ, ИЗ СТОЯЩЕГО НА СТОЛИКЕ СОСУДА С ВОДОЙ ВОДА НАЧИНАЕТ ВЫПЛЕСКИВАТЬСЯ. ПОЧЕМУ?

*Продукты с физикой*

## ВОДА В ПОЕЗДЕ



ISSN 0130-2221 19008



9 770130 222191

(Подробнее – на с. 36 внутри журнала)