

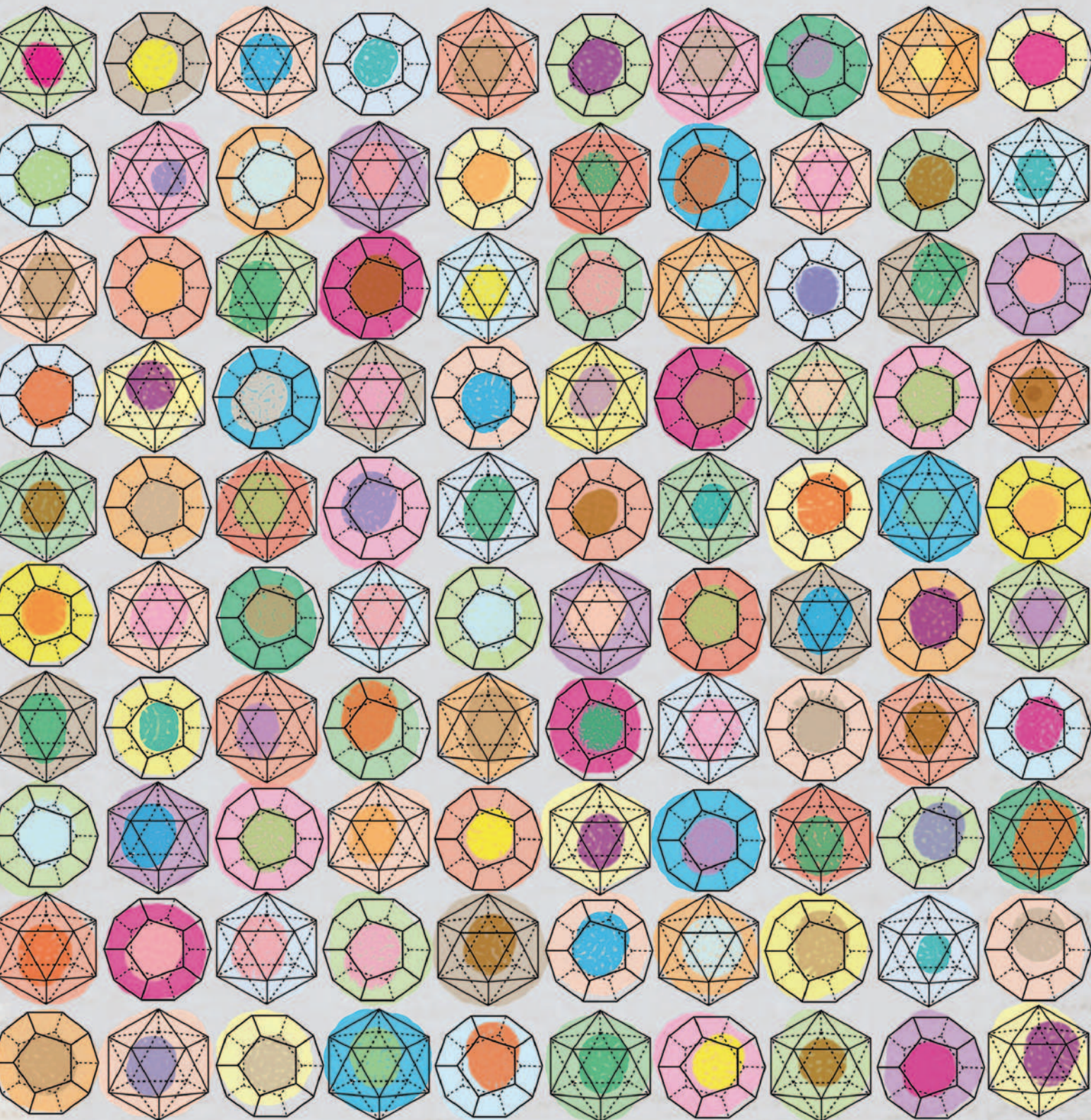
ЯНВАРЬ/ФЕВРАЛЬ

ISSN 0130-2221

2013 • №1

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# ЕЩЕ ОДНА ДЕТАЛЬ



Перед вами еще одна головоломка с XXXII Съезда любителей головоломок, который прошел в августе 2012 года в Вашингтоне. В квадратной рамке довольно плотно уложены 16 деревянных брусочков разнообразной формы. Конечно, между ними есть небольшие зазоры, но кажется, что еще одна деталь – даже очень маленький кубик – точно не влезет. Тем не менее, брусочки можно переложить так, что и кубик поместится в рамке. Автор головоломки Том Лок предлагает вам придумать, как это сделать.

*(Продолжение – на странице 31 внутри журнала)*

# КВАНТ ЯНВАРЬ 2013 №1 ФЕВРАЛЬ 2013

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛЬ Российская академия наук	2 Эллипс, симметричный как квадрат. <i>Д.Звонкин</i> 8 Почему в хорошую пиццерию не надо ходить в «час пик». <i>А.Варламов</i> 13 Автомобильные пробки: когда рациональность ведет к коллапсу. <i>А.Гасников, Ю.Дорн, Е.Нурминский, Н.Шамрай</i>
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР <b>А.Л.Семенов</b>	19 <b>НОВОСТИ НАУКИ</b> Премия за «прорывные» эксперименты. <i>Л.Белопухов</i>
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ <i>А.А.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, П.А.Кожевников, С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)</i>	23 <b>ЗАДАЧНИК «КВАНТА»</b> Задачи М2286–М2293, Ф2293–Ф2299 25 Решения задач М2269–М2275, Ф2275–Ф2282
РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ <i>А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев</i>	32 <b>КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»</b> Парабола
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА	<b>«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ</b> 34 Задачи 35 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8» 35 Меньше знаешь – крепче спишь. <i>И.Акулич</i> 37 Простой мини-робот. <i>А.Андреев, А.Панов</i>
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР <b>И.К.Кикоин</b>	<b>ШКОЛА В «КВАНТЕ»</b> 38 Два слова о колодце (и не только о нем). <i>С.Дворянинов</i> 41 Как нанокластер с самолетом столкнулся. <i>И.Амелюшкин, А.Стасенко</i> 42 Вихри враждебные... <i>А.Стасенко</i> 44 Новый взгляд на теорему Штейнера – Лемуса. <i>Л.Штейнгарц</i>
ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА <b>А.Н.Колмогоров</b>	<b>ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ</b> 46 Почему радуги бывают разными. <i>С.Варламов</i>
<i>Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллиончиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер</i>	<b>МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК</b> 49 Две фальшивые монеты. <i>К.Кноп</i>
	<b>ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА</b> 55 Геометрия световых лучей. <i>В.Дроздов</i>
	<b>ОЛИМПИАДЫ</b> 59 XXXIV Турнир городов 60 Московская студенческая олимпиада по физике 2012 года 61 Ответы, указания, решения Нам пишут (6) Вниманию наших читателей (58)
	<b>НА ОБЛОЖКЕ</b> I <i>Иллюстрация к статье Д.Звонкина</i> II <i>Коллекция головоломок</i> III <i>Шахматная страничка</i> IV <i>Прогулки с физикой</i>

# Эллипс, симметричный как квадрат

Д.ЗВОНКИН

## Введение

Эта статья о том, что из наличия в задаче симметрии иногда можно сразу вывести ответ. Вот несколько совсем простых примеров. Если у числа поменяли знак, а оно при этом не изменилось, то это число – ноль. А если вектор на плоскости повернули на  $120^\circ$ , но он

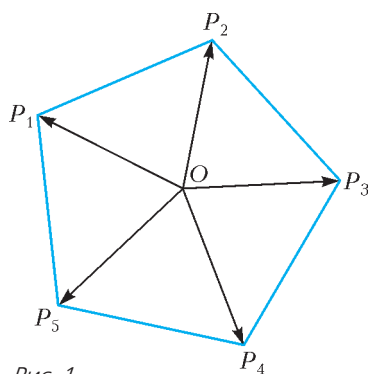


Рис. 1

остался прежним, то, значит, это был нулевой вектор. Или, допустим, эллипс повернули на  $90^\circ$  и получили тот же самый эллипс; вывод: этот эллипс – окружность. Для решения одной из последних задач вам потребуется даже эллипсоид, симметричный как кубик, т.е. сфера. Но начнем с самого простого.

**Задача 1.** На плоскости нарисован правильный пятиугольник с центром  $O$  и вершинами  $P_1, P_2, P_3, P_4$  и  $P_5$  (рис.1). Докажите, что

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{OP_5} = \vec{0}.$$

**Решение.** Обозначим сумму

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4} + \overrightarrow{OP_5}$$

через  $\vec{u}$ . Если повернуть плоскость на одну пятую оборота (т.е. на  $72^\circ$ ) вокруг точки  $O$ , то вектор  $\vec{u}$  тоже повернется на одну пятую оборота. С другой стороны, пятиугольник при таком повороте перейдет сам в себя (только номера вершин изменятся). Следовательно, вектор  $\vec{u}$  останется прежним. Итак, вектор  $\vec{u}$  не меняется при повороте на  $72^\circ$ . Значит,  $\vec{u} = \vec{0}$ .

**Задача 2.** Решите задачу 1, заменив в ней пятиугольник на любой правильный  $n$ -угольник.

**Задача 3.** Перейдем в три измерения: решите задачу 1, заменив в ней пятиугольник на куб.

## Задачи с аффинными функциями

В предыдущих задачах требовалось найти некоторый вектор, а симметрия позволила доказать, что он на самом деле равен нулю. В следующей серии задач вместо векторов будут использоваться аффинные функции, так что мы должны сначала рассказать, что это такое.

**Об аффинных функциях.** Аффинной функцией от двух переменных  $x$  и  $y$  называется любая функция

вида  $f(x, y) = ax + by + c$ , где  $a, b$  и  $c$  – действительные числа. В школе такие функции часто называют линейными, но среди математиков линейными принято называть только функции вида  $ax + by$ , а если к линейной функции добавить еще число, то такую функцию называют уже аффинной.

Очевидно, что сумма нескольких аффинных функций будет снова аффинной функцией. Графиком аффинной функции является невертикальная плоскость  $z = ax + by + c$  в трехмерном пространстве с координатами  $x, y, z$ .

Поскольку аффинная функция зависит всего от трех параметров –  $a, b$  и  $c$ , – она однозначно определяется своими значениями в почти любых трех точках: нужно только, чтобы эти точки не лежали на одной прямой. Геометрически это утверждение означает, что через любые три точки в пространстве проходит ровно одна невертикальная плоскость, если только эти точки не лежат над одной прямой в плоскости  $Oxy$ . Например, если известно, что аффинная функция принимает равные значения в трех точках, не лежащих на одной прямой, то эта функция постоянна, т.е.  $a = b = 0$ . График такой функции – горизонтальная плоскость.

Если же аффинная функция непостоянна, то ее график пересекает координатную плоскость  $Oxy$  вдоль прямой  $L$  с уравнением  $ax + by + c = 0$ . По мере того как точка  $(x, y)$  отдаляется от  $L$ , значение аффинной функции возрастает (в положительную или в отрицательную сторону) пропорционально удалению от прямой. Умножив нашу аффинную функцию на ненулевую константу, можно добиться, чтобы  $a^2 + b^2 = 1$ . В этом случае вектор  $(a, b)$  будет единичным вектором, перпендикулярным  $L$ , а расстояние от точки  $(x, y)$  до  $L$  будет равно просто  $|ax + by + c|$ . Более точно, если точка  $(x, y)$  лежит с той стороны от прямой, куда смотрит вектор  $(a, b)$ , то расстояние равно  $ax + by + c$ , а если с противоположной стороны, то оно равно  $-(ax + by + c)$ . Это известная из школьной программы формула расстояния от точки до прямой.

Теперь можно переходить к задачам.

**Задача 4.** На плоскости нарисован правильный семиугольник. Докажите, что сумма расстояний от внутренней точки  $P$  семиугольника до его сторон не зависит от внутренней точки.

**Решение.** Пусть  $(x, y)$  – координаты точки  $P$ . Расстояние от  $P$  до любой стороны семиугольника – аффинная функция от  $x$  и  $y$  (поскольку все внутренние точки лежат с одной и той же стороны от любой

стороны семиугольника, модуль в формуле расстояния можно не писать, а вместо этого сразу выбрать правильный знак). Складывая семь аффинных функций (по одной для каждой стороны семиугольника), мы получим снова аффинную функцию. Значит, сумма расстояний от точки  $(x, y)$  до сторон семиугольника – аффинная функция от  $x$  и  $y$ . Теперь мы двумя способами докажем, что эта функция постоянна (выбирайте тот, который вам больше нравится).

*Первый способ.* Если бы функция не была постоянной, ее график пересекал бы плоскость  $Oxy$  вдоль некоторой прямой. При повороте на одну седьмую оборота вокруг центра семиугольника эта прямая, с одной стороны, повернется на одну седьмую оборота, но, с другой стороны, не изменится, так как не изменится сама аффинная функция. Противоречие.

*Второй способ.* Значения нашей аффинной функции во всех вершинах семиугольника очевидно совпадают. Так как эти вершины не лежат на одной прямой – функция постоянна.

**Задача 5.** Решите задачу 4, заменив в ней семиугольник на произвольный правильный  $n$ -угольник.

**Задача 6.** Внутри правильного шестиугольника поставили точку  $P$  и соединили ее отрезками со всеми вершинами шестиугольника (рис.2). Получившиеся

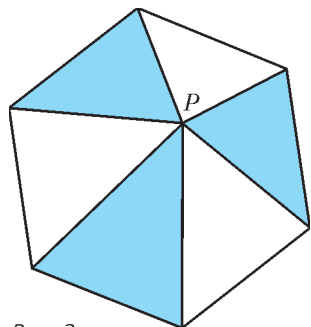


Рис. 2

шесть треугольников покрасили в синий и белый цвета – через один. Докажите, что сумма площадей синих треугольников совпадает с суммой площадей белых треугольников.

**Решение.** Введем на плоскости систему координат так, чтобы начало координат попало в центр шестиугольника. Пусть  $(x, y)$  – координаты точки  $P$ .

Обозначим через  $f(x, y)$  разность между суммарной площадью синих треугольников и суммарной площадью белых треугольников. Наша цель – доказать, что  $f(x, y) = 0$  для любых  $x, y$ .

Пусть  $AB$  – фиксированный отрезок на плоскости. Начнем с того, что (ориентированная) площадь треугольника  $ABP$  – это снова аффинная функция от  $x$  и  $y$ . Действительно, она получается из аффинной функции расстояния до прямой  $AB$  умножением на постоянный множитель – половину длины отрезка  $AB$ .

Функция  $f$  – тоже аффинная, поскольку она получается сложением и вычитанием шести аффинных функций. Кроме того, из симметрии очевидно, что  $f(0, 0) = 0$ . Теперь мы двумя способами докажем, что функция  $f$  тождественно равна нулю.

*Первый способ.* Если бы функция  $f$  не была равна нулю, ее график пересекал бы плоскость  $Oxy$  вдоль некоторой прямой, проходящей через центр шестиугольника. При повороте на  $120^\circ$  вокруг центра шестиугольника эта прямая, с одной стороны, повернется на  $120^\circ$ , но, с другой стороны, не изменится, так как не изменится сама аффинная функция. Противоречие.

*Второй способ.* Значения нашей аффинной функции во всех вершинах шестиугольника очевидно совпадают и равны нулю. Так как эти вершины не лежат на одной прямой – функция тождественно равна нулю.

**Задача 7.** Докажите, что утверждение задачи 6 останется верным, если заменить в ней 6-угольник на правильный  $2n$ -угольник.

*Замечание.* Задачи 4, 5, 6 и 7 являются, на самом деле, разными ипостасями одной и той же задачи. Действительно, расстояние от точки  $P$  до стороны  $AB$  правильного многоугольника и площадь треугольника  $ABP$  отличаются лишь постоянным множителем  $l/2$ , где  $l$  – длина стороны многоугольника. Задачи 4 и 5, например, можно решить, заметив, что если умножить на  $l/2$  сумму расстояний от  $P$  до сторон многоугольника, то получится площадь многоугольника. А задачу 6 можно решить, заметив, что шестиугольник является пересечением двух треугольников, для каждого из которых сумма расстояний от  $P$  до сторон постоянна.

Эти совпадения не случайны: дело в том, что две аффинные функции, обнуляющиеся на одной и той же прямой, всегда отличаются лишь на множитель. В наших задачах мы рассматривали аффинные функции, обнуляющиеся на сторонах правильного многоугольника, а вот множитель выбирали по-разному.

**Задача 8.** Внутри правильного октаэдра поставили точку  $P$ . Восемь тетраэдров с вершиной в точке  $P$  и с основаниями на гранях октаэдра покрасили в синий и белый цвета в шахматном порядке. Докажите, что суммарный объем белых тетраэдров равен суммарному объему синих тетраэдров.

*Пояснение.* Правильный октаэдр – это многогранник, состоящий из восьми правильных треугольников, причем в каждой вершине сходится по четыре треугольника (рис.3). Например, если в центре каждой

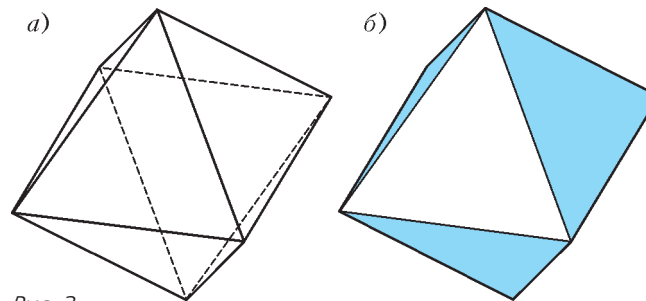


Рис. 3

грани куба поставить по точке и соединить точки на соседних гранях отрезками, то получится октаэдр. Тетраэдр – это многогранник, ограниченный четырьмя треугольниками, иначе говоря, это пирамида с треугольным основанием. На рисунке 3 слева изображен октаэдр, а справа его видимые грани покрашены в синий и белый цвета в шахматном порядке.

*Указание.* Докажите сначала, что объем тетраэдра с фиксированным основанием и с вершиной в точке  $P$  с координатами  $(x, y, z)$  является аффинной функцией от трех переменных, т.е. имеет вид  $ax + by + cz + d$ , где  $a, b, c, d$  – действительные числа. Из этого следует, что функция  $f(x, y, z)$ , равная разности объемов синих и белых тетраэдров, тоже аффинная. Из симметрий

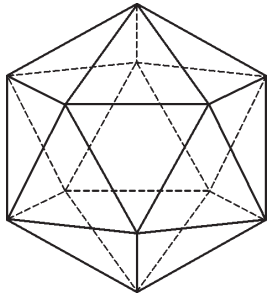


Рис. 4

Пояснение. Правильный икосаэдр – это многогранник, состоящий из двадцати правильных треугольников, причем в каждой вершине сходится по пять треугольников (рис.4).

### Задачи на квадратичные формы

В следующей серии задач речь пойдет о квадратичных формах, поэтому для начала расскажем немного об их свойствах.

*Квадратичной формой* от двух переменных  $x$  и  $y$  называется многочлен от  $x$  и  $y$ , все члены которого имеют степень ровно два. Иными словами, квадратичная форма – это функция вида  $f(x, y) = ax^2 + bx + cy^2$  для некоторых действительных чисел  $a, b, c$ . Очевидно, что сумма квадратичных форм будет снова квадратичной формой.

Для того чтобы как-то представить себе квадратичную форму  $f$ , часто бывает удобно нарисовать какую-нибудь ее линию уровня, т.е. кривую  $f(x, y) = c$ . Например, при  $c = 1$  линия уровня квадратичной формы  $f(x, y) = (x^2 + y^2)/r^2$  – окружность радиуса  $r$ , линия уровня квадратичной формы  $f(x, y) = x^2/4 + y^2$  – эллипс с полуосями 1 и 2 (рис.5), линия

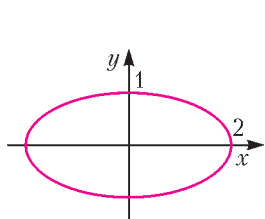


Рис. 5

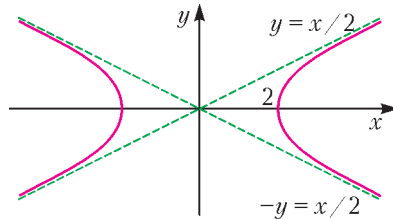


Рис. 6

уровня квадратичной формы  $f(x, y) = x^2/4 - y^2$  – гипербола (рис. 6).

Вероятно, самым важным результатом о квадратичных формах является так называемая **теорема о приведении к нормальному виду**: для любой квадратичной формы  $f$  найдутся декартова система координат  $u, v$  и два действительных числа  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что  $f = \alpha u^2 + \beta v^2$ .

Для того чтобы найти такую систему координат, рассмотрим значения квадратичной формы  $f$  на точках единичной окружности. Выберем на этой окружности единичный вектор  $\vec{e}_1$ , на котором значение  $f$  максимально, и единичный вектор  $\vec{e}_2$ , на котором значение  $f$  минимально. Оказывается, что векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  перпендикулярны друг другу, а в координатах  $u, v$ , соответствующих базису  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , квадратичная форма

$f$  имеет вид  $\alpha u^2 + \beta v^2$ . Мы не будем здесь этого доказывать.

Если оба числа  $\alpha$  и  $\beta$  оказались положительными, то линия уровня при  $c = 1$  нашей квадратичной формы – эллипс. Если  $\alpha$  и  $\beta$  разных знаков, то линия уровня будет гиперболой. Оси эллипса или гиперболы направлены вдоль векторов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ . Если  $\alpha$  и  $\beta$  отрицательны, то полезнее рассмотреть линию уровня  $f(x, y) = -1$ , которая будет эллипсом.

**Упражнение.** Какие линии уровня при  $c = 1$  у квадратичной формы, когда одно из чисел  $\alpha, \beta$  равно нулю? (Ответ: пары параллельных прямых.)

Пусть  $r$  – какое-нибудь преобразование плоскости, например поворот. Квадратичная форма (как и любая другая функция) называется *инвариантной относительно  $r$* , если ее значение в любой точке  $P$  совпадает со значением в точке  $r(P)$ . Иными словами, применение преобразования  $r$  не меняет значений квадратичной формы.

Любая квадратичная форма инвариантна относительно поворота на  $180^\circ$ . В самом деле, поворот на  $180^\circ$  переводит координаты  $x$  и  $y$  в  $-x$  и  $-y$ . Теперь достаточно заметить, что  $(-x)^2 = x^2$ ,  $(-y)^2 = y^2$ , а  $(-x)(-y) = xy$ . Обратите внимание, что из инвариантности квадратичной формы вытекает инвариантность ее линий уровня. Действительно: и эллипс, и гипербола центрально симметричны.

Если квадратичная форма инвариантна относительно какого-нибудь другого поворота, из этого сразу следует, что она имеет вид  $\alpha(x^2 + y^2)$ : ни одна гипербола и ни один эллипс, кроме окружности, не переходят в себя при других поворотах.

**Пример.** Рассмотрим квадратичную форму

$$f(x, y) = 14x^2 - 24xy + 21y^2.$$

Перейдем в декартов базис

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \vec{e}_2 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Координаты в новом базисе имеют вид

$$u = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, v = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y.$$

Нетрудно проверить, что

$$f(x, y) = 5u^2 + 30v^2.$$

Следовательно, линией уровня  $f(x, y) = 1$  является эллипс. Его большая полуось идет вдоль вектора  $\vec{e}_1$  и равна  $1/\sqrt{5}$ , а малая полуось идет вдоль вектора  $\vec{e}_2$  и равна  $1/\sqrt{30}$ .

**Задача 10.** На плоскости с началом координат  $O$  отмечена точка  $A$  с координатами  $(a, b)$ . Кроме того, по плоскости бегают точка  $P$  с координатами  $(x, y)$ . Пусть  $s$  – расстояние от  $A$  до  $OP$ , а  $l$  – длина  $OP$ . Положим  $f(x, y) = s^2 l^2$ . Докажите, что  $f$  – квадратичная форма от  $x, y$ .

(Эта задача, сама по себе не особенно интересная, потребуется нам для решения следующей, более красивой задачи.)

**Решение.** Пусть  $H$  – проекция точки  $A$  на прямую  $OP$  (рис.7). Тогда

$$s^2 l^2 = AH^2 \cdot OP^2 = (OA^2 - OH^2) \cdot OP^2 = \\ = OA^2 \cdot OP^2 - (\overline{OA} \cdot \overline{OP})^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2.$$

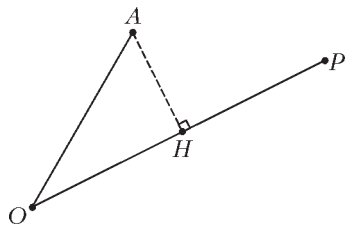


Рис. 7

При фиксированных  $a, b$  это квадратичная форма от  $x, y$ .

**Задача 11.** Через центр  $O$  правильного  $n$ -угольника на плоскости провели прямую и вычислили сумму квадратов расстояний от вершин  $n$ -угольника

до прямой. Докажите, что результат не зависит от прямой.

**Решение.** Выберем на нашей прямой точку  $P$  с координатами  $(x, y)$  и домножим сумму квадратов расстояний на  $OP^2$ . Согласно предыдущей задаче, у нас получится квадратичная форма  $f(x, y)$ . При повороте на одну  $n$ -ю оборота  $n$ -угольник, а следовательно, и квадратичная форма не изменятся. Из этого вытекает, что  $f$  имеет вид  $f(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)$ , а ее линией уровня  $f(x, y) = 1$  является окружность.

Вспоминая, что  $OP^2 = x^2 + y^2$ , мы видим, что сумма квадратов расстояний от вершин  $n$ -угольника до прямой равна  $\alpha$ , т.е. не зависит от координат точки  $P$ .

Для решения следующей задачи нам потребуется одно замечание. Пусть функция  $f(x, y)$  – произвольный многочлен степени 2. Тогда  $f$  единственным образом раскладывается в сумму квадратичной формы (члены степени 2), линейной функции (члены степени 1) и числа (свободный член). Предположим, что наша функция инвариантна относительно некоторого поворота  $\alpha$  вокруг начала координат. Тогда можно утверждать, что каждое из трех описанных выше слагаемых инвариантно само по себе. Это можно доказать разными способами. Проще всего проверить, что операция поворота на угол  $\alpha$ :

$$u = (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y, \\ v = (-\sin \alpha)x + (\cos \alpha)y$$

переводит члены степени 1 в члены степени 1, а члены степени 2 в члены степени 2. На самом деле, мы неявно пользовались этим свойством в предыдущих задачах, когда предполагали, что после поворота вокруг начала координат линейная функция останется линейной, а квадратичная форма останется квадратичной формой.

**Задача 12.** На плоскости нарисован правильный  $n$ -угольник с центром в начале координат  $O$ . Пусть  $r$  – радиус его вписанной окружности. Выберем на плоскости точку  $P$  такую, что  $OP = l$ . Докажите, что сумма квадратов расстояний от  $P$  до сторон  $n$ -угольника равна  $n\left(r^2 + \frac{l^2}{2}\right)$ .

**Решение.** Если прямая  $L$  на плоскости задана уравнением  $ax + by + c = 0$ , где  $a^2 + b^2 = 1$ , то квадрат расстояния от  $P$  до  $L$  равен  $(ax + by + c)^2$ . Сумма  $n$  функций такого вида будет многочленом второй степени

$$f(x, y) = A + B_x x + B_y y + C_{xx} x^2 + C_{xy} xy + C_{yy} y^2,$$

где  $A, B_x, B_y, C_{xx}, C_{xy}, C_{yy}$  – некие действительные числа. Именно такой вид имеет сумма квадратов расстояний от  $P$  до сторон  $n$ -угольника. Рассмотрим отдельно члены степени 0, 1 и 2 многочлена  $f$ .

Свободный член – это константа  $A$ .

Члены степени 1 – это сумма  $B_x x + B_y y$ , т.е. скалярное произведение векторов  $(x, y)$  и  $(B_x, B_y)$ . Из симметрии следует, что вектор  $(B_x, B_y)$  не меняется при повороте на одну  $n$ -ю оборота, т.е. он равен нулю.

Члены степени 2 – это квадратичная форма  $C_{xx} x^2 + C_{xy} xy + C_{yy} y^2$ . Эта квадратичная форма не меняется при повороте на одну  $n$ -ю оборота. Следовательно, ее линия уровня – окружность, а значит, квадратичная форма имеет вид  $C(x^2 + y^2)$ .

Итак, мы получили, что  $f(x, y) = A + C(x^2 + y^2)$ . Осталось найти числа  $A$  и  $C$ .

Чтобы найти  $A$ , достаточно вычислить  $f(0, 0)$ , т.е. значение нашей суммы квадратов расстояний для точки  $P = O$ . Эта сумма, очевидно, равна  $nr^2$ , т.е.  $A = nr^2$ .

Чтобы найти  $C$ , посмотрим на вклад каждой стороны  $n$ -угольника в коэффициенты  $C_{xx}$  и  $C_{yy}$ . Пусть прямая, продолжающая одну из сторон  $n$ -угольника, задается уравнением  $ax + by + c = 0$ , причем  $a^2 + b^2 = 1$ . Тогда у многочлена  $(ax + by + c)^2$  коэффициент при  $x^2$  равен  $C_{xx} = a^2$ , а коэффициент при  $y^2$  равен  $C_{yy} = b^2$ . Таким образом  $C_{xx} + C_{yy} = 1$ . Получается, что каждая из  $n$  сторон многоугольника дает вклад 1 в сумму  $C_{xx} + C_{yy}$ , а в конце эта сумма оказывается равной  $2C$ . Получается, что  $C = n/2$ .

Итак,

$$f(x, y) = nr^2 + \frac{n}{2}(x^2 + y^2) = n\left(r^2 + \frac{l^2}{2}\right).$$

Резюмируем еще раз наше решение. Сначала мы установили, что ответ в задаче – некоторый многочлен степени два. У такого многочлена 6 коэффициентов, которые нам нужно было найти. Из симметрии задачи мы вывели, что три из шести параметров равны нулю, а еще два равны друг другу. Оставшиеся два параметра мы честно вычислили.

Для последних двух задач вам потребуется **теорема о приведении квадратичной формы к нормальному виду** в трехмерном пространстве: для любой квадратичной формы

$$f(x, y, z) = a_{xx}x^2 + a_{yy}y^2 + a_{zz}z^2 + a_{xy}xy + a_{xz}xz + a_{yz}yz \\ \text{найдутся декартова система координат } u, v, w \text{ и три действительных числа } \alpha, \beta, \gamma \text{ такие, что } f = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2.$$

Из этой теоремы легко вывести, что наличие симметрий накладывает на трехмерные квадратичные формы сильные ограничения:

• если квадратичная форма не меняется при повороте вокруг оси  $z$  на угол, отличный от  $180^\circ$ , то она имеет вид  $\alpha(x^2 + y^2) + \beta z^2$ ;

• если квадратичная форма не меняется при повороте вокруг двух различных осей на углы, отличные от  $180^\circ$ , то она имеет вид  $\alpha(x^2 + y^2 + z^2)$ .

**Задача 13.** (Из книги В.И. Арнольда «Математические методы классической механики». Эта задача обобщает задачу 11 на трехмерную ситуацию.) Проведите прямую через центр куба так, чтобы сумма квадратов расстояний от вершин куба до прямой была минимальной. Та же задача – про правильный тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр.

**Задача 14.** (Обобщение задачи 12 на трехмерную ситуацию.) В пространстве дан правильный додекаэдр с центром в точке  $O$ , и выбрана некоторая точка  $P$ . Расстояние от  $O$  до центров граней додекаэдра (т.е. радиус вписанной сферы) обозначим через  $r$ ; расстояние от  $O$  до середины ребер додекаэдра – через  $\rho$ ; расстояние от  $O$  до вершин додекаэдра (т.е. радиус описанной сферы) – через  $R$ . Наконец, положим  $OP = l$ .

а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от  $P$  до граней додекаэдра равна  $12r^2 + 4l^2$ .

б) Докажите, что сумма квадратов расстояний от  $P$  до ребер додекаэдра равна  $30\rho^2 + 20l^2$ .

в) Докажите, что сумма квадратов расстояний от  $P$  до вершин додекаэдра равна  $20R^2 + 20l^2$ .

Выведите аналогичные формулы для правильного тетраэдра, октаэдра, куба и икосаэдра.

**Пояснение.** Правильный додекаэдр состоит из 12-ти правильных пятиугольников, причем в каждой вершине сходится по три пятиугольника (рис.8). У додекаэдра 30 ребер и 20 вершин.

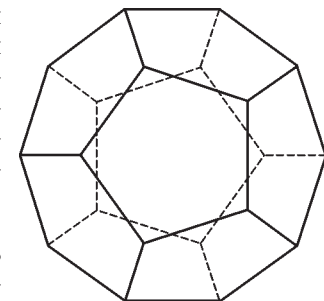


Рис. 8

Попробуйте использовать методы этой статьи для решения задачи М2292,6 «Задачника «Кванта».

## НАМ ПИШУТ

### Катастрофа замечательной точки

Во втором номере «Кванта» за 2012 год опубликована статья В.Протасова и В.Тихомирова «Пространство  $L_p$  и замечательные точки треугольника». В ней даны ответы на некоторые интересные вопросы, связанные с так называемой  $L_p$ -нормой. Естественно, в статье дается и определение этого понятия (ибо в учебниках для средней школы оно встречается, мягко говоря, не часто).

Пусть дан некоторый треугольник  $ABC$  и любая точка  $M$  в плоскости этого треугольника. Тогда  $L_p$ -нормой расстояний от точки  $M$  до вершин треугольника называется величина  $(MA^p + MB^p + MC^p)^{1/p}$ . Авторы поставили задачу: для данного остроугольного<sup>1</sup> треугольника  $ABC$  и произвольного  $p \geq 1$  найти точку  $M$ , для которой  $L_p$ -норма расстояний от точки  $M$  до вершин треугольника *наименьшая*. Они же дали ответ для трех наиболее интересных случаев, соответствующих  $p = 1, 2$  и  $\infty$ . Оказалось следующее.

1) При  $p = 1$  искомой является так называемая *точка Торричелли*, т.е. точка внутри треугольника, из которой все стороны видны под углами  $120^\circ$ . Такая точка единственна для любого остроугольного треугольника.<sup>2</sup>

2) При  $p = 2$  искомая точка – хорошо всем знакомая *точка пересечения медиан* (а иначе – центр тяжести треугольника).

3) Наконец, при  $p = \infty$  искомой точкой становится *центр описанной окружности*.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Почему именно остроугольного? Потому что для иных треугольников возникают разные неприятности при рассуждениях. Нас тоже не тянет в них углубляться, так что заменим этот вопрос.

<sup>2</sup> Для треугольников с углом, большим  $120^\circ$ , точка Торричелли не существует. Может, это и стало одной из причин, по которым авторы ограничились остроугольными треугольниками.

<sup>3</sup> Видимо, здесь кроется вторая причина «остроугольной» ограниченности. Дело в том, что у тупоугольных треугольников центр описанной окружности лежит вне треугольника, и для них указанный ответ неверен.

Как и полагается всякой хорошей статье, количество возникающих при ее прочтении вопросов заметно превосходит число полученных ответов, что стимулирует дальнейшие исследования в этой области. Поэтому при прочтении статьи моментально сами собой сформулировались два вопроса.

**Вопрос 1.** А что будет при других  $p \geq 1$ ?

**Вопрос 2.** А почему, собственно, должно быть  $p \geq 1$ ?

Понятно, что всесторонне ответить на них невероятно трудно.<sup>4</sup> Но хотя бы слегка «пощупать» проблему, сделать нестрогие предварительные выводы и (куда денешься?) задать новые вопросы удалось. О том и пойдет речь.

Итак, замечательная точка  $M$  с ростом  $p$  от 1 до  $\infty$  перемещается от точки Торричелли через центр тяжести к центру описанной окружности. Нет сомнений, что при непрерывном возрастании значения  $p$  ее траекторией будет некая кривая. Какая это кривая? Первое, что приходит в голову, – отрезок прямой. И действительно, если треугольник равнобедренный, то этот отрезок лежит на высоте треугольника, являющейся осью его симметрии. Еще более прост ответ для правильного треугольника  $ABC$ : при любом  $p \geq 1$  наша замечательная точка есть центр треугольника – и ничего больше.

Однако в общем случае (если треугольник  $ABC$  не равнобедренный) кривая никак не может быть отрезком прямой, поскольку для таких треугольников точка Торричелли, центр тяжести и центр описанной окружности *не лежат на одной прямой*. Убедиться в этом, в принципе, несложно, хотя возникают весьма громоздкие вычисления.

Нас, конечно, больше интересует общий случай, с неравнобедренным треугольником  $ABC$ . Если мы не можем теоретически определить траекторию точки  $M$ , то, может, хотя бы *посмотрим* на нее? Зря, что ли, нынче компьютеры на каждом шагу?

Последнее сделать удалось. Для самых разных остроугольных треугольников, длины сторон которых имели

<sup>4</sup> В всяком случае, автору этой заметки.



«разумные» значения (где-то от 5 до 20), был осуществлен компьютерный поиск точки  $M$  при различных  $p$ . Поиск велся численный, старым добрым методом «частой сетки» с ошибкой не более 0,00001.

Кривые получились, в общем-то, одного вида – слабо изогнутые, иногда с едва заметным перегибом. Типичный вид такой кривой приведен на рисунке 1.

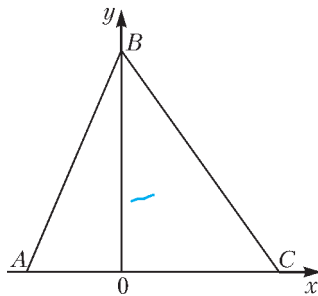


Рис. 1

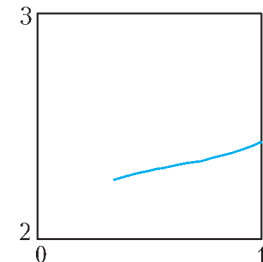


Рис. 2

Так как при расчетах использовалась прямоугольная система координат, то и вершины треугольника были заданы координатами, а именно: две вершины  $A$  и  $C$  лежат на оси  $Ox$ , причем абсциссы их имеют разные знаки (для  $A$  – отрицательный, для  $C$  – положительный), а вершина  $B$  лежит на положительной части оси ординат. Рисунок 1 иллюстрирует случай, когда  $x_A = -3$ ,  $x_C = 5$ ,  $y_B = 7$ . Траектория точки  $M$  (показана синим цветом) довольно-таки коротка, поэтому на рисунке 2 дополнительно крупно выделена часть той же координатной плоскости – квадрат  $0 \leq x \leq 1$ ;  $2 \leq y \leq 3$  (самая правая точка линии – центр описанной окружности – как раз имеет абсциссу  $x = 1$ ).

Разумеется, вопрос «что это за кривая?» на данный момент оставлен без ответа. Не знаю! Кто сумеет узнать – поделитесь информацией.

Ну, а теперь перейдем к тому, что в заголовке статьи получило громкое имя «катастрофа». Давайте не станем ограничивать себя значениями  $p \geq 1$ , а начнем снижать  $p$ , устремив его к нулю. Ясно, что совершенно до нуля мы довести его не сможем – непонятно, что тогда представляет собой  $L_p$ -норма (см. формулу для ее вычисления). Но, по крайней мере, на интервале  $(0; 1]$ , т.е. исключив лишь значение 0, есть надежда получить продление траектории «влево».

И здесь-то притаилась большая неприятность: для того же треугольника, показанного на рисунке 1, продлить линию удалось только до величины  $p$ , примерно равной 0,785. При меньших значениях  $p$  точка  $M$  моментально и скачкообразно перемещается в вершину  $A$ ! Чем не катастрофа?

На рисунке 3 показано красным цветом продолжение траектории точки  $M$  при  $p < 1$ , а на рисунке 4 – ее укрупнение в том же квадрате  $0 \leq x \leq 1$ ;  $2 \leq y \leq 3$ .

Немалую долю мистики в загадку «срыва» вносит тот факт, что 0,785 – это почти  $\pi/4$ . Может, и впрямь «крити-

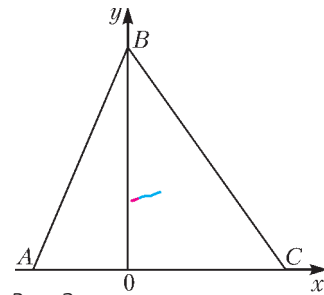


Рис. 3

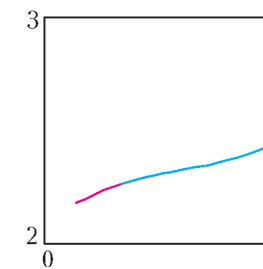


Рис. 4

ческое» значение  $p$  в точности равно  $\pi/4$ , а расхождение связано с использованием чисто вычислительных приемов расчета траектории?

К сожалению (или к счастью – это как посмотреть), причастность великого числа  $\pi$  к возникшей проблеме, видимо, ни при чем. Ларчик открывается несколько проще: при некотором «критическом» значении  $p$  одна из вершин треугольника также становится искомым замечательной точкой (и, скорее всего, как показывают наблюдения, это всегда вершина *наибольшего* угла треугольника).

Чтобы наглядней прояснить ситуацию, рассмотрим самый «вырожденный» случай – правильный треугольник. Как мы помним, для всех  $p \geq 1$   $L_p$ -норма достигает минимального значения в центре треугольника. Зададимся вопросом: при каком  $p < 1$   $L_p$ -норма станет одинакова для центра и для вершины треугольника (причем любой вершины, ибо треугольник – правильный)?

Ответить на него несложно. Пусть сторона треугольника равна 1, тогда расстояние от центра до каждой из вершин равно  $1/\sqrt{3}$ . Следовательно, получаем уравнение

$$3 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^p = 2 \cdot 1^p,$$

откуда  $p = 2 \log_3 1,5 \approx 0,738$ , что довольно-таки далеко от  $\pi/4$  и, конечно, не имеет к нему никакого отношения.

Тем не менее, загадка остается. Посмотрите еще раз на рисунок 4. Трудно отделаться от впечатления, что изображенная там красно-синяя кривая сама просит выяснять, кто же она такая есть. Помогите ей, дорогие читатели!

И.Акулич

### От редакции

Приведем пару добавлений к этой заметке, которые сообщил нам один из авторов статьи «Пространство  $L_p$  и замечательные точки треугольника» В.Протасов.

1. Когда  $p$  стремится к 0, величина  $\left( \frac{a^p + b^p + c^p}{3} \right)^{1/p}$  стремится к  $(abc)^{1/3}$ , иначе говоря,  $L_p$ -среднее стремится к среднему геометрическому. Для тех, кто знаком с основами математического анализа, приведем идею доказательства этого факта. Если число  $p$  близко к 0, то  $a^p$  равно  $1 + p \ln a$  с точностью до величины порядка  $p^2$  (которая очень мала). Поэтому  $(a^p + b^p + c^p)/3$  «примерно равно»

$$1 + (p \ln a + p \ln b + p \ln c)/3 = 1 + \frac{p}{3} \ln(abc).$$

А это, в свою очередь, с точностью до слагаемого порядка  $p^2$  равняется  $(abc)^{p/3}$ . Значит, при  $p \rightarrow 0$  величина  $\left( \frac{a^p + b^p + c^p}{3} \right)^{1/p}$  стремится к  $\left( (abc)^{p/3} \right)^{1/p} = (abc)^{1/3}$ . Но для каждого конкретного  $p$  минимум  $L_p$ -нормы достигается при тех же  $a, b, c$ , что и минимум  $L_p$ -среднего. Поэтому при  $p = 0$  задача превращается в поиск минимума среднего геометрического расстояний от точки до вершин. Он, конечно, достигается в вершине треугольника. Причем – в любой. Это показывает, что при  $p \rightarrow 0$  катастрофа обязательно произойдет, а точка минимума может «размножиться».

2. Возьмем произвольное  $p \in (0; 1)$  и вырожденный «треугольник» со сторонами  $AB = AC = 1$ ,  $BC = 2$ . Для этого «треугольника» минимум  $L_p$ -нормы достигается при любом  $p$  в точке  $A$ . Таким образом, для этого вырожденного «треугольника» срыв происходит уже при  $p = 1$ . Значит, для близкого к нему настоящего треугольника катастрофа происходит очень близко к  $p = 1$ .

# Почему в хорошую пиццерию не надо ходить в «час пик»

*А.ВАРЛАМОВ*

**С**РАВНИТЕЛЬНО НЕДАВНО ПРИШЕДШАЯ В РОССИЮ пицца имеет долгую, трехтысячелетнюю историю. Так, еще в Древнем Египте существовала традиция праздновать день рождения фараонов, поедая посыпанные ароматическими травами лепешки. Древнегреческий историк Геродот в своих трудах упоминает вавилонские рецепты различного рода таких лепешек, выпеченных из муки. Вергилий описывает процесс изготовления крестьянами времен Древнего Рима лепешек в очаге, весьма напоминающий выпечку современной пиццы. По-видимому, современное итальянское слово «пицца» имеет латинскую этимологию: оно созвучно с *pinsa* – причастием прошедшего времени от глагола *pinsere*, означающего по-латыни раздавливать, растирать. Упоминания о блюдах, подобных современной пицце, находятся и в исторических документах Средневековья и Возрождения различных средиземноморских стран. Но свой истинный дом, из которого пицца отправилась завоевывать мир, она нашла в лабиринтах переулков Неаполя первой половины XVIII века.

В победном шествии пиццы определяющими оказались два ее ингредиента: сыр «моцарелла» и помидоры. Первый появился в Неаполе благодаря германскому племени лангобардов, которые после падения Римской империи завоевали северную часть Италии, вплоть до Кампании, и привели с собой туда стада буйволов. Именно из жирного молока буйволиц в окрестностях Неаполя и производится до настоящего времени истинная моцарелла. Она очень нежна не только на вкус – моцарелла боится холода (побывав в холодильнике,

становится «резиновой») и живет всего несколько дней, плаывая в своей собственной сыворотке.

Второй ингредиент – помидоры – был завезен в Европу из Перу испанцами во времена колонизации Америки. В XVI веке испанцы господствовали и в Неаполе; одним из положительных последствий их владычества оказались горы помидоров на прилавках зеленщиков в старом городе. Сначала консервативные итальянцы отнеслись к заморскому овощу недоверчиво, однако климат Кампании для него оказался благоприятным, и постепенно помидор начал свой триумф в итальянской кухне, став основой многих соусов для спагетти и позднее – важнейшим ингредиентом пиццы.

С начала XVIII века в Неаполе открываются многочисленные лавки, называемые «пиццериями», где, среди прочей снеди, пекут и пиццу. Ввиду дешевизны и своих замечательных вкусовых качеств пицца становится блюдом, доступным и бедным, и богатым. Вскоре слава пиццы достигает ушей короля Королевства обеих Сицилий (Неаполитанского королевства) Фердинанда, который, чтобы попробовать это блюдо, пренебрегает дворцовым этикетом и отправляется в одну из таких пиццерий. С этого момента пиццерии входят в моду, становятся заведениями, где готовится только пицца.

Самой популярной пиццей в Неаполе того времени была пицца моряков – «Маринара». В существующем сегодня виде она возникла около 1730 года и по сей день представляет собой плоский диск из простого теста (дрожжи, вода, соль и мука), покрытый тонко порезанными помидорами и чесноком, политый не-



*Сыр «моцарелла» – необходимый компонент пиццы*



*Дровяная печь для приготовления пиццы*

большим количеством оливкового масла и посыпанный душицей (оригано). Перед тем как попасть на стол, неаполитанская пицца проводит пару минут в раскаленной печи рядом с жаркими поленьями (температура такая, что недалеко до плавления алюминиевой лопаты, с помощью которой пиццайоло засовывает пиццу в печь: 450–480 °С).

Другой популярный рецепт пиццы тех времен датируется 1796–1810 годами. Здесь на основу из того же пресного теста кладут помидоры, моцареллу и листочки базилика. Эти цвета повторяют цвета популярного в те времена на севере Италии триколора (вертикальные зеленая, белая и красная полосы), ставшего впоследствии национальным символом и объединенной Италии.

В 1889 в Неаполь приезжают король Италии Умберто I и его жена, королева Маргарита. Согласно легенде, лучший пиццайоло города Раффаэле Эспозито выпекает для них три различные пиццы. Из всех трех королева оценила именно пиццу цветов флага Италии, оценила настолько, что с тех пор эта пицца носит ее имя – «пицца Маргарита».

В 1989 году автору этой статьи посчастливилось оказаться в Неаполе во время празднования столетия пиццы «Маргариты», когда весь город отмечал юбилей, стены домов были раскрашены в красный, белый и зеленый цвета, а пиццу раздавали на улицах бесплатно.

В процессе массовой эмиграции итальянцев в начале XX века пицца с юга Италии перебралась на север Европы и за океан, завоевав Гренобль и Гамбург, Нью-Йорк и Чикаго, Токио и Мельбурн. Она настолько там прижилась, что сегодня многие уверены в американском происхождении пиццы.

Переехав из Неаполя в Рим, автор не сразу узнал полюбившееся ему блюдо. В римских пиццериях вместо мягкой, пышной, с возвышающимися завернутыми краями неаполитанской пиццы обычно подают тонкую, более сухую, размером и толщиной с толстый блин так называемую римскую пиццу. На ее поверхности, как и в случае неаполитанской пиццы, может лежать всякая вкусная всячина: и моцарелла с ветчиной и грибами, и содержимое той же «Маргариты», но еще украшенное кружками наперченного салями, и коллекция четырех разных сыров... Подают в Риме и «Наполи» – неаполитанскую пиццу с томатом, моцареллой, каперсами и анчоусами. В Неаполе же пиццу такого содержания, наоборот, называют «Романа» – римская. Кажется, что сочетать можно все что угодно и с чем угодно. Однако это не так – в итальянской кухне существуют строгие ограничения. Например, никто не станет посыпать дары моря сыром «пармезан» или смешивать



Королева Маргарита



Пицца «Маргарита»

рыбу и мясо. (Это, впрочем, не касается американских пиццерий.)

«Неофит святее папы», – говорит старая поговорка. Следуя ей, автор стал прилежно вникать в секреты приготовления пиццы. Первая заповедь, которую он услышал от итальянцев, – стараться всегда ходить в пиццерию, оборудованную дровяной, а не электрической печью. Хорошие пиццерии гордятся своим «forno» – так называется по-итальянски печь, – где весь процесс приготовления происходит у вас на глазах. Пиццайоло виртуозно «ваяет пиццу», сажает ее деревянной или алюминиевой лопатой в печь, мгновение – и она уже аппетитно пузырится кипящим сыром перед вами, призывая быть немедленно съеденной и запитой хорошим пивом.

Посещая всякий раз одну и ту же пиццерию «Два льва», расположенную недалеко от своего дома, автор вскоре получил ценный совет от дружелюбного пиццайолло Анжело: приходить ужинать надо или до восьми вечера, или после десяти, когда заведение полупустое. Это же подтверждал своим поведением и один из «львов» – толстый дымчато-серый кот, кормящийся при пиццерии «клиент»<sup>1</sup>. Во время наплыва народа он уходил гулять и совершенно не интересовался содержимым тарелок сидящих за столами.

Причина такого ограничения оказалась очень простой – в пропускной способности печи. Как мне объяснил все тот же Анжело, оптимальная температура для изготовления римской пиццы в дровянной печи с дном из огнеупорного кирпича это 325–330 °С.<sup>2</sup> При этом тонкая римская пицца «зреет» в печи 70–90 секунд.

<sup>1</sup> Во времена Древнего Рима клиентами называли свободных граждан, находящихся под покровительством патрона – знатного гражданина, часто патриция.

<sup>2</sup> Эта температура, конечно зависит от способа приготовления и хранения теста. Мой приятель Анжело, например, тесто готовит заранее – за сутки до того, как печь из него пиццу. Хорошо вымесив, он оставляет тесто на пару часов «отдыхать», затем делит его на порции (для неаполитанской пиццы это 180–250 г, для римской – меньше), по одной на пиццу, и в форме шариков кладет в деревянный короб. Тесто зреет еще 4–6 часов, затем его можно уже сажать в печь.



Пицца с морепродуктами

Таким образом, даже сажая в печь по две пиццы, пиццайоло сможет обслужить 40–50 посетителей в час. А в «часы пик» их в зале сидит не менее ста, да еще около кассы толчется десяток желающих унести пылающую жаром пиццу домой. Вот Анжело, в угоду доходам хозяина, и повышает температуру в печи до 390 °С, пиццы вылетают из печи уже каждые пятьдесят секунд, да только качество у них не то – дно и края чуть подгорели, а помидоры остались сыроватыми...

Найти (особенно в России) пиццерию с дровяной печью очень нелегко – для такой печи нужен дымоход, а как его сделаешь в многоэтажном доме современной постройки? Поэтому давайте разберемся, в чем же ее преимущества перед электрическим духовым шкафом и нельзя ли последний усовершенствовать так, чтобы он все же производил сносную пиццу.

Начнем издали. Допустим, что у вас повысилась температура, а термометр был разбит еще во время прошлой простуды. Мама приложит руку к вашему лбу, подождет немного и скажет: простудился, у тебя жар, завтра в школу не идешь. В физике, чтобы разобраться с явлением, всегда для начала задачу следует упростить. Представим себе, что мама измеряет температуру вашего лба не пальцами, а прикасаясь лбом ко лбу. При этом если температура вашего лба 38 °С, а ее лба 36 °С, то из симметрии задачи легко понять, что на границе между двумя лбами температура установится в 37 °С и мама почувствует, как к ней потечет поток тепла от вашего горячего лба.

А теперь представим, что у мамы голова *медная*, а температура – все те же 36 °С. Тогда интуитивно понятно, что температура на границе раздела понизится – скажем, до 36,5 °С. Это связано с тем, что хорошо проводящая тепло (ввиду высокой теплопроводности) медная голова будет отводить ваш жар от границы между лбами в глубину. При этом очевидно, что отвод будет тем эффективнее, чем меньше тепла требуется оставить в приграничной области, т.е. он увеличивается (а температура границы понижается) с уменьшением удельной теплоемкости материала.

Для того чтобы перейти к конкретным оценкам, напомним основные понятия и результаты физики теплопередачи. Под термином *теплота* (*тепловая*



Автор статьи А.Варламов и пиццайоло Анжело

*энергия*) обычно подразумевают часть энергии тела, связанную с движением его атомов, молекул или других частиц, из которых оно состоит. Понятие теплоты досталось нам в наследство из прошлого физики. Теплота, как говорят ученые, не является функцией состояния тела, ее величина зависит от того, каким путем тело в это состояние пришло. Теплота, как и работа, является не видом энергии, а величиной, удобной для описания ее передачи. Количество теплоты  $\Delta Q$ , необходимое для повышения температуры единицы массы вещества на один градус, называется удельной теплоемкостью вещества:

$$c = \frac{\Delta Q}{M \Delta T}.$$

Понятно, что в единицах СИ удельная теплоемкость измеряется в Дж/(кг·К). При приведении двух тел с различными температурами в тепловой контакт тепло от более нагретого устремляется к менее нагретому. В простейшем случае однородного неравномерно нагретого тела поток тепла  $q$ , т.е. количество теплоты, протекающее за единицу времени в направлении изменения (уменьшения) температуры через единичную площадку, перпендикулярную этому направлению, равно

$$q = \frac{\Delta Q}{S \Delta t} = -\frac{c M \Delta T}{S \Delta t} = -\frac{c M}{S} \frac{\Delta x}{\Delta t} \left( \frac{\Delta T}{\Delta x} \right). \quad (1)$$

Величина, стоящая в скобках, называется градиентом температуры, обычно обозначается  $\nabla T$  и говорит о том, как резко изменяется температура в пространстве.

В случае когда рассматриваемое неравномерно нагретое тело является газом, мы можем продолжить цепочку наших равенств. Действительно, масса некоторого количества газа есть произведение его плотности на объем:  $M = \rho V = nmSl$  (здесь  $\rho$  – плотность газа,  $m$  и  $n$  – масса молекул и их концентрация), а отношение  $\Delta x / \Delta t$  есть некоторая эффективная скорость  $v_{\text{эф}}$  движения молекул вдоль направления изменения температуры. Таким образом,

$$q = -cnmlv_{\text{эф}} \nabla T.$$

Произведение удельной теплоемкости на массу одной

молекулы равно теплоемкости молекулы  $c_m$ . (Для идеального газа, где молекулы рассматриваются как материальные точки, внутренняя энергия молекулы равна ее кинетической энергии.) В качестве длины выбранного малого цилиндра разумно взять длину свободного пробега, на протяжении которого молекула летит не сталкиваясь с другими:  $l = v_{\text{эф}} \tau_m$ . Тогда

$$q = -nc_m v_{\text{эф}} l \nabla T = -nc_m v_{\text{эф}}^2 \tau_m \nabla T = -\kappa \nabla T, \quad (2)$$

где коэффициент

$$\kappa = nc_m v_{\text{эф}}^2 \tau_m = nc_m \frac{\langle v^2 \rangle}{3} \tau_m$$

называется коэффициентом теплопроводности. Заметим, что квадрат проекции эффективной скорости молекулы на направление градиента температуры мы, воспользовавшись известным результатом молекулярной физики, выразили как  $1/3$  среднего квадрата скорости молекул.

Интересно, что найденное соотношение

$$q = -\kappa \nabla T \quad (3)$$

носит общий характер. При не очень резких изменениях температуры в пространстве оно оказывается справедливым не только для газов, но и для жидкостей и твердых тел: меняются только свойства коэффициента теплопроводности. Так, в газе он пропорционален  $\sqrt{T}$ , в то время как в металле, где главными переносчиками тепла при низких температурах являются электроны, коэффициент теплопроводности оказывается пропорциональным  $T$ .

Оценим теперь, как быстро распространяется в среде «тепловой фронт».<sup>3</sup> Пусть за время  $t$  температура в цилиндре с площадью основания на границе раздела температур  $S$  и длиной  $L(t)$  изменилась на  $\Delta T$ . Обратимся вновь к уравнению (1) и перепишем его в виде

$$q = \frac{\Delta Q}{St} = \frac{cpL(t)\Delta T}{t} = -\kappa \left( \frac{\Delta T}{L(t)} \right). \quad (4)$$

Мы воспользовались формулой (3) и заменили градиент температуры на отношение разности температур на границе раздела к ее размеру. Решая уравнение (4) относительно длины  $L(t)$ , находим

$$L(t) = \sqrt{\frac{\kappa t}{cp}}, \quad (5)$$

т.е. температура «проникает» в холодную среду по корневому закону от времени. Иными словами, время, за которое температура на глубине  $L$  сравнивается с температурой

контакта двух тел, зависит от величин  $\kappa$ ,  $c$  и  $\rho$ . Коэффициент  $\chi = \kappa/(cp)$  называется коэффициентом температуропроводности и является характеристикой материала. Для воды, например, он равен  $\chi_{\text{воды}} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Вооруженные знаниями о переносе тепла, вернемся к задаче о вычислении температуры на границе между двумя полупространствами: левым – с параметрами  $\kappa_1$ ,  $c_1$ ,  $\rho_1$  и температурой на бесконечности  $T_1$  и правым – с параметрами  $\kappa_2$ ,  $c_2$ ,  $\rho_2$  и температурой на бесконечности  $T_2$ . Пусть температура на границе раздела равна  $T_0$ . Напишем уравнение баланса теплового потока, т.е. условие того, что все тепло, приходящее из «теплого» левого полупространства, уходит через границу в холодное правое полупространство, считая, что все изменение температуры в полупространстве происходит на глубине проникновения в него «тепловой волны»:

$$q = \kappa_1 \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{\chi_1 t}} = \kappa_2 \frac{T_0 - T_2}{\sqrt{\chi_2 t}}.$$

Решая это уравнение относительно  $T_0$ , находим

$$T_0 = \frac{T_1 + v T_2}{1 + v}, \quad (6)$$

где

$$v = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \sqrt{\frac{\chi_1}{\chi_2}} = \sqrt{\frac{\kappa_2 c_2 \rho_2}{\kappa_1 c_1 \rho_1}}.$$

Прежде всего отметим, что время в нашу формулу не вошло, т.е. в первом приближении температура на границе со временем не меняется. Для случая одинаковых сред с разными температурами  $T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$ . Таким образом, мы количественно обосновали данный в начале статьи интуитивный ответ в  $37^\circ\text{C}$  для температуры на границе между двумя одинаковыми лбами. Если же холодный лоб – медный, то для него  $v \gg 1$  и  $T_0 \approx T_2$  – температура холодного медного лба от контакта с горячим обычным почти не возрастает.

Вот теперь мы готовы к обсуждению преимуществ дровяной печи. Посчитаем температуру на дне пиццы, которую мы сажаем в дровяную печь. Все необходимые для нас параметры приведены ниже в таблице. Первую строку таблицы нужно воспринимать как оценочную – автор нашел эти цифры в интернете, однако понятно, что их точные значения существенно зависят не только от типа используемой муки, но и от времени брожения теста (в процессе которого тесто насыщается газом,

<sup>3</sup> Далее автор следует прекрасной статье А.Бялко «Тепло твоих рук», опубликованной в журнале «Квант» 25 лет назад (см. «Квант» №4 за 1987 г.).

Материал	Теплоемкость $c$ , Дж/(кг·К)	Теплопроводность $\kappa$ , Вт/(м·К)	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Температуропроводность $\chi$ , м <sup>2</sup> /с	$v = \sqrt{\frac{\kappa_1 c_1 \rho_1}{\kappa_2 c_2 \rho_2}}$
Тесто	$(2-2,5) \cdot 10^3$	0,5	$(0,6-0,8) \cdot 10^3$	$0,7 \cdot 10^{-7}$	1
Пищевая сталь	$4,96 \cdot 10^2$	18	$7,9 \cdot 10^3$	$4,5 \cdot 10^{-6}$	0,1
Огнеупорный кирпич	$8,8 \cdot 10^2$	0,86	$2,5 \cdot 10^3$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	0,7

что, очевидно меняет его плотность). Принимая начальную температуру теста пиццы равной  $T_0^n = 10^\circ\text{C}$ , а температуру в печи, со слов пиццайоло Анжело, – за  $T_1^{\text{др}} = 330^\circ\text{C}$ , для температуры на границе между дном печи и дном пиццы находим

$$T_0^{\text{др}} = \frac{330^\circ\text{C} + 0,7 \cdot 10^\circ\text{C}}{1 + 0,7} \approx 200^\circ\text{C}.$$

Мы знаем, что при этом пицца готовится, скажем, за 80 с и получается отличного качества.

Повторим наш расчет для электрической печи со стальным дном. Для нее коэффициент  $v_{\text{эл}} = 0,1$ , а при разогреве до тех же температур  $T_1^{\text{эл}} = T_1^{\text{др}} = 330^\circ\text{C}$  температура на дне пиццы окажется равной

$$T_0^{\text{эл}} = \frac{330^\circ\text{C} + 1^\circ\text{C}}{1,1} \approx 330^\circ\text{C}.$$

Да при такой температуре пицца просто сгорит!

Хорошо, поставим задачу иначе. Пусть правы поколения мастеров деревянной лопаты и теста – температура на дне пиццы должна быть примерно  $200^\circ\text{C}$ . Какую при этом температуру нужно выставить в электрической печи со стальным дном? Ответ прямо следует из выражения (6), взятого с коэффициентом  $v_{\text{эл}} = 0,1$  и решенного относительно величины  $T_1^{\text{эл}}$  при заданной температуре  $T_0^{\text{эл}} = T_0^{\text{др}}$ :

$$T_1^{\text{эл}} \approx 220^\circ\text{C}$$

– электрическая печь должна быть гораздо холоднее дровяной.

Казалось бы, проблема решена – устанавливаем на регуляторе домашнего духового шкафа температуру  $220^\circ\text{C}$  и через минуту-две вытаскиваем прекрасную пиццу. Вовсе нет!

Оценим, какое количество теплоты получит пицца через свое дно от печи путем рассмотренного выше механизма теплопереноса, если не учитывать иных механизмов теплопередачи. Для ответа на этот вопрос воспользуемся формулой (3). Из таблицы видим, что коэффициент теплопроводности для теста  $\kappa = 0,5 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ . Для оценки величины градиента температуры формально следовало бы разделить разность температур  $T_0^{\text{др}} - T_0^n = 200^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}$  на толщину пиццы  $d \approx 0,5 \text{ см}$ . Однако заметим, что температура  $T_0^{\text{др}} = 200^\circ\text{C}$  соответствует температуре кирпичного дна печи непосредственно под пиццей. В тесте же она, благодаря испарению содержащейся в нем воды, очень быстро падает до температуры кипения воды  $T_k = 100^\circ\text{C}$ . Поэтому градиент температуры может быть оценен как  $\nabla T \approx \frac{100 \text{ К}}{0,005 \text{ м}} = 2 \cdot 10^4 \text{ К}/\text{м}$  (заметим, что это завышенная оценка – из-за излучения тепла поверхность пиццы будет независимо разогреваться). Соответствующее количество теплоты, получаемое  $1 \text{ см}^2$  пиццы за время, проведенное в печи, посредством теплопереноса, составит

$$\begin{aligned} \Delta Q_1 &= -\kappa S \nabla T \tau \approx \\ &\approx 0,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \frac{\text{К}}{\text{м}} \cdot 80 \text{ с} \approx 80 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

При этом все это тепло пойдет только на нагрев  $1 \text{ см}^2$  пиццы от начальной температуры  $T_0^n = 10^\circ\text{C}$  до температуры кипения воды  $T_k = 100^\circ\text{C}$ :

$$\begin{aligned} \Delta Q_2 &= c \rho d S (T_k - T_0^n) = \\ &= 2,5 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0,7 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \times \\ &\quad \times 0,005 \text{ м} \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 90 \text{ К} \approx 80 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

А как же быть с очевидным выпариванием воды из теста и томата, с плавлением сыра и тому подобное?

Тут следует вспомнить еще об одном, пока оставленном нами в стороне, механизме передачи тепла – об излучении.

Дровяная печь сделана с двойным сводом, заполненным песком, – она никогда не остывает. Ее стенки, как и дно, также разогреты до  $330^\circ\text{C} \approx 600 \text{ К}$ . При такой высокой температуре становится существенным излучение стенок: на пиццу «льется» поток инфракрасного излучения. Его интенсивность определяется законом Стефана–Больцмана:

$$\begin{aligned} I &= \sigma T^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4) \cdot 600^4 \text{ К}^4 = \\ &= 0,74 \cdot 10^4 \text{ Вт}/\text{м}^2, \end{aligned}$$

т.е. на  $1 \text{ см}^2$  пиццы за 80 с поступает энергия излучения

$$\Delta Q_3 = 60 \text{ Дж}$$

– величина того же порядка, что и полученная от дна печи. Таким образом, на разогрев  $1 \text{ см}^2$  пиццы до  $T_k = 100^\circ\text{C}$  и на испарение воды, содержащейся в тесте и в томатах, пойдут обе эти порции энергии:

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_3 \approx 140 \text{ Дж}.$$

В случае же относительно холодной стальной электрической печи, где температура всего  $220^\circ\text{C} \approx 490 \text{ К}$ , поступление энергии посредством излучения будет в  $(600/490)^4 \approx 2$  раза меньше: 30 Дж. Полная полученная энергия на  $1 \text{ см}^2$  пиццы в электрической печи составит 110 Дж против 140 Дж, полученных за то же время в дровяной печи. Значит, печь пиццу здесь придется дольше.

Конечно, как всегда в физике, для того чтобы понять суть явления, мы рассмотрели простейшую модель. Далеко не везде можно установить правильную дровяную печь, да и не все посетители поймут различие между очень хорошей и неплохой пиццей. Поэтому инженеры идут на ухищрения: в современной профессиональной электрической печи делают дно, изготовленное из специальной керамики, имитирующей дно дровяной печи. А чтобы прожаривать пиццу равномерно, делают это дно вращающимся и к излучению от стен печи добавляют термовентиляцию.

Но все же сухой жар, запах дров и другие благоприятные свойства старой дровяной печи остаются тем идеалом, к которому любые имитации и усовершенствования могут только стремиться.

# Автомобильные пробки: когда рациональность ведет к коллапсу

*А. ГАСНИКОВ, Ю. ДОРН, Е. НУРМИНСКИЙ, Н. ШАМРАЙ*

## Введение

Когда мы только начинали писать эту статью, нам на глаза попался прекрасный слоган в одной социальной рекламе: «Вы не застряли в пробке. Вы и есть пробка». Мало кто из водителей, стоящих в пробке, задумывается о том, что он сам становится причиной задержки тех людей, кто едет вслед за ним, а даже если и задумывается, то не придает этому большого значения. При этом, подрезая очередную машину, водители жалуются на то, как мало строится дорог.

Еще в XVIII веке британский экономист Адам Смит посеял в умах ученых и общественных деятелей увлекательный образ сообщества независимых экономических агентов – потребителей и производителей, каждый из которых, действуя в своих интересах, в результате создает эффективное общественное производство. Можно сказать, что это было первой редакцией лозунга «Анархия – мать порядка!». Однако еще раньше другие, не менее выдающиеся, умы человечества горестно отметили печальное исключение из этого правила – то, что эколог Хардин удачно окрестил «трагедией общей собственности».

Это значит следующее. Если некоторый ресурс находится в общей собственности и для его использования нет никаких ограничений, то он будет подвергаться чрезмерной эксплуатации и исчезнет. Стеллерова корова или почти исчезнувшее Аральское море тому наглядные примеры, и этот горестный список можно продолжить. Экономисты описывают «трагедию общей собственности» как такой вариант общественного устройства, когда с точки зрения отдельного потребителя выгоды от потребления ресурса достаются ему одному, а негативные последствия делятся на всех. В современном мире одним из таких ресурсов являются автомобильные дороги, а «синие мигалки» – наиболее яркое тому свидетельство, усугубленное узурпированным преимущественным правом некоторых пользователей на этот ресурс. Но и независимо от наличия или отсутствия «мигалки» каждый новый автомобиль на дороге приносит своему владельцу определенную пользу или удовлетворение, а негативные последствия – возрастающая плотность автомобилей, замедление движения, заторы и пробки – делятся на всех. Для принципиального выхода из этой ситуации нужна целая система мер, которые примирили бы эгоистическое

поведение водителей и общественную пользу, но это слишком обширная тема, для знакомства с которой можно порекомендовать общедоступную книгу В. Вучича «Город, удобный для жизни». Но в любом случае, когда ученые собираются что-то советовать, то они прежде всего изучают явление и определяют, как на него повлияют разные воздействия. В данном случае наиболее видимым и огорчительным являются уличные пробки. Так что же такое пробки и как с ними бороться?

## Откуда берутся пробки

Вообще говоря, прежде нужно понять, что такое пробка. Некоторые водители говорят о пробке, когда им приходится ехать со скоростью 20 км/ч из-за плотного движения, вместо желаемых 100 км/ч. Другие же подразумевают под пробкой почти глухой затор. Оба эти случая имеют общую природу – слишком много автомобилистов решили использовать одну и ту же дорогу. Все упирается в то, что понимается под «слишком много».

Можно было бы указывать на то, что у каждой дороги от перекрестка до перекрестка есть вполне конкретные ширина и длина и там «физически» не может поместиться слишком много автомобилей. Но этого аргумента недостаточно, ведь важна еще скорость движения. Если бы водители могли практически без зазоров между машинами ехать на скорости 1000 км/ч, то пропускная способность любой дороги была бы почти неограниченной. Ответ в том, что движение на дороге определяется тем, какие решения принимают водители. Для большинства из них «некомфортно» ехать на скорости 100 км/ч в режиме «бампер к бамперу» – слишком велики риски повредить автомобиль или попасть в крупную аварию. Например, в США еще в школах вождения учат «правилу 3 секунд» – поддерживайте между собой и впереди идущей машиной расстояние, которое вы на данной скорости проедете за 3 секунды. В непогоду это время рекомендуют утраивать. Нечего и говорить о том, что это правило написано кровью тех водителей, которые его не выполняли... Любопытно, что если при этом пренебречь собственными размерами автомобилей, то их поток, т.е. количество автомобилей, пересекающих за единицу времени некоторую

контрольную линию, не зависит от скорости и составляет 1200 автомобилей в час на одну полосу движения, что считается нормативной пропускной способностью дороги. Если учесть собственные размеры автомобиля, то пропускная способность существенно уменьшается, особенно при малых скоростях. Но это следует из простейших моделей движения автомобилей, в реальности нужно учитывать массу других факторов, одно перечисление которых может занять не одну страницу. Поэтому ограничимся хорошо установленным экспериментальным фактом – средняя скорость движения на дороге зависит от плотности автомобилей, т.е. их количества на единицу длины дороги, в качестве которой обычно рассматривается километр. При этом, чем больше плотность, тем ниже скорость. В простейшем случае предполагается линейная зависимость между плотностью  $R$  и скоростью  $v$ :

$$R(v) = -av + R_0,$$

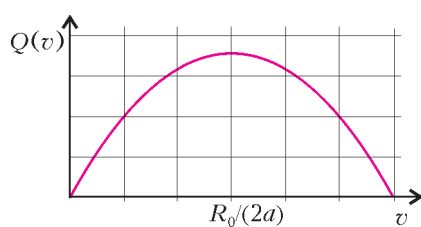
где  $a$  – некоторая константа.

Эта модель была предложена американским инженером-транспортником Брюсом Гриншилдом (Bruce Greenshields) в 1933 году и до сих пор широко используется в системах моделирования дорожного движения! Недавно в ее честь был даже проведен международный симпозиум, отметивший 75-летие первой публикации. Причина такого внимания к этой модели заключается в том, что она впервые ввела понятие *фундаментальной диаграммы поток-скорость* и продемонстрировала наличие максимального потока. Действительно, если мы определим поток  $Q(v)$  автомобилей в единицу времени как произведение  $Rv$ , то

$$Q(v) = -av^2 + R_0v,$$

и график этой квадратичной функции (рис.1) имеет максимум в точке  $v = \frac{R_0}{2a}$ .

С тех пор предложена масса модификаций этой зависимости, но сама концепция фундаментальной

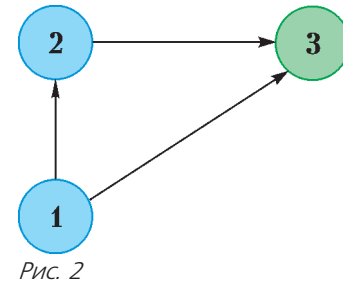


зависимости поток-скорость остается в основе большинства моделей, как и понятие максимального потока, который может обслужить дорога в единицу времени.

Когда на дорогу в единицу времени начинает въезжать больше автомобилей, чем ее пропускная способность, начинает образовываться пробка. Собственно говоря, при этом модель Гриншильда перестает быть применимой и начинается нерасчетный режим.

Представьте себе перекресток 1 (рис.2) и два маршрута, по которым можно доехать до пункта назначения в вершине 3. Причем дорога (1,3) – «короткая», а путь через вершину 2 – длинный объезд. Пусть дорога (1,3) будет двухполосной. В центре дороги (1,3) одна из полос закрыта на ремонт. В начальный момент времени, когда обе дороги пусты (например, в 5 утра), все

водители, желающие доехать из 1 в 3, воспользуются дорогой (1,3). Если одна полоса может обслужить 1500 авт./ч, а на дорогу в какой-то момент начнет поступать поток в 2500 авт./ч, встанет вопрос – куда денутся 1000 авт./ч? Конечно,



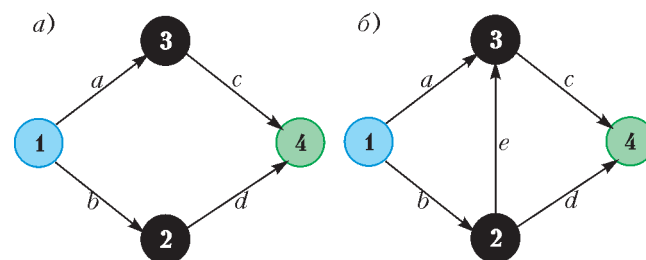
встанут прямо перед узким местом. Более того, из-за необходимости перестраиваться, по работающей полосе поток будет ниже 1500 авт./ч. С течением времени пробка будет расти. Вопрос номер два – когда пробка перестанет? Логика и законы сохранения нам подсказывают, что это случится, если количество въезжающих на дорогу водителей сравняется с количеством выезжающих, т.е. станет примерно 1500 авт./ч. Но куда денутся лишние 1000 авт./ч, ранее использовавшие данную дорогу в своем маршруте? Очевидно, начнут (из-за пробки) использовать объезд. Переключение на объездную дорогу произойдет ровно в тот момент, когда водителям будет безразлично, какой из маршрутов (короткий или объездной) использовать. Но ведь если бы объезд использовался с самого начала, пробки бы не возникло! Водителей можно понять, кому же захочется ехать в далекий объезд, если рядом короткая дорога, и пусть она работает на пределе, но уж мы как-нибудь прорвемся (а за нами хоть потоп!). Вот так и начинается пробка.

### Модель

В дальнейшем мы рассмотрим модель для описания поведения водителей и транспортной системы в целом на конкретном примере. Сеть, изображенная на рисунке 3, обычно используется для иллюстрации так называемого парадокса Брайеса.

На время забудем о рисунке 3,б (он понадобится нам позднее) и будем работать только с графом на рисунке 3,а.

Городская транспортная сеть задается взвешенным ориентированным графом  $\Gamma(V, E, T)$ , или, говоря проще, дороги представляются ребрами графа, они имеют заданное направление (поэтому граф направленный, т.е. ориентированный), перекрестки – вершины графа, при этом каждому ребру соответствует определенное время, которое водитель должен потратить на проезд. Это время и является «весом» ребра (поэтому граф взвешенный). Здесь  $V$  – множество вершин графа (множество перекрестков), на рисунке 3,а они обозна-





чены цифрами 1, 2, 3 и 4, а  $E$  – множество ребер графа (дороги), на рисунке 3,а дороги обозначены буквами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Каждой дороге соответствует свой «вес», который, вообще говоря, зависит от того, сколько людей эту дорогу использует. Понятно, что чем больше машин использует какую-то конкретную дорогу, тем больше пробка и тем больше времени потребуется на проезд. «Вес» дороги описывает зависимость времени на проезд по ребру от того, сколько автомобилей его использует. Обозначим функции весов дорог через  $f_a$ ,  $f_b$ ,  $f_c$  и  $f_d$  для ребер  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  соответственно.

В нашем модельном примере мы будем считать, что у всех ребер функции весов линейные, в частности,  $f_a(t) = f_d(t) = 50 + t$ ,  $f_b(t) = f_c(t) = 10t$ . Еще раз поясним, что, например, запись  $f_d(t) = 50 + t$  следует понимать примерно так: если по дороге  $d$  едет  $t$  водителей в единицу времени, то проезд по ребру  $d$  займет  $50 + t$  минут.

Предположим, что водители едут из вершины 1 в вершину 4, причем в единицу времени из 1 в 4 направляется одно и то же число водителей. В нашем примере оно равно 6. При этом, как легко показать, из 1 в 4 можно попасть по одному из двух маршрутов: 1-а-3-с-4 и 1-б-2-д-4. В нашей грубой модели водитель не будет тратить время на проезд через перекресток. Тогда время в пути для маршрутов будет определяться как сумма весов входящих в маршрут ребер. Например, для маршрута 1-а-3-с-4 время в пути составит  $f_a + f_c$ , а для маршрута 1-б-2-д-4 время в пути составит  $f_b + f_d$ . Обозначим через  $x$  транспортный поток на маршруте 1-а-3-с-4, а через  $y$  – транспортный поток на маршруте 1-б-2-д-4. Под транспортным потоком на маршруте подразумевается количество водителей, выезжающих из 1 в 4 по этому маршруту в единицу времени. При этом, очевидно,  $x + y = 6$ .

Легко показать, что для графа на рисунке 3,а поток на ребрах  $a$  и  $c$  равен  $x$ , а поток по ребрам  $b$  и  $d$  равен  $y$ . Соответственно, время в пути для маршрута 1-а-3-с-4 будет равно  $f_a(x) + f_c(x)$ , а для маршрута 1-б-2-д-4 время в пути будет равно  $f_b(y) + f_d(y)$ .

Водители, выбирая свой маршрут следования, ведут себя эгоистично. В нашем случае это значит, что они выбирают маршрут с наименьшими ожидаемыми издержками. Но чем больше водителей выбирают тот или иной маршрут, тем выше издержки на данном маршруте. С другой стороны, мы зафиксировали общее число машин, выезжающих из вершины 1 в вершину 4 в единицу времени, а значит, если каким-то маршрутом стало пользоваться большее количество автомобилистов, то есть какой-то маршрут, который стал использоваться меньше. Вероятно, что на этом втором маршруте издержки, напротив, упадут. Таким образом, первый, ранее привлекательный, маршрут становится более обременительным, а альтернативные маршруты при этом становятся более привлекательными. Это мотивирует водителей вновь изменить свой маршрут. Но такая «болтанка» происходит не всегда.

Введем понятие равновесия (Нэша–Вардропа). Назовем распределение потоков по маршрутам равновес-

ным, если время проезда по всем *используемым* маршрутам одинаково и не превосходит времени в пути на неиспользуемых маршрутах.<sup>1</sup>

Смысл этого утверждения очень прост: равновесное распределение потоков по маршрутам – это когда водители так выбирают свои маршруты, что никому в отдельности не выгодно менять свой выбор. Если бы, например, для графа на рисунке 3,а реализовалось равновесие и мы бы рассмотрели произвольного водителя, использующего маршрут 1-б-2-д-4, то мы могли бы сказать, что этому водителю не выгодно менять свой маршрут.

Для нашего примера найти равновесие очень просто. Всего возможны три варианта:

- 1)  $x = 6, y = 0, f_a(6) + f_c(6) \leq f_b(0) + f_d(0)$ ;
- 2)  $x = 0, y = 6, f_a(0) + f_c(0) \geq f_b(6) + f_d(6)$ ;
- 3)  $x + y = 6, x > 0, y > 0, f_a(x) + f_c(x) = f_b(y) + f_d(y)$ .

Заметим, что в нашем случае  $f_a(t) + f_c(t) = 11t + 50 = f_b(t) + f_d(t)$ . Отсюда имеем  $f_a(0) + f_c(0) = f_b(0) + f_d(0) = 50$  и  $f_a(6) + f_c(6) = f_b(6) + f_d(6) = 116$ . Следовательно, варианты 1) и 2) отпадают. Для того чтобы найти равновесное распределение потоков, нужно решить систему уравнений 3):

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 11x + 50 = 11y + 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 3. \end{cases}$$

Легко доказать, что полученное решение удовлетворяет условиям равновесия. Действительно, время в пути на используемых маршрутах совпадает и равно  $11 \cdot 3 + 50 = 83$ , а неиспользуемых маршрутов просто нет.

Резюмируя, техника поиска равновесий следующая.

1. Все маршруты делятся на используемые и неиспользуемые в равновесии. Получается огромное количество вариантов разделений.
2. Выбирается конкретное разделение.
3. Ищется такое распределение суммарного потока по используемым маршрутам, чтобы время в пути на всех используемых маршрутах было одинаковым. Если такого не существует, разделение «бракуется». Если есть, переходим к следующему пункту.

<sup>1</sup> Понятие равновесия было определено Джоном Нэшем (тем самым, о котором снят интересный фильм «Игры разума») в конце 40-х годов XX века. Концепция равновесия игры является центральной в теории игр, познакомиться с ней можно в любом учебнике по теории игр или исследованию операций. Позднее, в 1994 году, именно за эту концепцию Джон Нэш получил Нобелевскую премию по экономике. Мы также добавляем фамилию Дж.Г.Вардропа, которой чуть позже Нэша добавил к этой концепции условие «конкурентного рынка»: игрок, принимающий решение, пренебрегает тем, что его решение сколько-нибудь значительно меняет ситуацию в транспортной системе (в нашей модели это и есть «рынок»). Когда игроков двое или трое (ситуации, рассматриваемые Нэшем), то очевидно, что так делать нельзя. Но когда игроков (водителей) десятки и сотни тысяч...

4. Проверяется, что для всех неиспользуемых маршрутов время в пути не ниже, чем на используемых.

Если найденное распределение потоков по маршрутам удовлетворяет этим условиям, то оно и есть исконое. Вообще говоря, равновесий может быть несколько или даже бесконечно много. Заметим также, что на практике, конечно, применяются намного более эффективные алгоритмы поиска равновесий. Описанный выше способ – самый примитивный, мы привели его из-за наглядности.

Пример выше иллюстрирует тот факт, что в равновесии ни один из водителей не может выиграть, изменив свой маршрут. Поэтому, если система находится в равновесии, то она в этом равновесии и останется (вообще говоря, мы должны были бы потребовать устойчивость равновесия, но сейчас не хотелось бы говорить об этом). Данное равновесие носит имя Нэша и Вардропа (об этом уже упоминалось чуть выше) по следующим причинам. Если рассмотреть игру, в которой водители являются игроками, маршруты – стратегиями (другими словами, возможными действиями игроков), а издержки, соответствующие маршрутам и взятые со знаком «минус», – выигрышами, то выписанное определение будет являться определением равновесия Нэша в построенной игре. Собственно, существование равновесия гарантируется теоремой Нэша, с которой можно познакомиться в любом учебнике по теории игр. В ней, в общем, и постулируется существование равновесия в играх, подобных рассмотренной нами. Вардроп же предложил два принципа, описывающих возможное поведение водителей. Первый из них предполагает, что все водители действуют оппортунистически и считают собственное влияние ничтожным. Второй принцип, напротив, говорит, что водители могут действовать согласованно с целью минимизировать общественные издержки. Собственно этими двумя принципами и их комбинациями, по мнению Вардропа, и описываются все возможные и существенные для анализа варианты поведения.

#### Парадокс Брайеса и неэффективные дороги

Немецкий математик Дитхард Брайес вошел в историю как автор простейшего примера, демонстрирующего, к чему приводит эгоистичное поведение.

Брайес рассмотрел простейшую транспортную сеть, соединяющую двумя непересекающимися маршрутами начальный и конечный пункты 1 и 4 (см. рис.3).

Мы уже искали равновесие для графа на рисунке 3,а и получили, что  $x = y = 3$ ,

$$f_a(3) + f_c(3) = f_b(3) + f_d(3) = 83.$$

Однако Брайес на этом не остановился и рассмотрел модификацию первоначальной сети, где построена дополнительная дорога, напрямую соединяющая промежуточные пункты (рис.3,б), которую мы назовем  $e$ . Дорога получилась приличного качества и относительно короткая, так что время проезда по ней определяется формулой

$$f_e(t) = t + 10.$$

Заметим, что у водителей, которые едут из 1 в 4, появился новый маршрут  $1-b-2-e-3-c-4$ . Каким будет новое равновесие и каким будет время проезда?

Можно себе представить, что в первое время, пока эта дорога еще мало кому известна, поток по ней равен 0 и, следовательно, у того водителя с нижнего маршрута, который первым свернул на нее, время проезда составит

$$f_b(3) + f_e(0) + f_c(3) = 30 + 10 + 30 = 70.$$

Это явно меньше 83 минут. Ура, сворачиваем! Но что происходит дальше? За нами сворачивают новые машины, водители которых, видимо, провели те же самые расчеты! Та же самая логика, которая применялась и для исходной сети, должна быть применена и в этом случае – потоки перераспределятся так, что время проезда по каждому маршруту будет одинаково и никому из водителей не будет смысла менять маршрут. Мы получим новое равновесие.

Действуя по нашей схеме, мы должны определить возможные разделения маршрутов на используемые и неиспользуемые. Всего у нас будет 7 вариантов:

1-a-3-c-4	1-b-2-d-4	1-b-2-e-3-c-4
+	0	0
0	+	0
0	0	+
+	+	0
+	0	+
0	+	+
+	+	+

Пусть нам известно, что равновесие получается в случае, когда все маршруты используются. Обозначим через  $z$  транспортный поток на новом маршруте  $1-b-2-e-3-c-4$ . Решим систему уравнений, которая получается из условия равновесия:

$$\begin{cases} f_a(x) + f_c(x+z) = f_b(y+z) + f_d(y), \\ f_a(x) + f_c(x+z) = f_b(y+z) + f_c(x+z) + f_e(z), \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

В первом уравнении мы написали, что времена проезда в равновесии для маршрутов  $1-a-3-c-4$  и  $1-b-2-d-4$  равны. Во втором уравнении мы записали то же требование для маршрутов  $1-a-3-c-4$  и  $1-b-2-e-3-c-4$ .

Преобразуем систему, подставив вместо функций их значения:

$$\begin{cases} 50 + x + 10(x+z) = 10(y+z) + 50 + y, \\ 50 + x + 10(x+z) = 10(y+z) + 10(x+z) + 10 + z, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Решая систему, получаем  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $z = 2$ , т.е. в равновесии суммарный поток распределится по маршрутам в равных долях  $x = y = z = 2$ , а время в пути для всех маршрутов составит

$$f_a(2) + f_c(4) = 50 + 2 + 40 = 92.$$

*Замечание.* То, что здесь и ранее в равновесии потоки по маршрутам оказались равны между собой, – чистая случайность и результат подбора таких функций весов,

чтобы «получилось красиво». В равновесии у маршрутов равны времена в пути (!), а не потоки.

Что замечательно (с исследовательской точки зрения, с практической же точки зрения это ужасно), время в пути после добавления нового ребра для всех водителей возросло. Это увеличение является следствием того, что мы позволили каждому водителю поступать эгоистично, выбирая маршруты так, чтобы никому не было выгодно отклониться от равновесия.

Описанный выше парадокс Брайеса произрастает из неэффективности равновесия Нэша–Вардропа с точки зрения общественного блага. Говоря проще, из-за эгоистичности водителей суммарные издержки всех водителей в равновесии выше, чем вообще могли бы быть при некотором другом распределении.

Определим теперь понятие социального оптимума. *Социальный оптимум* – это такое распределение потоков по маршрутам, при котором суммарное время в пути у всех водителей минимально.

Тем самым, для того чтобы найти социальный оптимум в нашей системе, нам нужно было бы решить следующую задачу – найти

$$\min (x \cdot (f_a(x) + f_c(x+z)) + y \cdot (f_b(y+z) + f_d(y)) + z \cdot (f_b(y+z) + f_c(x+z) + f_e(z)))$$

при условии  $x + y + z = 6$ , где  $x, y, z$  неотрицательны, т.е. найти

$$\min (50 \cdot x + 11 \cdot x^2 + 20 \cdot xz + 50 \cdot y + 11 \cdot y^2 + 20 \cdot yz + 21 \cdot z^2 + 10 \cdot z).$$

Выразив  $z$ , сводим задачу к поиску

$$\min (816 - 92 \cdot x - 92 \cdot y + 2 \cdot xy + 12 \cdot x^2 + 12 \cdot y^2).$$

Можно доказать, что точкой минимума при условии неотрицательности переменных будет тройка  $(3, 3, 0)$ .

Все описанные проблемы с пробками проистекают из-за того, что социальный оптимум обычно (как в нашем случае) не является равновесием.

Конечно, возможны ситуации, когда равновесие Нэша–Вардропа является социальным оптимумом, но в общем случае это не так.

Заметим, что в социальном оптимуме ребро  $e$  не используется. Оно неэффективно. Эгоизм же водителей приводит к его использованию. Можно показать, что это верно для любых неэффективных ребер (т.е. таких, от чьего удаления кто-то из водителей выиграет, но никто не проигрывает). Их появление является следствием неэффективности равновесия.

Итак, мы показали, что из-за эгоизма водителей могут возникать неэффективные ребра и прочие проблемы. Невелика заслуга. Вопрос только в том, насколько (!) это плохо.

Чтобы ответить на него, нам нужно найти некоторую характеристику или численную меру эффективности распределения транспортных потоков при заданном графе и числе выезжающих автомобилей (в единицу

времени). Первое, что приходит в голову, – совокупное время в пути.

Влияние эгоистичности водителей можно оценить по разнице между временем в пути в реализовавшемся распределении (т.е. равновесием) и временем в пути при оптимальном поведении водителей (т.е. социальном оптимуме). В нашем случае эта величина равна  $92 - 83 = 9$ .

Много это или мало? Ответ зависит от графа и загрузок. Традиционно мерой неэффективности является так называемая «цена анархии» – отношение времени в пути в худшем равновесии ко времени в пути при оптимальном распределении потоков. В нашем случае «цена анархии» равна  $\frac{92}{83} \approx 1,1084$ .

Насколько большой может быть «цена анархии», зависит от того, какие функции весов мы выберем, и «не зависит» от размеров графа транспортной сети. Например, для нашей сети, в которой время в пути по ребру зависит от потока линейно, максимальное значение «цены анархии» равно  $\frac{4}{3}$ .

### Платные дороги

Замечательное свойство неэффективных ребер заключается в том, что с ними можно эффективно бороться. Действительно, достаточно запретить проезд по неэффективному ребру, как транспортная ситуация улучшится. Поставил кордон – и дело сделано!

В этот момент самое время вспомнить введение нашей статьи. Мы показали, что участники движения во многом сами являются причиной возникновения пробок. При этом разговоры о том, что нужно строить больше дорог для того, чтобы все поехало, не приведут ни к чему хорошему. Иногда, чтобы все поехало, надо дороги закрывать. Беспорядочное строительство, наоборот, может привести к ухудшению транспортной ситуации.

Только что мы сказали «поставил кордон – и дело сделано». Но ни один чиновник никогда не поставит кордон. Как же так: сначала за 29 миллиардов построим дорогу, а потом ее закрывать? Нонсенс! Уж лучше пусть смочет (как это произошло во Владивостоке в 2012 году). Тем более, ребро является неэффективным только при определенных загрузках. Возможно, ситуация и загрузка сети со временем изменятся и наличие ребра (ранее неэффективного) будет полезным. Было бы неприятно закрыть дорогу, дать ей разрушиться, а через десять лет строить на том же месте новую, так как она снова стала нужна.

Куда более прагматичным будет решение сделать проезд по неэффективным ребрам платным. С одной стороны, установив очень большую плату, мы можем свести поток по неэффективному ребру к минимуму. С другой стороны, мы позволяем планировщикам сохранить лицо. Дорога же работает и исправна – езда на здоровье! Ну и наконец, если вдруг ситуация поменяется так, что ребро вновь станет эффективным, то плату можно будет снизить или вовсе убрать.

С точки зрения математики, это будет выглядеть так. Назначение платы за проезд по ребру  $e$  в размере  $\alpha$  соответствует замене  $f_e(x)$  на  $f_e(x) + \alpha$ . Это приводит, вообще говоря, к смещению равновесия. Правильное назначение платы делает возможным изменение равновесия в благоприятную сторону. Продемонстрируем это на примере.

Назначим плату за проезд по ребру  $e$  графа на рисунке 3,б в размере 6,5. Решая заново систему, мы получим, что новым равновесием будет точка  $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1)$ . Издержки за проезд водителей снизились с 92 до 87,5. Отлично! Давайте увеличим плату в 1,5 раза до 9,75. Повторяя процедуру, найдем новое равновесие  $(\frac{11}{4}, \frac{11}{4}, \frac{1}{2})$ . Издержки снова упадут до 85,25. Вспоминая, что минимальные издержки за проезд, которые вообще возможны (для этого графа и загрузок), составят 83, можно сказать, что мы уже совсем близки к цели. Действительно, лучшее, чего мы могли бы достигнуть, — это оптимальное распределение, поэтому в равновесии при введенных платах издержки не могут быть ниже 83. Когда мы дойдем до платы в 13, по ребру  $e$  водители ездить перестанут. При этом нам повезет, и новое равновесие будет социальным оптимумом (что наблюдается не всегда).

Но самое главное свойство платных дорог заключается в том, что, устанавливая подходящую плату, мы можем бороться не только с неэффективными ребрами, но и с возникающими пробками. Мы уже обсуждали выше, что пробки возникают из-за того, что нужно «выровнять» издержки за проезд по быстрым и медленным маршрутам, если быстрые маршруты не могут обслужить самостоятельно весь автомобильный поток. Этого требует принцип Вардропа. Но ведь плата за проезд тоже может выровнять эти издержки! Механика тут будет точно такой же, как в примере выше.

Теперь, когда мы знаем откуда берутся пробки и как можно их побороть, самое время отточить навыки.

### Задачи

1. Найдите равновесное распределение потоков для транспортного графа на рисунке 3,б, если суммарно из 1 в 4 в единицу времени направляются 2 автомобиля.

2. Как можно объяснить следующее противоречие: в описанной в статье модели время в пути по дуге есть строго возрастающая функция от величины потока на дуге, а согласно фундаментальной диаграмме Гриншилдса эта зависимость не является однозначной — есть две ветки, одна из которых соответствует малым и умеренным плотностям и согласуется с отмеченной зависимостью, другая, соответствующая большим плотностям, приводит к убывающей зависимости времени в пути от величины потока?

3 (де Пальма). Из жилого района в рабочий район утром должны отправляться 10000 автомобилей. Водитель каждого автомобиля хочет приехать ровно к 9 часам утра в рабочий район. При этом каждая минута опоздания штрафует в 10 рублей, а каждая потерянная минута в пути или в ожидании начала рабоче-

го дня, если водитель приехал раньше времени, стоит 3 рубля. Время в пути по свободной дороге занимает 60 минут. Но на середине дороги есть узкое место, пропускная способность которого ограничена 3000 автомобилей в час. Покажите, что равновесное распределение водителей по времени выезда из жилого района  $n(t)$  представимо в виде

$$n(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1, \\ n_1, & t_1 \leq t < t_2, \\ n_2, & t_2 \leq t < t_3, \\ 0, & t \geq t_3. \end{cases}$$

Найдите  $n_1, n_2, t_1, t_2, t_3$ .

4. Рассмотрите транспортный граф на рисунке 4. Считайте, что характеристики графов, включенных в

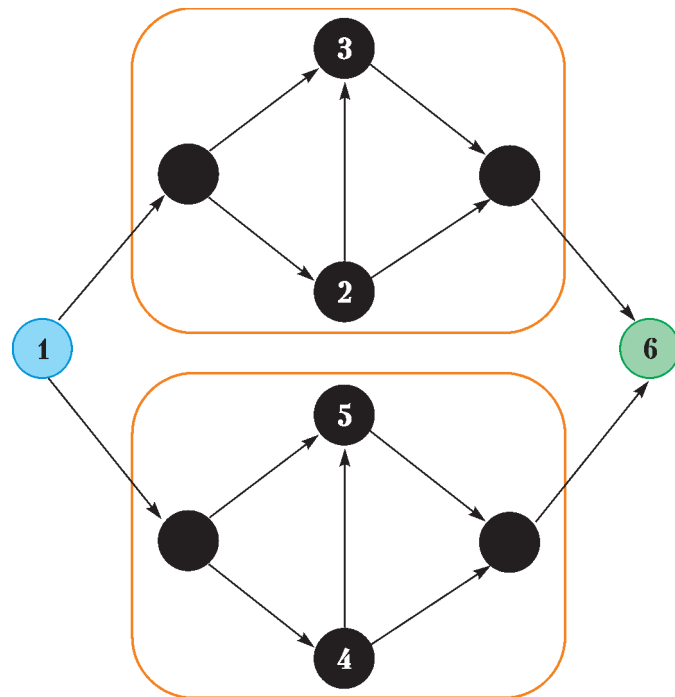


Рис. 4

оранжевые прямоугольники, совпадают с характеристикой транспортного графа на рисунке 3,б. Дороги, соединяющие вершины 1 и 6 с этими графами, такие, что по ним может проехать сколько угодно много автомобилей, причем время в пути будет пренебрежимо мало. Найдите равновесное распределение потоков, если суммарный поток из 1 в 4 равен: а) 2; б) 6; в) 10; г) 14.

5. Являются ли дороги в графе на рисунке 4, соединяющие вершины 2 и 3, 4 и 5 соответственно, неэффективными, и если да, то при каком суммарном потоке?

# Премия за «прорывные» эксперименты

**Л. БЕЛОПУХОВ**

**О**СНОВАНИЕ НОБЕЛЕВСКОЙ ПРЕМИИ ПО ФИЗИКЕ за 2012 год, присужденной французу Сержу Арошу и американцу Дэвиду Вайнленду, сформулировано так: «за прорывные экспериментальные методы измерения отдельных квантовых систем и манипулирования ими». На английском (официальном языке нобелевского церемониала) это звучит так: «for ground-breaking experimental methods...» Буквальный перевод «ground-breaking» – «разбивающие преграды», и применяется это словосочетание обычно для обозначения океанских волн (цунами), прорывающихся на берег сквозь разрушенные преграды. Так куда же сделан этот прорыв?

Прорыв произошел в интерпретации важнейшего положения квантовой механики – принципа неопределенности. Установленный в 20-х годах XX века, этот принцип ограничивает теоретические и экспериментальные возможности подхода к квантовым объектам (микрочастицам и фотонам) с позиций макроскопической физики. Оказалось, что невозможно точно определить состояние частицы, выражая его привычными макроскопическими характеристиками. Например, нельзя одновременно узнать координату и скорость частицы. Если же попытаться сделать это экспериментально, то сам акт измерения изменит состояние частицы так, что о ее предыдущем состоянии нельзя будет сделать точных выводов. В частности, становится лишенным смысла понятие траектории электрона в атоме. Согласно квантовой механике, это вовсе не те круговые или эллиптические орбиты, которые для большинства людей символизируют атом. Это нечто такое, что в принципе не представимо зрительным образом (в химии это «нечто» называется словом «орбиталь»).

Но квантовая физика нашла способы отображения жизни и судьбы квантовой частицы. Один из способов связан с волновой квантовой механикой. Она ставит в соответствие частице математический образ – волновую функцию, или, как ее часто называют, пси-функцию. Сама пси-функция имеет непростой вероятностный смысл, но с ее помощью можно найти любые важные для практики характеристики, например энер-

гию электрона в атоме, его вращательные, а значит, и магнитные свойства, вероятности расположения электрона в районе атомного ядра и многое другое.

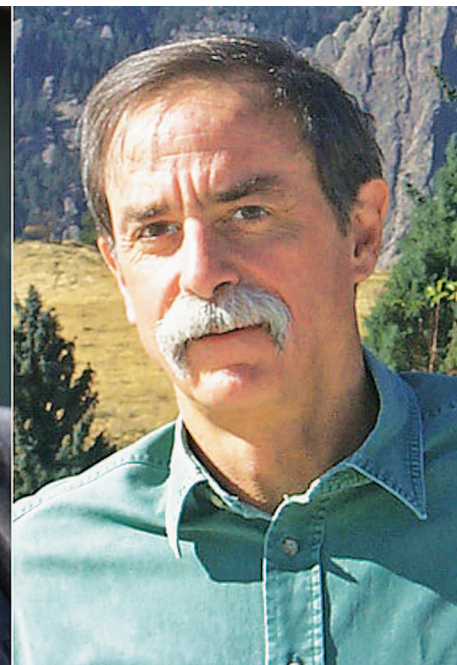
Важными успехами квантовой механики стали обоснование периодической системы элементов и построение физики твердого тела – основы всей современной электроники. Создание современных электронных средств, изменивших мир в конце XX века, было бы невозможным без квантовой науки. Если бы это делалось чисто экспериментальным путем, то на это ушли бы сотни лет. Ведь даже при создании простой электрической лампочки Эдисону потребовался целый год экспериментов для подбора подходящего материала нити накаливания. Без квантовой науки не была бы создана Стандартная модель, объясняющая как почти все явления микромира, так и происхождение нашего мегамира – Вселенной. Сейчас наука все ближе подбирается к тайне человеческого сознания, гипотетически рассматривая его как необычайно сложный компьютер, логические элементы которого имеют атомные размеры.

Но на пути миниатюризации компьютерных технологий квантовая механика ставит барьер. Элементарная ячейка информации бит при уменьшении до атомных размеров оказалась ненадежной из-за принципа неопределенности, запрещающего получение четкой информации типа «да – нет». При попытке получения этой информации квантовый бит (кубит) разрушался. На научном языке – происходил коллапс волновой функции. Но те исследователи, которые стали заниматься квантовыми компьютерами, не теряли надежды.

Еще в 1957 году молодой американский физик-теоретик Хью Эверетт выдвинул гипотезу о роли в микромире множества «параллельных вселенных». В этой теории возникло понятие квантовой сцепленности, при которой квантовые состояния объектов остаются связанными меж-



Французский физик Серж Арош



Американский физик Дэвид Вайнленд

ду собой на любом расстоянии друг от друга. Появилась надежда, что принцип неопределенности с его запретами и коллапсом волновой функции при попытках точного определения состояния квантового объекта удастся обойти в подходящих экспериментальных условиях.

И вот, две группы физиков-экспериментаторов около 30 лет назад взяли за решение этой казавшейся многим безнадежной задачи, не залезая в дебри анализа квантовой механики. Руководители этих групп и стали Нобелевскими лауреатами 2012 года. Приведем выдержку из официального сообщения о премии: «Благодаря гениальным лабораторным методам, невероятной любознательности и инженерному таланту им вместе со своими исследовательскими группами удалось измерять и контролировать очень хрупкие квантовые состояния, которые раньше считались недоступными для непосредственного наблюдения».

Две группы шли разными путями. Парижской группой руководил и продолжает руководить Серж Арош (Serge Haroche), профессор и заведующий кафедрой квантовой физики парижского Коллеж де Франс. Эта группа изначально поставила целью запереть фотоны в ловушку и научиться точно определять их число и характеристики. Легко сказать – запереть. Но ведь в лазере это удалось сделать. И по похожему пути пошла группа Ароша.

«Сердцем» установки стал резонатор – маленькая корбочка с двумя вогнутыми металлическими (ниобиевыми) зеркалами, отстоящими на расстояние 2,7 см. Находящийся внутри резонатора фотон, многократно отражаясь, будет метаться туда-сюда. Ниобиевые зеркала тщательно отполированы и находятся в сверхпроводящем состоянии

(при температуре несколько кельвинов). В этих условиях вероятность поглощения зеркалом фотона во много раз меньше вероятности его отражения, и фотон до своей «гибели» успевает в возвратном движении пройти огромный путь. Например, у фотона, соответствующего электромагнитному излучению с длиной волн 3 мм (очень короткие радиоволны), этот путь равен 60000 км! А время существования фотона в резонаторе составляет при этом 0,2 с – вечность по меркам микромира. Более привычная научная формулировка такой ситуации с запертым фотоном звучит так: между зеркалами устанавливается стоячая волна, существующая достаточно долго. Таким образом, в этих опытах фотоны перешли в категорию долгоживущих частиц, что предоставляет большие возможности для манипулирования с их рождением и подсчетом их числа.

«Манипуляторами» в опытах Ароша служили сильно возбужденные атомы щелочных металлов (так называемые ридберговские атомы). В недавних опытах использовались атомы рубидия (порядковый номер 44). Не возбужденный атом рубидия представляет собой более или менее симметричный остов с 43 электронами, находящимися в К-, L-, M- и N-оболочках. Последний, 44-й электрон находится уже в O-оболочке, на значительно большем расстоянии от ядра, чем электроны остова. При столкновениях во время хаотического движения атомы возбуждаются вплоть до ионизации – потери этого наружного электрона. Экспериментаторы овладели ювелирным искусством выделять из общей массы возбужденных атомов рубидия те, у которых электрон сильно возбудился, но еще не отделился от атома. Такие атомы называют

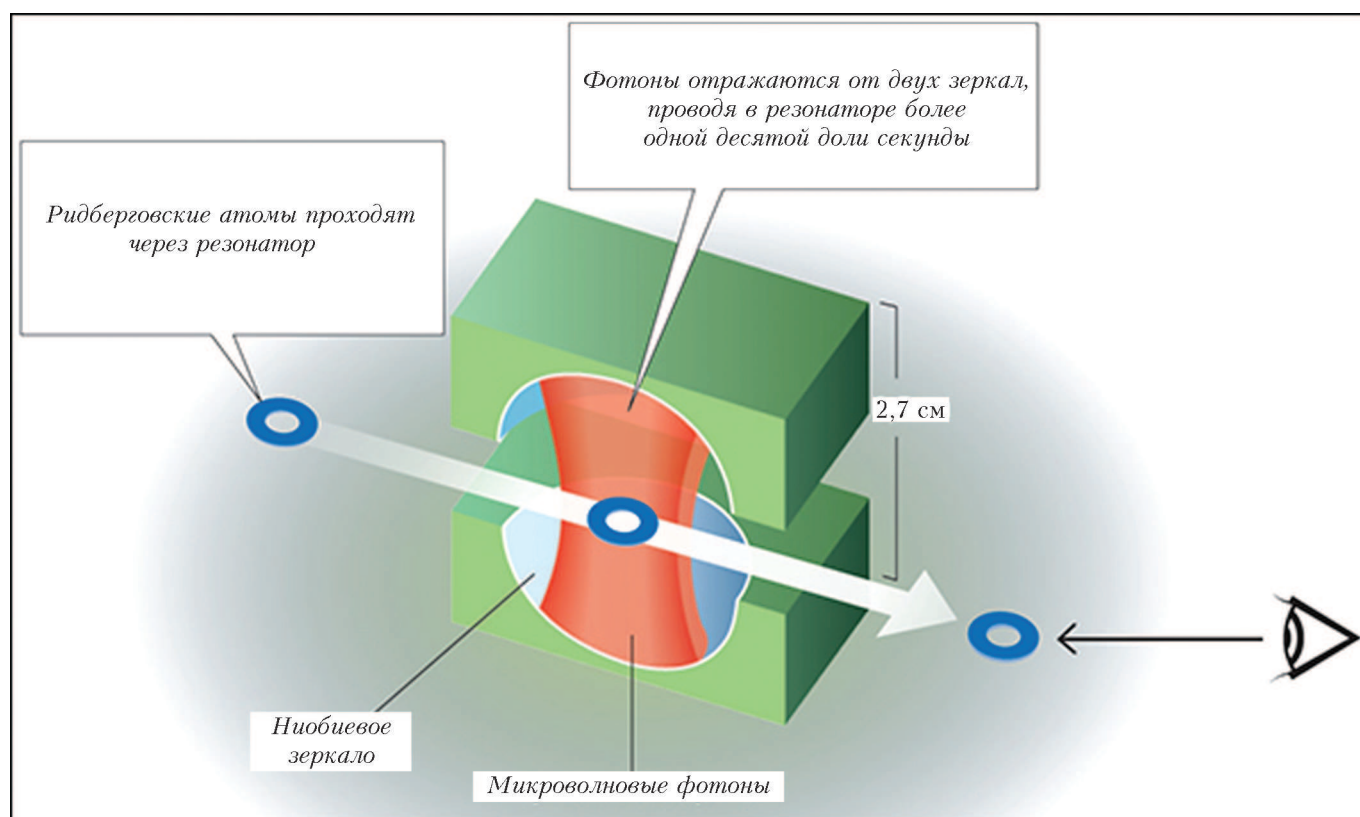


Схема установки с ловушкой фотонов (эксперимент группы Ароша)

ридберговскими – по-видимому, потому, что они похожи на водородоподобные ионы, для спектров которых Иоганнесом Ридбергом еще в 1890 году была найдена эмпирическая формула, блестяще подтвержденная в 1913 году Нильсом Бором в его полуклассической теории атома. Из квантовой теории атома следует, что возбужденный электрон ридберговского атома может иметь распределение, геометрия которого напоминает растянутый и сплюснутый тор. Максимальное «сгущение» этого торообразного состояния находится от ядра атома на расстоянии 60 нанометров, тогда как размер атомного остова всего лишь доли нанометра. Образно можно сказать, что атом при этом похож на расплюснутый бублик, в центре которого находится маленький шарик (остов атома).

Одиночный ридберговский атом вне резонатора живет по своим собственным законам и, стремясь уменьшить свою энергию, излучает фотон. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии при этом совершенно не зависит от внешних условий. Такое излучение называют самопроизвольным. Но когда атом поместили в ловушку и он очутился между ее зеркалами, то оказалось, что время жизни возбужденного атома изменялось – увеличивалось или уменьшалось. Излучение атома стало теперь не самопроизвольным, а вынужденным, как это происходит, например, в рабочем веществе лазера. В опытах Ароша было получено рекордное уменьшение времени жизни возбужденного атома – в 500 раз!

Как же это понять? Ведь в резонаторе атом находится в вакууме, зеркала отстоят от него на достаточно большие расстояния. Роль резонатора при этом – всего лишь ограничение вакуума вокруг атома. Но этого оказывается достаточно для того, чтобы атом перестроился и изменил время своего возбужденного состояния. Словно атому «что-то» каким-то непостижимым способом без всякого материального носителя передает информацию о том, что вакуум вокруг него теперь уже не безграничен, а имеет некоторый конечный объем.

На самом деле парадокс этот – кажущийся. Дело в том, что рождающийся из атома фотон вовсе не является точечной мгновенно возникающей частицей. Нельзя найти точку атома, из которой вылетает фотон. Он рождается как некое расширяющееся объемное образование, размер которого быстро становится больше размера своего родителя и может занять все пространство между зеркалами. Другими словами, для образования в резонаторе стоячей волны нужно некоторое время, зависящее и от длины волны фотона, и от размеров резонатора. Это время и изменяет собственное время жизни возбужденного атома.

Можно сказать, что эти эксперименты группы Ароша открыли эру манипулирования темпами внутриатомных процессов. А сами первопроходцы этой эры двинулись дальше. Оказалось, что при наличии в резонаторе хотя бы одного фотона проходящий с определенной скоростью ридберговский атом может без поглощения этого фотона чуть-чуть изменить свое состояние. Это надежно фиксируемое изменение зависит от числа фотонов в резонаторе. Таким образом, не изменяя состояния фотонов внутри резонатора, можно точно определить их число. Началось рождение квантовой электродинамики небольшого числа фотонов. А она дала зеленый свет целому ряду практичес-

ких достижений в квантовой криптографии (надежнейшей защите передаваемой информации), в улучшении конструкций мазеров для космической связи, в экспериментах по созданию квантовых компьютеров.

Американской группой руководит второй Нобелевский лауреат Дэвид Вайнленд (David Wineland), ведущий научный сотрудник Национального института стандартов и технологий США. Вайнленд и Арош родились в одном и том же 1944 году. В одинаковом 27-летнем возрасте они получили степени докторов философии, один – в Гарвардском университете в Бостоне, другой – в парижском университете Марии и Пьера Кюри. И почти одновременно они начали заниматься экспериментальной квантовой физикой. Обмениваясь результатами своих экспериментов, они быстро стали добрыми друзьями.

Но если парижская группа Ароша улавливала в ловушке фотоны и подсчитывала их с помощью атомов, то американская группа Вайнленда с самого начала пошла по противоположному пути. В ловушку помещались ионы, энергетическим состоянием которых научились управлять и, главное, научились передавать соседним ионам информацию об этом состоянии без его изменения. Поместить в ловушку ионы и держать их там было само по себе очень трудной задачей. Решить ее оказалось возможным только при очень низких температурах (несколько милликельвинов), когда сильно сказывается квантованность поступательного движения ионов в быстропеременном электрическом поле, удерживающем ионы между электродами. Ионы, кроме энергии поступательного движения, могут иметь различные энергии своих возбужденных состояний. В результате наблюдается сложная картина энергетических состояний иона. Экспериментаторы группы Вайнленда прежде всего научились управлять этими состояниями, посылая на ион строго подобранные фотоны сверхкоротких лазерных импульсов. Виртуозно манипулируя этими импульсами и давая возможность самому иону излучать фотоны, экспериментаторы научились сводить энергию поступательного движения иона к разрешенному теорией минимуму – к так называемой нулевой энергии поступательного движения в электрическом поле. Тем самым, была решена задача полной локализации отдельного иона в основном квантовом состоянии. Достижение этого результата потребовало многих лет напряженной работы.

Затем группа Вайнленда стала реализовывать необычные квантово-механические ситуации, остававшиеся до этого чисто гипотетическими. Например, с помощью аналогичных манипуляций лазерными импульсами ученые научились получать ионы в состоянии квантовой суперпозиции (сложения энергий по квантовым законам), когда ион с равной вероятностью или стоит на месте, или двигается. Эта работа стала важнейшим шагом на пути превращения физики квантовой информации из чисто теоретической в экспериментальную науку. Оказалось, что сложное энергетическое состояние квантовой суперпозиции может воспринимать другой ион, находящийся неподалеку. И тогда создается цепочка ионов, «чувствующих» друг друга на расстоянии. Тем самым, осуществляется квантовый бит (кубит) информации. В последние пять лет эти пионерские работы группы Вайн-

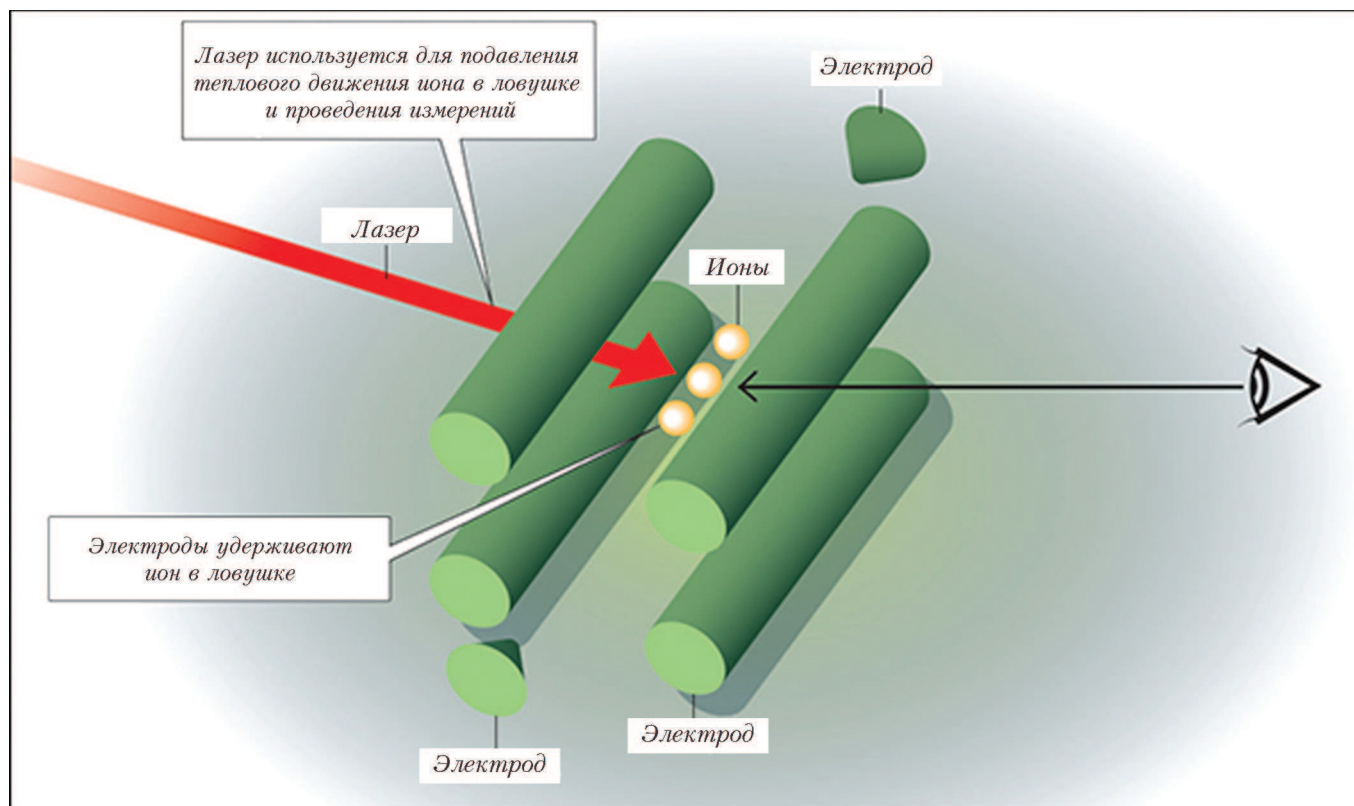


Схема установки с ловушкой ионов (эксперимент группы Вайнленда)

ленда были развиты другими исследовательскими группами. Сегодня уже «работают» цепочки из 14 ионов, реализующие многие логические операции квантового компьютера. При этом в квантовой теории остается пока открытым вопрос о конкретном виде связи этих ионов между собой. Предпочитают говорить о «запутанности» квантовых состояний в пространстве.

Но пленение и квантовый контроль отдельных ионов нашли и другое важное практическое применение. Излучение возбужденных, локализованных в электрической ловушке ионов имеет очень точную частоту, поскольку можно считать, что на ион, находящийся в состоянии строгой неподвижности, нет никаких внешних воздействий. Появился новый сверхстабильный стандарт частоты, т.е. основа сверхточных часов. До этих работ наиболее точными были цезиевые часы (международный эталон единицы времени). В резонаторе этих часов излучающие ионы цезия подвергались воздействию внешних полей, и время их жизни в возбужденном состоянии было неопределенным. В соответствии с энергетическим соотношением неопределенностей, и излучаемая энергия (частота фотонов) была неопределенной с относительной погрешностью  $10^{-14}$ . В локализованных ионах Вайнленда нет внешних воздействий, время жизни ионов в возбужденном состоянии – это их собственная характеристика, и принцип неопределенности не вносит поправок на частоту излучаемых фотонов. Сравнение частот двух таких аналогичных ионов обеспечивает стандарт частоты, в тысячи раз более точный, чем у цезиевого стандарта.

Иллюстрацией этой точности может служить то обстоятельство, что, измеряя время существования наблюдаемого мира (порядка  $10^{10}$  лет), эти «вайнлендовские»

часы ошиблись бы всего лишь на одну секунду. Но это – экзотический пример. Гораздо интереснее тот факт, что высочайшая точность этих часов уже сейчас находит применение в управлении космическими аппаратами. Дело в том, что ход времени, согласно эйнштейновской теории тяготения (чаще называемой общей теорией относительности), зависит от интенсивности поля тяготения. А она чуть-чуть меняется по мере удаления от Земли. Новые квантовые часы позволяют уловить разный ход времени на расстояниях от Земли, отличающихся всего лишь на 30 см. Есть и другое, сугубо земное, применение этих часов. Поле тяготения может изменяться и на поверхности Земли в зависимости от строения земной коры из-за ее различного состава. Этот факт используется в гравитационных геофизических методах изучения Земли и поисков полезных ископаемых.

Неожиданный выход на практические приложения работ, казалось бы, чисто теоретического значения, какими являются работы Ароша и Вайнленда, – это характерная черта современной науки. Но, прежде всего, работы новых нобелевских лауреатов сыграли ключевую роль в новейшем достижении квантовой экспериментальной физики – контроле над состояниями отдельных квантовых частиц. Эксперименты оказались дьявольски трудными и растянулись на треть века. Их успеху немало способствовало появление новых материалов и технологий, и в том числе нанотехнологии и лазерной техники. Используя эти технологии и свой замечательный талант экспериментаторов, Арош и Вайнленд достигли успеха и проложили новые пути в квантовой физике. Оба Нобелевских лауреата своими работами продвинули науку далеко вперед.



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2013» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2286» или «Ф2293». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимым набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2286, M2287, M2289, M2290, M2292 и M2293 предлагались на XXXIV Турнире городов.

Задачи Ф2295, Ф2297 и Ф2299 предлагались в Москве на муниципальном этапе XLVII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

## Задачи M2286–M2293, Ф2293–Ф2299

**M2286.** В числе не меньше 10 разрядов, в его записи используются только две разные цифры, причем одинаковые цифры не стоят рядом. На какую наибольшую степень двойки может делиться такое число?

*И. Богданов*

**M2287.** В классе 20 школьников. Для них организовано несколько экскурсий.

а) Известно, что в каждой экскурсии участвовал хотя бы один школьник. Докажите, что найдется экскурсия, каждый из участников которой посетил не менее  $1/20$  всех экскурсий.

а) Известно, что в каждой экскурсии участвовали хотя бы четверо. Докажите, что найдется экскурсия, каждый из участников которой посетил не менее  $1/17$  всех экскурсий.

*Н. Верещагин*

**M2288.** На сторонах треугольника  $ABC$  взяты точки  $A', B', C'$  так, что отрезки  $AA', BB', CC'$  пересекаются в одной точке  $P$ . Известно, что площади треугольников  $AB'P, BC'P, CA'P$  равны. Докажите, что  $P$  является точкой пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

*По мотивам Азиатско-Тихоокеанской олимпиады*

**M2289.** В некоторых клетках квадрата  $11 \times 11$  стоят плюсы, причем всего плюсов четное количество. В каждом квадратике  $2 \times 2$  тоже четное число плюсов. Докажите, что четно и число плюсов в 11 клетках главной диагонали квадрата.

*Е. Бакаев*

**M2290.** Пусть  $C(n)$  – количество различных простых делителей числа  $n$ .

а) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел  $(a, b)$ , что  $a \neq b$  и  $C(a+b) = C(a) + C(b)$ ?

б) А если при этом дополнительно требуется, чтобы  $C(a+b) > 1000$ ?

*Г. Жуков*

**M2291.** По окружности длины 1 начали движение  $n$  точечных шариков. Каждый шарик имеет скорость 1, причем  $k$  шариков движутся по часовой стрелке, а остальные  $n - k$  движутся против часовой стрелки. Если два шарика сталкиваются, то они разлетаются в противоположные стороны так, что их скорости остаются равными 1. Докажите, что найдется число  $t$  (зависящее только от  $n$  и  $k$ , но не от начального положения) такое, что через время  $t$  после начала движения каждый шарик займет свое начальное положение, и найдите наименьшее такое  $t$ .

*П. Кожевников*

**M2292.** а) Внутри окружности находится правильный  $2n$ -угольник ( $n \geq 2$ ), его центр  $A$  не обязательно совпадает с центром окружности. Лучи, выпущенные из  $A$  в вершины  $2n$ -угольника, отсекают  $2n$  точек на окружности. Затем  $2n$ -угольник повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи отсекают  $2n$  новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых  $2n$  точек.

б\*) Внутри сферы находится икосаэдр, его центр  $A$  не обязательно совпадает с центром сферы. Лучи, выпущенные из  $A$  в вершины икосаэдра, отсекают 12 точек на сфере. Икосаэдр повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи отсекают 12 новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 12 точек.

*И. Митрофанов*

**M2293.** Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число  $x$  с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое

натуральное число  $a$  и узнает у Пети сумму цифр числа  $|x - a|$ . Какое минимальное число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить  $x$ ?

*С.Сафин*

**Ф2293.** Внутри сферической колбы с внутренним диаметром  $D = 8$  см находится разреженный газ, состоящий из одинаковых молекул. Каково среднее значение расстояния от центра колбы до молекул газа (гравитацией можно пренебречь)?

*Фольклор*

**Ф2294.** К 1 апреля часовщик из деталей старых часов разных конструкций и из шестеренок разных размеров собрал механизм, в котором три стрелки – часовая, минутная и секундная – вращались «по часовой стрелке» с разными угловыми скоростями  $\omega_ч < \omega_м < \omega_с$ . При установке всех стрелок на 12:00 и запуске механизма выяснилось следующее: а) каждый раз, когда часовая стрелка проходила отметку 12:00, ее обязательно обгоняли две другие (минутная и секундная) стрелки; б) каждый раз, когда часовую стрелку обгоняла только секундная, все стрелки вытягивались вдоль одной прямой линии; в) часовая стрелка за 1 час сделала 5 оборотов. Какое минимальное число оборотов за это время могла сделать минутная стрелка и сколько раз при этом повернулась секундная стрелка?

*С.Часовщик*

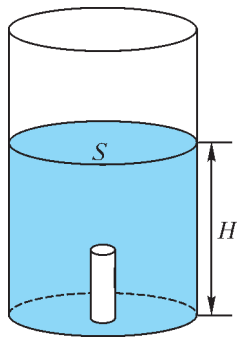
**Ф2295.** На горизонтальной шероховатой поверхности находится маленькая плоская шайба. Коэффициент трения шайбы о поверхность  $\mu = 0,5$ . Если подействовать на покоившуюся шайбу постоянной горизонтальной силой  $F = 10$  Н, то шайба будет двигаться по поверхности прямолинейно и поступательно с ускорением  $a = \mu g = 5$  м/с<sup>2</sup>. Какой минимальной по модулю силой можно заставить эту же шайбу двигаться поступательно по той же горизонтальной поверхности с ускорением, равным по модулю  $a$ ?

*А.Зильберман*

**Ф2296.** Жесткий стержень постоянного круглого сечения  $S$  и длины  $L \gg \sqrt{S}$  раскрутили относительно его средней точки вокруг оси, перпендикулярной оси симметрии стержня. При какой линейной скорости движения концов стержня при вращении он порвется? Предельное напряжение растяжения, которое выдерживает материал стержня,

$\sigma_{\max} = 10^9$  Па, плотность этого материала  $\rho = 8000$  кг/м<sup>3</sup>.

*Д.Сопроматов*



*Рис. 1*

**Ф2297.** Юный физик Глеб решил исследовать процесс таяния льда. Ко дну цилиндрического стакана он приморозил цилиндрическую сосульку и налил в стакан ледяной воды (при температуре 0 °С) так, что сосулька оказалась полностью под водой (рис.1). Площадь поверхности воды в стакане

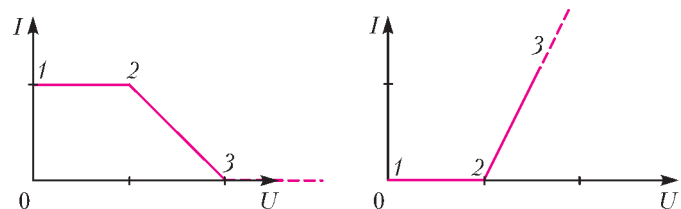
$S = 10$  см<sup>2</sup>. Глеб поставил стакан на стол в комнате и стал измерять зависимость высоты  $H$  уровня воды в стакане от времени  $t$ . Результаты измерений он аккуратно заносил в таблицу. Но вскоре экспериментатора позвали обедать, а когда он вернулся, сосулька совсем растаяла. Глеб точно знал, что в начале эксперимента содержимое стакана находилось в тепловом равновесии и имело температуру 0 °С, а температура в комнате не изменялась. Плотность льда  $\rho_л = 900$  кг/м<sup>3</sup>, удельная теплота плавления льда  $\lambda = 330$  кДж/кг, плотность воды  $\rho_в = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Сосулька за время наблюдения не всплывала. Пользуясь полученной таблицей:

$t$ , мин	0	2	15	30	39	45	55	80	105	...	150
$H$ , мм	153	153	152	151	151	150	150	148	147	...	145
сосулька есть	есть	есть	есть	есть	есть	есть	есть	есть	есть	...	нет

1) помогите Глебу установить, через какое время после начала эксперимента произошло полное таяние льда; 2) найдите мощность притока тепла из комнаты к содержимому стакану (т.е. определите, какая энергия поступает за одну секунду к содержимому стакана через его стенки).

*М.Замятнин*

**Ф2298.** Даны вольт-амперные характеристики – ВАХ – двух нелинейных элементов при  $U > 0$  (рис.2). У первого элемента на ВАХ лежат точки 1 ( $I = 1$ А,  $U = 0$ ),



*Рис. 2*

2 ( $I = 1$ А,  $U = 1$ В), 3 ( $I = 0$ ,  $U = 2$ В). У второго элемента на ВАХ лежат точки 1 ( $I = 0$ ,  $U = 0$ ), 2 ( $I = 0$ ,  $U = 1$ В), 3 ( $I = 2$ А,  $U = 2$ В), а далее график идет вдоль по прямой, содержащей отрезок 2–3. Какими будут вольт-амперные характеристики при последовательном и при параллельном соединении этих элементов?

*В.Ахов*

**Ф2299.** Мальвина рассматривает свое изображение в зеркале, плоскость которого вертикальна и находится на расстоянии  $L$  от носа Мальвины. Зеркало имеет две отражающие поверхности и укреплено на вертикальной оси, вокруг которой может вращаться. Ось вращения лежит в плоскости зеркала и также находится на расстоянии  $L$  от носа Мальвины. Буратино закрутил зеркало так, что оно приобрело начальную угловую скорость  $\omega_0$ . Вследствие наличия трения угловая скорость вращения зеркала равномерно уменьшилась до нуля за время  $\tau$ .

- 1) По какой траектории движется изображение носа Мальвины в зеркале?
- 2) С какой угловой скоростью движется изображение носа Мальвины в зеркале через время  $\tau/2$  после начала вращения зеркала?
- 3) Чему равен модуль ускорения, с которым движется

изображение носа Мальвины в момент времени  $\tau/2$  после начала вращения зеркала?

К.Барабас

### Решения задач M2269–M2275, Ф2275–Ф2282

**M2269.** Дано натуральное число  $n \geq 5$ . За ход разрешается представить его в виде суммы нескольких неединичных натуральных слагаемых и заменить на их произведение. Докажите, что из числа  $n$  можно получить факториал какого-нибудь натурального числа: а) не более чем за 4 хода; б) не более чем за 2 хода; в) при  $n > 50$  – за 1 ход.

Нужные конструкции можно придумать, исходя из следующего наблюдения: за один ход из числа  $2 + 3 + \dots + k = \frac{(k+2)(k-1)}{2}$  можно получить  $k!$ .

а) Представим  $n = 3 + (n-3)$  и заменим на  $3(n-3) \geq 6$ ; полученное число равно  $3k$  при некотором  $k \geq 2$ . Теперь, представив его в виде  $(k+1) + (2k-1)$ , можно за ход получить число  $(k+1)(2k-1) = k(2k+1) - 1 = 2 + 3 + \dots + 2k$ . Из этого же за ход получается число  $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2k = (2k)!$ . Мы использовали три хода.

б) Если  $n$  делится на три, то в алгоритме из пункта а) первых ход был не нужен, и нам достаточно двух ходов. Значит, осталось разобрать случай, когда  $n$  не делится на 3.

Пусть  $n = 3k + 1$  (где  $k \geq 2$ ). Тогда  $n = k + (2k+1)$ , и за ход из него можно получить число  $k(2k+1) = (1+2+3) + 4 + \dots + 2k = 6 + 4 + \dots + 2k$ . Тогда за второй ход заменяем  $k(2k+1)$  на числа  $6 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k = (2k)!$ .

Аналогично, из числа вида  $n = 3k - 1$  (где  $k \geq 2$ ) за ход можно получить число  $k(2k-1)$ . При  $k = 2$  мы уже получили число  $6 = 3!$ . Если же  $k > 2$ , то

$$k(2k-1) = (1+2+3) + 4 + \dots + (2k-1) = 6 + 4 + \dots + (2k-1),$$

и это число за один ход можно превратить в факториал  $6 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k-1) = (2k-1)!$ .

в) Пусть  $k$  – максимальное натуральное число такое, что  $n \geq 2 + 3 + \dots + k = \frac{(k-1)(k+2)}{2}$ . Далее, по нашему выбору число  $s = n - \frac{(k-1)(k+2)}{2}$  не превосходит  $k$ .

Если  $s = 0$ , то, как мы уже видели,  $n$  можно за ход заменить на  $k!$ .

Предположим, что  $1 \leq s \leq k-2$ . Тогда в сумме  $2 + 3 + \dots + k$  можно заменить числа 2 и  $s+2$  на  $2(s+2)$ ; при этом сумма увеличится на  $2(s+2) - 2 - (s+2) = s$ ,

т.е. станет равной  $\frac{(k-1)(k+2)}{2} + s = n$ . Произведение же этих чисел по-прежнему будет равно  $k!$ . Значит,  $n$  можно разбить на несколько слагаемых, сумма которых равна  $k!$ .

Осталось разобрать случай, когда  $k-1 \leq s \leq k$ . Сделаем в сумме  $2 + 3 + \dots + k$  две замены: числа 3 и 4 заменим

на 12, а числа 2 и  $s-3$  заменим на  $2(s-3)$  (последнее действие можно сделать, так как  $k \geq 9$  (ибо  $n \geq 44$ ), значит  $s-3 \geq k-4 \geq 5$ ). От этого сумма увеличится на  $(12-3-4) + (2(s-3) - 2 - (s-3)) = s$ , т.е. станет равной  $n$ . Значит, эту сумму можно заменить на произведение слагаемых, т.е. на  $k!$ .

*Замечание.* На самом деле имеется лишь 5 значений  $n \geq 5$  ( $n = 7, 8, 12, 13, 18$ ), для которых факториал невозможно получить за 1 ход.<sup>1</sup>

Рассуждения пункта в) можно дополнить следующим разбором нескольких случаев, чтобы доказать, что при  $n \geq 19$  получить факториал возможно за 1 ход.

Если  $k = 8$ , то остались неразобранными случаи  $s = 7$  или  $s = 8$ , т.е.  $n = 42$  и  $n = 43$ ; в этих случаях можно представить  $42 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + (2+4) + 9$  и  $43 = 2 + 3 + 4 + 5 + (2+3) + 7 + 8 + 9$ , чтобы получить  $9!$ .

Если  $k = 7$ , то  $n = 33$  или  $n = 34$ ; в этом случае можно представить  $33 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + (2+4)$  и  $34 = 2 + 3 + 4 + 5 + (2+3) + 7 + 8$ , чтобы получить  $8!$ .

Если  $k = 6$ , то  $n = 26$  или  $n = 25$ ; в этом случае можно представить  $26 = 20 + 6$  и  $25 = 20 + 2 + 3$ , чтобы получить  $5!$ .

Наконец, если  $k = 5$ , то  $n = 19$ ; в этом случае можно представить  $19 = 5 + 4 + 4 + 3 + 3$ , чтобы получить  $6!$ .

И.Богданов

**M2270.** В клетках таблицы  $n \times n$  стоят знаки «+» и «-». За ход разрешается в любой строке или в любом столбце изменить все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно за сколько-то ходов сделать все знаки в таблице плюсами. Докажите, что этого можно добиться, сделав не более  $n$  ходов.

Заметим, что неважно, в каком порядке менять знаки, важно только, в каких рядах и сколько раз. Если в ряду поменять знаки дважды, то ничего не изменится. Поэтому достаточно менять знак не более раза в каждом ряду. Пусть удалось получить все плюсы, сменив знаки в  $k$  вертикалях и  $m$  горизонталях. Если  $k + m > n$ , отметим ряды, где мы меняли знаки. Знак сменился только в клетках, принадлежащих ровно одному отмеченному ряду. Но эти же клетки принадлежат ровно одному неотмеченному ряду. Поэтому результат был бы такой же, если бы мы сменили знаки в неотмеченных рядах. А их число равно  $(n-k) + (n-m) = 2n - (k+m) < n$  – как раз то, что надо.

Л.Медников, А.Семенов, А.Шаповалов

**M2271. а)** На плоскости отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Саша разбивает точки на пары и соединяет точки в каждой паре отрезком. Всегда ли он может сделать это так, чтобы каждые два отрезка пересекались?

**б)** Внутри круга отмечены 100 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что их можно разбить на пары и провести прямую через

<sup>1</sup> Предлагаем читателям показать, что из этих чисел действительно нельзя за один ход получить факториал.

каждую пару так, чтобы все точки пересечения прямых лежали в круге.

а) **Ответ:** не всегда.

Приведем один (из многих возможных) контрпример.

Рассмотрим квадрат  $ABCD$ . Отметим точку  $C$  и 99 точек на дуге  $BD$  окружности с центром  $A$  (рис.1).  $C$

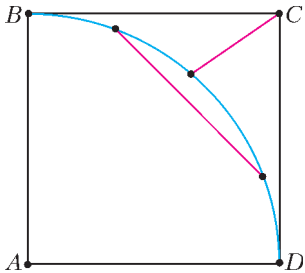


Рис. 1

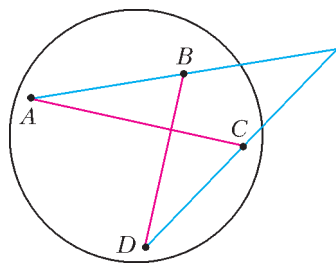


Рис. 2

какой бы отмеченной точкой мы ни соединили точку  $C$ , полученный отрезок не будет пересекать ни одну из хорд, соединяющих остальные 98 точек.

б) Разобьем точки на пары так, чтобы сумма длин отрезков, соединяющих эти пары, была максимальной. Допустим, для пар точек  $(A, B)$  и  $(C, D)$  прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются вне круга (рис.2). Тогда четырехугольник  $ABCD$  – выпуклый,  $AC + BD > AB + CD$ , т.е., разбив на пары по-другому, мы получили бы большую сумму длин отрезков.

А.Шаповалов

**M2272.** Дан треугольник  $ABC$  и прямая  $l$ . Обозначим через  $l_a, l_b, l_c$  прямые, симметричные  $l$  относительно сторон треугольника, а через  $I_1$  – центр окружности, вписанной в треугольник, образованный прямыми  $l_a, l_b, l_c$ . Найдите геометрическое место точек  $I_1$ .

Прямая  $l$  пересекает прямые  $AB, AC, BC$  в точках  $K, M, N$  соответственно (рис.1). Пусть прямые  $l_a$  и  $l_b$  пересекаются в точке  $C_1$ , прямые  $l_b$  и  $l_c$  – в точке  $A_1$ , прямые  $l_a$  и  $l_c$  – в точке  $B_1$ . Тогда  $AM, AK$  – биссектрисы углов треугольника  $MA_1K$  (они могут являться биссектрисами как внешних, так и внутренних углов треугольника, в зависимости от выбора

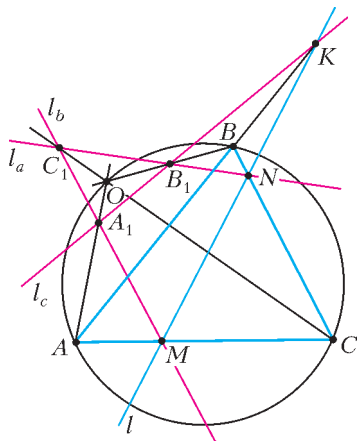


Рис. 1

прямой  $l$ ). Следовательно, биссектриса угла при вершине  $A_1$  (внешнего или внутреннего, в зависимости от выбора прямой  $l$ ) проходит тоже через точку  $A$ . Эта биссектриса в свою очередь является биссектрисой внутреннего угла при вершине  $A_1$  в  $\Delta A_1B_1C_1$ . Из аналогичных рассуждений для вершин  $B_1, C_1$  следует, что

биссектрисы внутренних углов при вершинах  $B_1, C_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$  проходят через точки  $B, C$  соответственно. Пусть  $O$  – точка пересечения этих биссектрис. Заметим, что справедливы такие равенства:

$$\angle ABC = \angle BNK + \angle BKN = 90^\circ - \angle BB_1K =$$

$$= 90^\circ - \angle OB_1C_1 = \angle OA_1C_1 + \angle OC_1A_1 = \angle AOC.$$

С другой стороны, углы  $ABC, AOC$  опираются на одну и ту же дугу  $AC$  окружности, описанной около  $\Delta ABC$ . Так как  $\angle ABC$  – вписанный, то и  $\angle AOC$  – вписанный. Таким образом, точка  $O$  принадлежит окружности, описанной около  $\Delta ABC$ . Докажем теперь, что любая точка, лежащая на окружности, описанной около  $\Delta ABC$ , является центром вписанной окружности в треугольник  $A_1B_1C_1$ , построенный указанным выше способом для некоторой прямой  $l$ . Пусть  $l$  – произвольная прямая, проходящая через точку  $B$ ,  $\Delta A_1B_1C_1$  – соответствующий этой прямой треугольник, образованный прямыми  $l_a, l_b, l_c$  (рис.2). Очевидно, точки  $B$  и  $B_1$  совпадают. Снова обозначим через  $O$  центр вписанной в  $\Delta A_1B_1C_1$

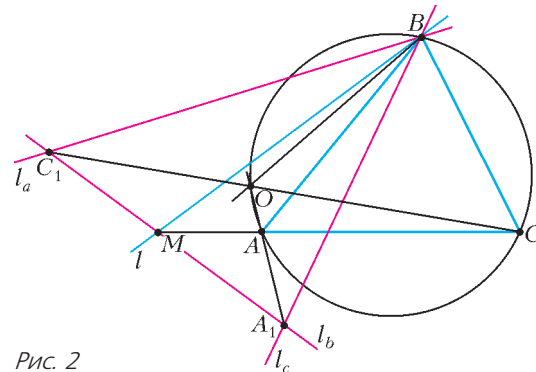


Рис. 2

окружности. Пусть  $\tilde{l}$  – другая прямая, проходящая через точку  $B$ , причем угол между прямыми  $l, \tilde{l}$  равен  $\varphi$ . Пусть, кроме того,  $\Delta \tilde{A}_1\tilde{B}_1\tilde{C}_1$  – соответствующий этой прямой треугольник, образованный прямыми  $\tilde{l}_a, \tilde{l}_b, \tilde{l}_c$ , а  $\tilde{O}$  – центр вписанной в  $\Delta \tilde{A}_1\tilde{B}_1\tilde{C}_1$  окружности. Докажем, что  $\angle OB\tilde{O} = \varphi$ . Действительно,  $\angle AB\tilde{A}_1 = \varphi, \angle CB\tilde{C}_1 = \varphi$ . Кроме того, как мы уже доказали,  $BO$  – биссектриса угла  $A_1BC_1, B\tilde{O}$  – биссектриса угла  $\tilde{A}_1B\tilde{C}_1$ . Следовательно, угол между этими биссектрисами также равен  $\varphi$ . Таким образом, поворачивая прямую  $l$  вокруг точки  $B$  на угол  $\varphi$  от 0 до  $360^\circ$ , мы повернем также и прямую  $BO$  на тот же самый угол. Иными словами, мы сможем получить всевозможные положения точки  $O$  на окружности, описанной около  $\Delta ABC$ .

А.Заславский

**M2273.** В ряд стоят 100 коробок. В самой левой лежат 100 спичек, остальные коробки пусты. За ход разрешается выбрать любые две соседние коробки и переложить одну спичку из левой коробки в правую, если после перекладывания в левой коробке будет не меньше спичек, чем в правой. Ходы делаются до тех пор, пока возможно. Докажите, что конечный результат не зависит от последовательности ходов.

Занумеруем коробки слева направо. Ход, состоящий в перекладывании спички из коробки  $d$  в коробку  $d + 1$ , будем обозначать  $\tilde{d}$ .

Предположим, что есть две разные последовательности ходов  $A = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_k)$  и  $B = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_l)$  (здесь  $a_i, b_j$  – номера некоторых коробок), приводящие к разным конечным ситуациям. Найдем первое различие в этих последовательностях: пусть  $a_t \neq b_t$ , в то время как  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{t-1} = b_{t-1}$ . Положим  $a_t = a, b_t = b$ .

**Утверждение 1.** *Ход  $b$  обязательно встретится в последовательности  $A$ , причем после  $t$ -го хода.*

Рассмотрим ситуацию после ходов  $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_{t-1}$ . Так как в этот момент возможно сделать ход  $\tilde{b}$  (см. последовательность  $B$ ), то до этого хода в коробке номер  $b$  хотя бы на 2 спички больше, чем в коробке номер  $b + 1$ . Любые другие ходы, кроме  $\tilde{b}$ , не уменьшают число спичек в коробке  $b$  и не увеличивают число спичек в коробке  $b + 1$  – значит, процесс не закончится, если ход  $\tilde{b}$  в дальнейшем вовсе не будет сделан. Утверждение доказано.

Итак, согласно утверждению 1, найдется номер  $m$  такой что  $m > t$  и  $a_m = b$ . Среди всех таких  $m$  выберем наименьшее (так что  $a_t, a_{t+1}, \dots, a_{m-1}$  не равны  $b$ ).

**Утверждение 2.** *В последовательности ходов  $A$  ходы  $\tilde{a}_t, \tilde{a}_{t+1}, \dots, \tilde{a}_m$  можно сделать в другом порядке:  $\tilde{a}_m, \tilde{a}_t, \tilde{a}_{t+1}, \dots, \tilde{a}_{m-1}$  (при этом конечная ситуация не изменится).*

Действительно, после выполнения ходов  $a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, a_m$  ходы  $a_t, a_{t+1}, \dots, a_{m-1}$  тоже можно будет сделать, так как каждый из этих ходов либо не затрагивает коробки  $b, b + 1$ , либо осуществляет перекладывание в коробку  $b$  (и это будет возможно, так как в коробке  $b$  после хода  $a_m$  спичек стало на 1 меньше), либо осуществляет перекладывание из коробки  $b + 1$  (и это будет возможно, так как в коробке  $b + 1$  стало на 1 спичку больше). Утверждение 2 доказано.

Утверждение 2 позволяет заменить последовательность  $A$  на последовательность  $A'$  с той же конечной ситуацией. Но номер первого различающего хода у последовательностей  $A'$  и  $B$  будет больше, чем у последовательностей  $A$  и  $B$  (либо уже  $A' = B$ ). Повторяя описанную процедуру, заменяем  $A'$  на  $A''$  (не меняя конечной ситуации) и т.д., и в конце концов получим последовательность  $B$ . Значит, вопреки нашему предположению, последовательности ходов  $A$  и  $B$  приводят к одной и той же конечной ситуации.

А.Шень

**M2274.** а) В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь  $n$ -го прямоугольника равна  $n^2$ . Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

б\*) Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа  $N$  найдутся квадраты суммарной площади больше  $N$ ?

**Ответ:** а) не обязательно; б) обязательно.

а) Построим пример, когда нельзя покрыть даже круг радиуса 1. Сделаем ширину  $n$ -го прямоугольника равной  $2^{-n}$ . Его пересечение с единичным кругом лежит в

прямоугольнике  $2 \times 2^{-n}$ , значит, он покрывает площадь, меньшую  $2^{-n+1}$ . В совокупности прямоугольники покрывают площадь, меньшую 2, что меньше площади круга.

б) Если среди квадратов есть бесконечное количество со стороной больше некоторого числа  $a$ , то утверждение очевидно. Поэтому далее мы считаем, что для каждого  $N$  таких квадратов – конечное число. Это, в частности, означает, что квадраты можно упорядочить по убыванию площади. Разобьем плоскость на единичные клетки и занумеруем их по спирали. Заметим, что достаточно покрыть конечным числом данных квадратов одну клетку. Действительно, после этого у нас снова останется бесконечное число квадратов с бесконечной суммарной площадью. Ими можно покрыть следующую клетку и т.д.

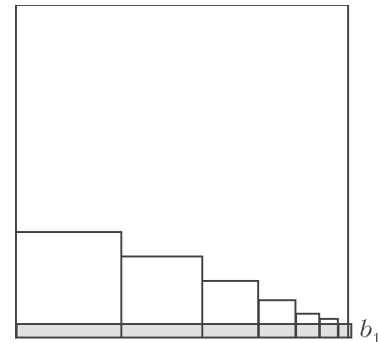
Приведем возможный способ покрытия единичной клетки.

Если есть квадрат со стороной не меньше 1, просто накроем им

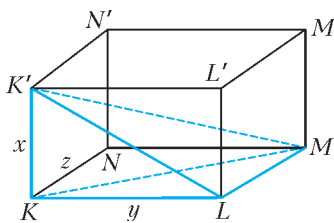
клетку. В противном случае будем располагать квадраты в клетке рядами, как показано на рисунке. Ставим квадраты на основание клетки, следующий вплотную к предыдущему. Пусть сумма площадей квадратов превзошла 1. Поскольку площадь численно меньше стороны квадрата, то и сумма сторон будет больше 1, поэтому в какой-то момент все основание клетки будет покрыто, и очередной квадрат со стороной  $b_1$  вылезет, хотя бы частично, за правую сторону клетки. Отрежем полосу высоты  $b_1$ . Часть клетки вне полосы будем считать полностью не покрытой, и начнем ставить следующий ряд квадратов на верхнюю границу полосы, начиная с ее левого конца. Пусть следующая полоса заканчивается квадратом со стороной  $b_2$  и т.д. Докажем, что сумма высот полос  $b_1 + b_2 + \dots$  рано или поздно превзойдет 1. Ширина каждой полосы не превосходит 2. Высота всех квадратов из  $(i + 1)$ -й полосы не больше  $b_i$ , поэтому сумма их площадей не превышает  $2b_i$ . Выкладываем полосы, пока сумма площадей квадратов во всех законченных полосах, кроме первой, не превзойдет 2. В этот момент  $2b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_n \geq 2$ , откуда  $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq 1$ . Это означает, что полосы покрыли клетку целиком. Переходим к следующей клетке и т.д.

Л.Медников, А.Семенов, А.Шаповалов

**M2275\*.** Назовем тетраэдр интересным, если все его грани являются прямоугольными треугольниками, а длины всех шести ребер равны натуральным числам. Интересные тетраэдры существуют, таковым является, например, тетраэдр  $ABCD$ , в котором  $AB = 153, BC = 104, CD = 672, AC = 185, BD = 680, AD = 697$ . Докажите, что существует бесконечно много интересных тетраэдров, никакие два из которых не подобны.



Будем искать интересные тетраэдры среди тетраэдров, «вписанных» в прямоугольные параллелепипеды. Пусть



$KL MNK'L'M'N'$  – прямоугольный параллелепипед с ребрами  $KK' = x$ ,  $KL = y$ ,  $KN = z$ . Тогда в тетраэдре  $K'KLM$  все грани – прямоугольные треугольники,  $K'L^2 = x^2 + y^2$ ,  $KM^2 = y^2 + z^2$ ,

$K'M^2 = x^2 + y^2 + z^2$  (см. рисунок).

Для решения задачи достаточно построить бесконечную последовательность различных троек чисел  $(x, y, z)$  таких, что  $\text{НОД}(x, y, z) = 1$ , а числа  $x^2 + y^2$ ,  $y^2 + z^2$  и  $x^2 + y^2 + z^2$  – точные квадраты. Такие тройки назовем *удачными*. Мы будем строить удачные тройки  $(x, y, z)$  с дополнительным условием:  $x$  нечетно, а  $y$  и  $z$  четные.

Пример тетраэдра, указанного в условии задачи, дает одну из удачных троек:  $(x, y, z) = (153, 104, 672)$ . Исходя из удачной тройки  $(x, y, z)$ , можно получить новую удачную тройку  $(X, Y, Z)$  по формулам

$$X = |x^2 - z^2|, \quad Y = 2xz, \quad Z = 2dy, \quad (*)$$

где  $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= (x^2 + z^2)^2, \\ Y^2 + Z^2 &= 4(x^2z^2 + d^2y^2) = \\ &= 4(x^2z^2 + x^2y^2 + y^4 + y^2z^2) = 4(x^2 + y^2)(y^2 + z^2), \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= (x^2 + z^2)^2 + 4d^2y^2 = \\ &= (d^2 - y^2)^2 + 4d^2y^2 = (d^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

Кроме того,  $X$  нечетно, а  $Y$  и  $Z$  четны.

Остается показать, что  $\text{НОД}(X, Y, Z) = 1$ . Пусть это не так, и некоторое простое число  $p > 2$  является делителем чисел  $X, Y, Z$ . Так как  $Y = 2xz$  кратно  $p$ , то хотя бы одно из чисел  $x, z$  кратно  $p$ . Далее, так как  $X = |x^2 - z^2|$  кратно  $p$ , то оба числа  $x, z$  кратны  $p$ . Тогда  $y$  и  $d$  не делятся на  $p$  (иначе  $\text{НОД}(x, y, z)$  был бы кратен  $p$ ), значит,  $Z = 2dy$  не делится на  $p$  – противоречие.

Таким образом, получая из текущей удачной тройки  $(x, y, z)$  новую тройку  $(X, Y, Z)$ , строим бесконечную цепочку удачных троек. Так как  $D = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = d^2 + y^2 > d$ , в полученной цепочке троек не будет повторений.

*Замечания.* При помощи компьютера автором найдено большое количество удачных троек, не входящих в цепочку, построенную в решении задачи. Имеются удачные тройки  $(x, y, z)$ , в которых  $y$  нечетно, а  $x$  и  $z$  четны (автору неизвестно, является ли множество таких удачных троек бесконечным). Из такой удачной тройки по формулам (\*) получается тройка  $(X, Y, Z) = (2X', 2Y', 2Z')$ , где  $(X', Y', Z')$  – удачная тройка, в которой  $Z'$  – нечетное, а  $X'$  и  $Y'$  – четные.

Конечно, было бы интересно получить полное описание удачных троек, а вместе с ними – и всех интересных тетраэдров.

Интересные тетраэдры можно было бы назвать *пифагоровыми*, так как их грани – пифагоровы треугольники. Однако название «пифагоров тетраэдр» используется для тетраэдров с целыми (или рациональными) длинами ребер, у которых все три плоских угла при одной из вершин прямые. Пифагоровы тетраэдры, так же, как и интересные, вписаны в прямоугольный параллелепипед с целыми длинами всех ребер и всех диагоналей граней. (Такой параллелепипед называют Эйлеровым кирпичом.) Описание пифагоровых тетраэдров сводится к описанию троек натуральных чисел  $(x, y, z)$  таких, что  $x^2 + y^2$ ,  $y^2 + z^2$  и  $z^2 + x^2$  являются точными квадратами. Этой задаче посвящена статья В.Г.Болтянского в «Кванте» № 8 за 1986 год. В той же статье говорится о следующем открытом вопросе: существуют ли прямоугольные параллелепипеды, у которых длины всех ребер, диагоналей граней и большой его диагонали равны целым числам? (Такие параллелепипеды называют совершенными.) Иначе говоря, существуют ли тройки  $(x, y, z)$  натуральных чисел, для которых все числа  $x^2 + y^2$ ,  $y^2 + z^2$ ,  $z^2 + x^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2$  являются точными квадратами?

*Р.Сарбаи*

**Ф2275.** *Спутник массой 3 т летает на высоте 300 км над поверхностью Земли по почти круговой орбите. Сила сопротивления, действующая на спутник, равна 0,01 Н. На сколько уменьшится высота полета спутника за 1 месяц полета?*

Горизонтальная составляющая  $v$  скорости полета спутника массой  $m$  ( $m = 3 \cdot 10^3$  кг) на высоте  $H$  ( $H = 300 \cdot 10^3$  м) находится из (приблизительно верного) условия

$$\frac{mv^2}{R_3 + H} = \frac{GM_3m}{(R_3 + H)^2}, \quad \text{откуда } v = \sqrt{\frac{GM_3}{R_3 + H}} \approx 8 \text{ км/с}.$$

При этом предполагается, что вертикальная составляющая скорости спутника значительно меньше горизонтальной составляющей. Суммарная энергия спутника, движущегося по (почти) круговой орбите радиусом  $R_3 + H$ , равна

$$W = W_{\text{п}} + W_{\text{к}} = -\frac{GM_3m}{R_3 + H} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{GM_3m}{2(R_3 + H)}.$$

Работа силы трения (отрицательная) уменьшает эту энергию. За время  $T$  ( $T = 30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$  с) спутник пролетит расстояние (примерно равное)  $Tv$ , и работа силы сопротивления  $F$  ( $F = 0,01$  Н) будет равна  $-TvF$ . В соответствии с законом сохранения энергии, изменение энергии спутника равно работе внешних сил, т.е.

$$\left( -\frac{GM_3m}{2(R_3 + H + \Delta H)} \right) - \left( -\frac{GM_3m}{2(R_3 + H)} \right) = -TvF.$$

Отсюда получаем

$$\Delta H \approx -\frac{2TFv(R_3 + H)^2}{GM_3m} \approx -\frac{2TFv}{mg} \approx -13,8 \text{ км}.$$

Таким образом, высота полета уменьшится примерно на 13,8 км.

Оценим вертикальную составляющую скорости спутника:  $\Delta H/T = 5,3 \cdot 10^{-3}$  м/с. Это подтверждает наше предположение о ее малости в сравнении с горизонтальной составляющей.

Ю.Спутников

**Ф2276.** Три невесомых стержня скреплены шарнирно друг с другом и образуют треугольник, находящийся в вертикальной плоскости. Один из стержней лежит на гладком горизонтальном полу, а два других стержня образуют с горизонтом углы  $\alpha$  и  $\beta$ . К верхнему углу треугольника на вертикальной нити подвесили груз массой  $m$ . Система находится в равновесии, хотя и в неустойчивом. С какой силой растянут горизонтальный стержень?

Обозначим силы, с которыми сжаты негоризонтальные стержни, через  $F_\alpha$  и  $F_\beta$ , а силу, с которой растянут горизонтальный стержень, – через  $F$ . Суммы горизонтальных проекций сил, действующих на нижние шарниры, равны нулю, и выполняются соотношения

$$F_\alpha \cos \alpha = F_\beta \cos \beta = F.$$

Сумма вертикальных составляющих сил, действующих на верхний шарнир, тоже равна нулю, поэтому справедливо равенство

$$F_\alpha \sin \alpha + F_\beta \sin \beta = mg.$$

Отсюда получаем

$$F = \frac{mg}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

С.Татилов

**Ф2277.** В состав рычажных весов входят штатив, коромысло, опирающееся на штатив через призму из твердого сплава, и две подвешенные на коромысле чашки. Легкие рычаги, удерживающие чашки на коромысле, тоже опираются на коромысло твердосплавными призмами. Расстояния от оси вращения призмы коромысла до мест опоры на коромысло чашечных призм одинаковы. Оси вращения призмы коромысла и опорных углов чашечных призм лежат в одной плоскости. Период малых колебаний коромысла без чашек равен  $T_0$ . Суммарная масса чашек равна  $m_1$ . Когда на чашках весов ничего нет, период малых колебаний весов вблизи положения равновесия равен  $T_1$ . Каким будет период колебаний весов  $T_2$ , если на обе чашки положить одинаковые грузы массой  $m_2$  каждый?

Введем такие обозначения: расстояние от мест опоры рычагов на коромысло до оси вращения коромысла обозначим через  $L$ ; момент инерции коромысла относительно оси, проходящей через рабочее ребро призмы коромысла, – через  $I$ ; расстояние от центра масс коромысла до этой же оси, – через  $R$ . Если рычажные весы настроены на высокую чувствительность к разнице грузов на чашках, то это означает, что период малых колебаний весов гораздо больше периодов колебаний чашек при закрепленном коромысле. Поэтому можно считать, что чашки с грузами при малых колебаниях

весов движутся поступательно, а траектория каждой точки чашки и каждой точки любого груза представляет собой часть окружности радиусом  $L$ . Тогда из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{(\alpha')^2 (I + m_x L^2)}{2} + mgR(1 - \cos \alpha) = \text{const},$$

где  $\alpha$  – угол поворота коромысла,  $m_x$  – суммарная масса чашек и грузов,  $m$  – масса коромысла. Отсюда следует уравнение малых колебаний нашей системы:

$$\alpha'' (I + m_x L^2) + mgR\alpha = 0.$$

Периоды малых колебаний одного коромысла и коромысла с пустыми чашками (данные в условии) равны соответственно

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgR}} \quad \text{и} \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I + m_1 L^2}{mgR}}.$$

Отсюда находим

$$I = \frac{m_1 L^2}{\left(\frac{T_1^2}{T_0^2} - 1\right)}.$$

Аналогично, для периода малых колебаний весов с грузами получаем

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I + (m_1 + 2m_2)L^2}{mgR}},$$

или окончательно

$$T_2 = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{T_1^2}{T_0^2} - 1\right) \left(1 + \frac{2m_2}{m_1}\right)}.$$

В.Сергеев

**Ф2278.** Внук, играя с дедушкиными очками, получает четкие (резкие) изображения солнца на экране и на тонкой полоске белой бумаги. Линзы очков располагаются между солнцем и экраном, а полоска бумаги находится между солнцем и линзами. Расстояние от линзы до резкого изображения солнца на экране равно 20 см. На белой полоске бумаги резкие изображения получаются при двух расстояниях между полоской и линзами, а именно: при 2 см и при 55 см. Каков коэффициент преломления стекла, из которого сделаны линзы? Считайте, что поверхности раздела стекло–воздух для линз сферические. Каковы радиусы кривизны этих поверхностей?

Если существует изображение солнца за линзой, значит, дедушкины очки положительные, т.е. линзы очков собирающие и их оптическая сила равна 5 дптр. Наличие двух ярких изображений солнца на белой полоске означает, что обе поверхности раздела стекло–воздух со стороны солнца вогнутые. Большему расстоянию до изображения соответствует отражение от первой вогнутой поверхности, значит, ее радиус кривизны равен

$$R_1 = 2 \cdot 55 \text{ см} = 1,1 \text{ м}.$$

Обозначим второй радиус кривизны через  $R_2$ , а коэффициент преломления стекла – через  $n$ . Поскольку оптическая сила линзы известна и второе изображение перед линзой соответствует свету, который дважды

прошел через линзу и один раз отразился от вогнутого зеркала с радиусом кривизны  $R_2$ , то для нахождения величины  $R_2$  воспользуемся соотношением

$$\frac{1}{0,02} = 2 \cdot 5 + \frac{2}{R_2},$$

откуда находим

$$R_2 = 5 \text{ см.}$$

Считая линзу тонкой, запишем выражение для ее оптической силы через радиусы кривизны и коэффициент преломления:

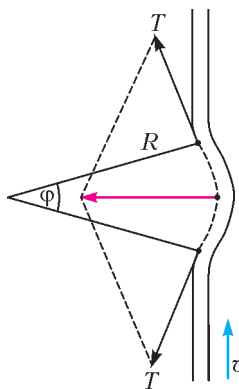
$$D = (n-1) \left( -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \text{ или } 5 = (n-1) \left( -\frac{1}{1,1} + \frac{1}{0,05} \right).$$

Отсюда находим коэффициент преломления стекла:

$$n = 1,26.$$

А. Дедушкин

**Ф2279.** К потолку подвешена тонкая гибкая, но нерастяжимая цепочка с равномерным распределением массы  $M$  по длине  $L$ . В положении равновесия цепочка вертикальна. По ее нижнему концу слегка щелкают в горизонтальном направлении, и волна возмущения распространяется вверх к потолку, а после отражения от потолка – вниз к свободному концу. Сколько времени длится это путешествие волны (вверх – вниз)?



Известно, что скорость  $v$  распространения поперечной волны небольшой амплитуды по шнуру или цепочке с натяжением  $T$  и линейной плотностью  $\rho$  связана с этими параметрами так:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Это легко показать, если рассмотреть движение волны в системе отсчета, которая движется вдоль цепочки с той же скоростью, что и сама волна. Рассмотрим участок, который представляет собой дугу с малым углом  $\varphi$  окружности радиусом  $R$  (см. рисунок). Из второго закона Ньютона следует такая связь:

$$m \frac{v^2}{R} = 2T \frac{\varphi}{2}, \text{ или } \rho R \varphi \frac{v^2}{R} = T \varphi,$$

откуда получаем

$$v^2 = \frac{T}{\rho}, \text{ или } v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Натяжение  $T$  цепочки в некотором месте пропорционально расстоянию этого места от нижнего ее конца. Обозначим это расстояние через  $x$ , тогда

$$T = \frac{Mgx}{L}.$$

Следовательно, уравнение движения будет таким:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{Mgx/L}{M/L}} = \sqrt{gx}.$$

Если разделить переменные, то будет  $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{g} dt$ .

Суммирование (интегрирование) промежутков времени при пробеге волны от нижней точки ( $x = 0$ ) до верхней ( $x = L$ ) и обратно дает ответ:

$$t = 4 \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Ц. Почкин

**Ф2280.** При сгорании 1 кг бензина выделяется количество теплоты  $4 \cdot 10^7$  Дж. Плотность бензина 0,8 кг/л. Автомобиль «Жигули» массой 900 кг при езде по прямой дороге на крейсерской скорости 90 км/ч расходует 7 л на каждые 100 км в безветренную погоду. КПД двигателя автомобиля 30%. При движении с постоянной скоростью мощность нужна для того, чтобы преодолеть трение о воздух. На сколько больше бензина будет тратить автомобиль, если он будет ехать с той же скоростью в горку с подъемом 1 м на каждые 100 м пути при встречном ветре со скоростью 10 м/с?

За один час автомобиль поднимется в поле тяжести на высоту 900 м, при этом его потенциальная энергия увеличится на  $\Delta U = 8,1$  МДж. На это потребуется дополнительно сжечь

$$V = \frac{\Delta U m}{Q_p} = \frac{8,1 \text{ МДж} \cdot 1 \text{ кг}}{40 \text{ МДж} \cdot 0,8 \text{ кг/л}} \approx 0,25 \text{ л}$$

бензина. При той же скорости автомобиля относительно дороги его скорость относительно воздуха стала больше на 10 м/с = 36 км/ч. В относительном выражении сила сопротивления воздуха выросла в  $((90 + 36)/90)^2 = 1,96$  раза, т.е. потери на трение стали почти в 2 раза больше. И поэтому потребуется еще сжечь  $0,96 \cdot 7 \text{ л} = 6,72 \text{ л}$  бензина.

Итого, нужно потратить

$$(7 + 0,25 + 6,72) \text{ л} = 13,97 \text{ л} \approx 14 \text{ л бензина.}$$

Конечно, ситуация, при которой 90 км прямой дороги имеют совершенно одинаковый наклон к горизонту и в течение одного часа ветер не меняет направления, встречается редко. Но это все-таки задача по физике, а не по географии.

Ж. Игульский

**Ф2281.** Шприц без иглы наполовину заполнен водой, пузырьков воздуха внутри нет, а выходное отверстие закрыто, например, пальцем (см. рисунок). С какими силами нужно тянуть в разные стороны шприц за корпус и поршень за ручку, чтобы вода внутри закипела, если ее начальная температура  $24^\circ\text{C}$ ? Трением поршня о стенки можно пренебречь. Давление воздуха  $p_0 = 100$  кПа. Недостающие данные отыщите самостоятельно.

Рядом со шприцем на фотографии показана линейка с миллиметровыми делениями. Диаметр поршня в таком шприце равен  $D = 20$  мм. Из справочника узнаем, что давление насыщенного пара воды при  $24^\circ\text{C}$  равно примерно  $p_{\text{нас}} = 3$  кПа. Тогда необходимая величина



сил равна

$$F = (p_0 - p_{\text{нас}}) \frac{\pi D^2}{4} \approx 30,5 \text{ Н.}$$

С.Варламов

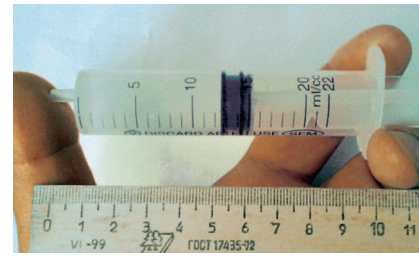
**Ф2282.** На горизонтальный стол, покрытый сукном, поставили игральный кубик массой 3,5 г и длиной ребра 18,5 мм. Маленький узелок на ткани, находящийся возле середины ребра кубика, не дает кубику скользить в направлении, перпендикулярном этому ребру. Оцените минимальную скорость ветра, дующего над столом и обдувающего кубик, при которой он опрокинется через узелок и покатится по столу.

Под кубиком между ворсинками сукна воздух движется с весьма малой скоростью в сравнении со скоростью ветра и, соответственно, со скоростью над верхней гранью кубика. И перед кубиком практически остановившийся воздух тоже имеет малую скорость. А вот за кубиком воздух движется быстро и турбулентно. В результате условия для опрокидывания кубика создают два главных фактора. Первый фактор – это так называемое лобовое сопротивление, или сопротивление среды, пропорциональное динамическому давлению среды  $\rho v^2/2$  и площади поперечного сечения движущегося в среде предмета – для кубика это  $a^2$ :

$$F = k \frac{\rho v^2}{2} a^2 = k \frac{\rho (va)^2}{2}.$$

Форма кубика не обтекаемая, поэтому численный коэффициент  $k$  в выражении для силы сопротивления равен примерно единице. Второй фактор – это так называемая подъемная сила, появляющаяся потому, что над верхней поверхностью кубика воздух движется быстро, практически со скоростью ветра, а под нижней поверхностью воздух не движется вовсе. В результате, в соответствии с законом Бернулли, статическое давле-

ние воздуха вблизи нижней поверхности кубика оказывается больше, и разность давлений создает эту самую подъемную силу. Выражение для подъемной силы



выглядит точно так же, как и выражение для силы лобового сопротивления, и с таким же численным коэффициентом. Кроме того, на кубик действуют еще две силы – сила тяжести и сила реакции стола. Пока кубик не движется, сумма всех сил, действующих на него, равна нулю и равен нулю суммарный момент всех сил относительно любой оси вращения. Когда скорость ветра достигает предельной величины, место приложения силы реакции стола становится определенным – это ребро кубика, упирающееся в узелок на ткани. Момент силы реакции стола относительно ребра кубика, вокруг которого он будет проворачиваться, равен нулю. Относительно этой же оси плечи остальных сил – тяжести, подъемной и лобового сопротивления – одинаковы и равны  $a/2$ . Сила тяжести стремится повернуть кубик в одном направлении, а две другие силы – в противоположном. Критическое положение, когда кубик вот-вот опрокинется, соответствует соотношению

$$Mg = 2 \frac{\rho (va)^2}{2}.$$

Отсюда и находим скорость ветра (плотность воздуха полагаем равной  $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$ ):

$$v = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{Mg}{\rho}} \approx 9 \text{ м/с.}$$

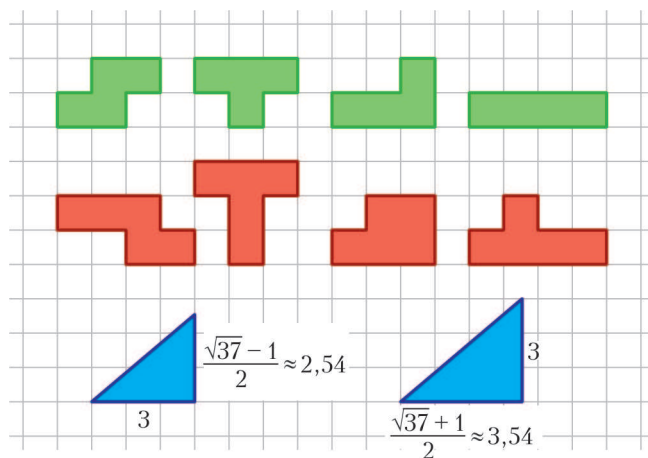
А.Ветров

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВЛОМОК

### Еще одна деталь

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Делать головоломку из дерева или фанеры вовсе не обязательно. Можно использовать картон или плотную бумагу – тогда получится «плоская» версия. Скорее всего, выйдет не так красиво и долговечно, но зато вы гораздо быстрее сможете решить головоломку. Обратите внимание, что в наборе деталей кроме кубика есть четыре тетрамино, четыре пентамино и по четыре прямоугольных треугольника двух типов (см. рисунок). Катеты меньшего треугольника равны  $\frac{\sqrt{37}-1}{2} \approx 2,54$  и 3, катеты большего равны 3 и  $\frac{\sqrt{37}+1}{2} \approx 3,54$ . За единицу принята сторона кубика, для которого нужно найти место в рамке. Сторона самой рамки равна сумме гипотенуз треугольников, т.е.  $\sqrt{37+6\sqrt{37}} \approx 8,57$ .



Надеемся, что эта головоломка вам понравится!

Е.Епифанов

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

*...бросаемые тела или снаряды описывают некоторую кривую линию; но того, что линия эта является параболой, никто не указал.*

Галилео Галилей

*...случается, что тела производят сложное движение, составленное из равномерного движения... и из движения, вызванного весом и направленного по вертикали вниз.*

Христиан Гюйгенс

*...я рассмотрел криволинейные движения тел, которые возникают, когда направление движущих сил не совпада-*

*ет с направлением брошенного тела.*

Леонард Эйлер

*Казалось, что, повторяя опыт Герца при очень высокой разреженности, можно будет обнаружить отклонение катодных лучей под действием электростатической силы.*

Джозеф Джон Томсон

*...зеркало телескопа и было изготовлено именно в форме параболы.*

Ричард Фейнман

# А так ли хорошо знакома вам парабола?

– Само собой, – скажут те, кто уже научился обращаться с квадратным трехчленом, решать квадратные уравнения и рисовать график квадратичной функции. Однако и для них зачастую неожиданной оказывается встреча с параболой, откуда ни возьмись появившейся в физических декорациях. Оказывается, многие ее особенности раскрываются при иных, нежели в математике, обстоятельствах. А уж как она этими особенностями богата!

Вникните в содержание эпитафов, в которых иной раз трудно отделить физика от математика, – ведь речь в них идет и о боевых действиях, и об исследованиях движения заряженных частиц, и об оптических приборах. Не обойтись без параболы и при рассмотрении траекторий космических кораблей. Множество спортивных состязаний связано с движением по параболе: полеты мяча при игре в теннис, футбол или баскетбол, траектории тел при метании ядер, копий или дисков... А отражатели домашних обогревателей или ламп в медицинских кабинетах? А разлетающиеся искрами огни салютов и фейерверков? А поверхность размещаемого в стакане чая?..

Не раз парабола ассистировала главным героям предыдущих выпусков «Калейдоскопа». Пришла пора ей самой выйти на авансцену нашей рубрики и показать себя во всей «физической красе». Впрочем, и сегодня она порой послужит нам лишь вычислительным подспорьем. Но каким важным и наглядным!

### Вопросы и задачи

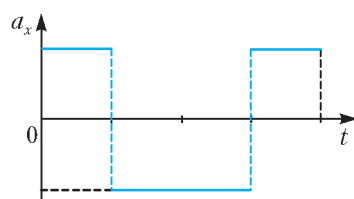


Рис. 1

1. На рисунке 1 приведен график проекции ускорения тела, движущегося прямолинейно. Постройте графики проекции перемещения и пути в зависимости от времени, считая начальную скорость равной нулю.

2. Из окна автомобиля падает тяжелый предмет. Будут ли равны времена его свободного падения, если автомобиль: а) неподвижен; б) движется с постоянной скоростью; в) движется с постоянным ускорением?

3. Для тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$ , постройте график зависимости вертикальной проекции скорости  $v_y$  от вертикальной координаты  $y$ .

4. Тело брошено под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$ . Найдите точку, в которой его ускорение максимально.

5. В далеком космосе движется корабль, скорость которого в некоторый момент времени равна  $v_0$ . Пилот корабля собирается совершить маневр, в результате которого вектор скорости должен повернуться на  $90^\circ$  и стать снова равным по величине  $v_0$ . Ускорение корабля не должно превышать заданной величины  $a$ . Чему равно минимальное время маневра?

6. Мышонок стреляет из рогатки точно в кот, сидящего поодаль на ветке дерева. Через одну секунду камень падает на землю в точку, находящуюся на одной вертикали с котом. На какой высоте находился кот?

7. Из точки  $A$  свободно падает тело (рис. 2). Одновременно из точки  $B$  бросают другое тело так, чтобы оба тела столкнулись в полете. Отношение высоты  $H$  к расстоянию  $s$  равно  $\sqrt{3}$ . Под каким углом к горизонту надо бросить тело из точки  $B$ ?

8. Почему водосливная часть плотины крупной гидроэлектростанции со стороны нижнего бьефа (часть реки ниже станции) имеет параболическую поверхность?

9. Кратковременное состояние невесомости (в течение 30–40 секунд) можно получить в кабине самолета. Как этого достичь?

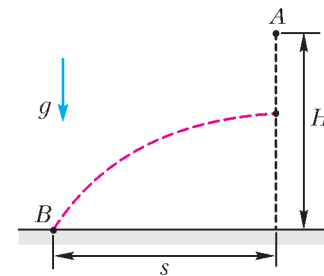


Рис. 2

10. Тело брошено под углом к горизонту. В каких точках его траектории мощность силы тяжести имеет наибольшее и наименьшее значения?

11. Край гладкого горизонтального стола имеет закругление радиусом  $R$ . С какой наименьшей скоростью нужно пустить по столу небольшое тело, чтобы оно, достигнув закругления, сразу полетело по параболе?

12. В U-образную трубку налита вода. Трубка приводится во вращение с некоторой угловой скоростью вокруг вертикальной оси, проходящей через одно из колен трубки. Какую форму принимает поверхность воды в обоих коленах трубки?

13. Изобразите в координатах  $p, T$  процесс, проводимый с идеальным газом и приведенный на рисунке 3.

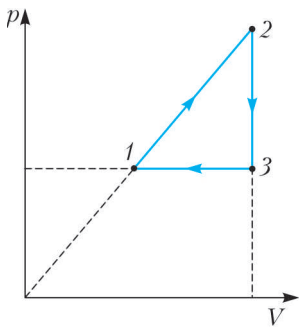


Рис. 3

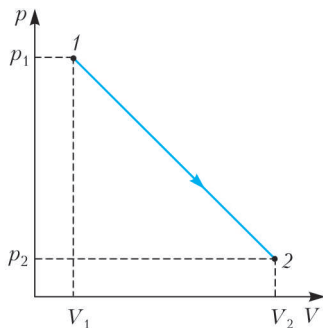


Рис. 4

14. По какому закону будет меняться температура идеального газа в процессе линейного перехода из состояния 1 в состояние 2, как показано на рисунке 4? В начале и в конце процесса температура одна и та же.

15. В пространство вблизи бесконечной плоской тонкой равномерно заряженной сетки влетает электрон. Какими будут траектории движения электрона при изменении величины его начальной скорости, если сетка заряжена: а) отрицательно; б) положительно?

16. Постройте график зависимости мощности, выделяемой в реостате, подключенном к источнику тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , от величины силы тока.

17. Если сквозь горизонтальную трубку с протекающей водой пропустить узкий пучок света, то при определенной скорости истечения воды из трубки окажется освещенным только место падения струи на землю. Как это объяснить?

#### Микроопыт

Абажур лампы, испускающей конический пучок света, направьте в затемненной комнате на побеленную стену или потолок – на «экран». Перемещая и поворачивая лампу, получите на «экране» различные контуры светлых областей. Какую они будут иметь форму?

#### Любопытно, что...

...древнегреческий математик Аполлоний Пергский в своем сочинении «Конические сечения», рассмотрев параболу как сечение конуса, обнаружил, что эта кривая – предельный случай эллипса. Также ученый получил, правда в словесной форме, ее уравнение и, собственно, ввел сам термин «парабола».

...к изучению движения тела, брошенного под углом к горизонту, ученых подталкивали потребности артиллеристов. Работы гениального самоучки Никколо Тар-

тали были развиты Галилео Галилеем и его учеником Эванджелиста Торричелли, что позволило определить параболическую форму траектории снарядов, вычислить высоту и дальность их полета и составить «таблицу для стрельбы, имеющую важное практическое значение».

...легкоатлеты – метатели и прыгуны – добиваются рекордных результатов, весьма близких к теоретическому пределу. Так, оценка максимальной дальности при прыжках в длину дает примерно 9,2 метра, мировой же рекорд составляет 8,95 метра. В идеале эта дальность должна вчетверо превышать подъем самой высокой точки параболической траектории.

...Исаак Ньютон не только объяснил найденные Иоганном Кеплером закономерности небесной механики, но и доказал, что планеты могут двигаться либо по эллипсам – замкнутым орбитам, либо по гиперболам – разомкнутым траекториям, либо по параболам, отделяющим первые от вторых. Особенность параболической траектории состоит в том, что при удалении по ней любого тела от притягивающего центра на бесконечность его скорость стремится к нулю. Это позволяет рассчитать вторую космическую скорость – так называемую скорость освобождения «от оков тяготения».

...неудача опытов Генриха Герца с катодными лучами заключалась не только в недостаточных разрежениях газа и слабых полях в исследовательских трубках, но и в предположении, что эти лучи – новый вид электромагнитных волн. Когда же Джозеф Томсон стал использовать более сильные электрические поля, факт отклонения ими катодных лучей, причем по параболическим траекториям, стал очевидным и привел в итоге к открытию не новых волн, а элементарной частицы – электрона.

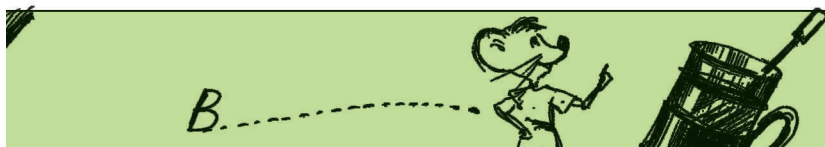
...выходящий из фокуса параболы (точнее, зеркального параболоида) пучок световых лучей, отразившись от ее поверхности, становится параллельным. Сегодня на этом принципе работают параболические антенны, зеркала лазеров и телескопов-рефракторов, его используют в отражателях автомобильных фар, прожекторов и даже карманных фонариков.

...недавние исследования простейшей и, казалось бы, досконально изученной нелинейной функции – квадратного трехчлена позволили обнаружить неожиданные эффекты, связанные с переходом различных систем и процессов из упорядоченных режимов поведения в хаотические. Например, образование скачкообразных фазовых переходов, возникновение турбулентности или изменение физиологических ритмов у животных и человека.

#### Что читать в «Кванте» о параболе (публикации последних лет)

1. «Электрические машины и выбор режима» – 2006, №5, с.29;
2. «Калейдоскоп «Кванта» – 2009, №1, с.32;
3. «О динамике криволинейного движения» – 2009, Приложение №1, с.102;
4. «Неравенство Коши в задачах по физике» – 2010, №3, с.50;
5. «Скорость и ускорение» – 2011, №1, с.34;
6. «Равноускоренное движение по прямой» – 2011, №1, с.51.

Материал подготовил А.Леонович



## Задачи

1. Когда зимой Толя Втулкин едет в автобусе, то он предпочитает держаться за спинку пластмассового кресла, а не за металлические поручни. А летом – наоборот. Почему он так поступает?

*С.Дворянинов*



2. Если Добрыня Никитич стукнет по чудо-березе, то с нее упадут яблоко и два банана. Если Илья Муромец – то яблоко и два апельсина. А если Алеша Попович – то яблоко, банан и апельсин. После того как богатыри постучали по чудо-березе, у них оказалось 2000 апельсинов, 1000 бананов и несколько яблок. Сколько именно?

*Е.Бакаев*

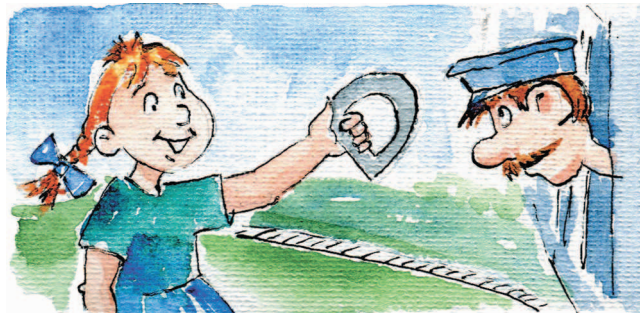


3. Во времена паровозов на крупных станциях и в локомотивных депо устраивали поворотные круги – на этих кругах разворачивали паровозы. Паровоз заезжал с путей передом на рельсовый диаметр такого круга, диаметр совершал поворот на 180 градусов, и паровоз возвращался на тот же самый путь. Почему же в наши дни обычно обходятся без поворотных кругов?

*С.Дворянинов*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи взяты из журнала «Квантик».



4. У Малыша и Карлсона есть много прямоугольных карточек, на каждой написано «6» или «+». Они сели за стол друг напротив друга и выложили наугад шесть карточек в один ровный ряд. Потом каждый точно подсчитал значение увиденного им выражения. Могло ли у Карлсона получиться ровно на 3000 больше? Перевернутый плюс выглядит как плюс, перевернутая шестерка – как девятка. (Например, если один видит  $69 + 9 + 6$ , то другой видит  $9 + 6 + 69$ .)

*Е.Бакаев*



5. Когда шариковых ручек еще не было, ученики приносили в класс и ставили на парты чернильницы-непроливайки. Это такие сосуды, в которые легко было окунуть перо, но чернила из них не выливались, как бы их ни крутили и ни опрокидывали. А как они были устроены? Придумайте и нарисуйте схему.

*С.Дворянинов*



*Иллюстрации Д.Гришуковой*

## Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

**11.** Простые числа занумеровали в порядке их возрастания (первое – 2, второе – 3, третье – 5, четвертое – 7, пятое – 11 и так далее). Докажите, что, начиная с 12-го простого числа, каждое из них больше своего утроенного номера.

*В.Сендеров*

**12.** Малыш и Карлсон играют в игру. Сначала у них есть одна куча из 100 конфет. За один ход Малыш либо делит одну из куч на две, либо съедает одну конфету из любой кучи. Карлсон за один ход съедает любую кучу целиком. Ходят по очереди, начинает Малыш. Выигрывает тот, кто съест последнюю конфету. Кто из игроков может гарантировать себе выигрыш, как бы ни играл его соперник?

*Е.Епифанов*

**13.** Найдутся ли три числа  $A$ ,  $B$  и  $C$ , большие миллиона и такие, что произведение

$$(A + B - C)(B + C - A)(C + A - B)$$

больше нуля, но меньше одной миллионной?

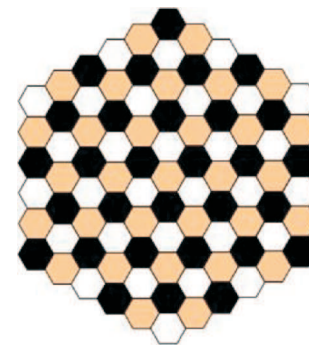
*Г.Гальперин*

**14.** Из вершин выпуклого четырехугольника опустили перпендикуляры на его диагонали. Оказалось, что длина любой диагонали не больше суммы длин опу-

щенных на нее перпендикуляров. Найдите угол между отрезками, соединяющими середины противоположных сторон четырехугольника.

*И. Вайнштейн*

**15.** а) Боре дали доску для игры в гексагональные шахматы, полями которой являются правильные шестиугольники (см. рисунок), и 91 фишку. Затем взяли еще 10 фишек, расставили их на доске и разрешили Боре добавлять его фишки на свободные поля по такому правилу. Если у свободного поля не менее чем на трех соседних полях стоит по фишке, то на это поле тоже можно поставить фишку. Соседними считаются поля, имеющие общую сторону. Может ли случиться так, что Боря заставит фишками все свободные поля доски?



б) Тот же вопрос для случая, когда на поле расставили 11 фишек.

*В.Журавлев*

## Меньше знаешь — крепче спишь



*И.АКУЛИЧ*

— Сударь, — сказал Планше, — надо вам знать... хотя, в сущности, вам, пожалуй, этого и знать не надо.

А.Дюма. Двадцать лет спустя

**М**ЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНКУРС «КЕНГУРУ» проводится не один десяток лет, вызывает большой интерес у школьников и пользуется заслуженной популярностью. Его главная особенность — отсутствие намеренно заковыристых, специфических задач, одолеть которые способны, как правило, лишь

специально обученные «олимпиадники». Иначе говоря, «Кенгуру» — массовый конкурс, проводимый под лозунгом «Математика для всех», в чем его несомненное достоинство (подробности о конкурсе можно посмотреть на сайте [mathkang.ru](http://mathkang.ru)).

Одно из заданий для 3–4 классов за 2011 год послужило основой для такой задачи.

Восемь кружочков (4 белых и 4 серых) расположены в виде квадрата. В них вписаны числа от 1 до 8 (в каждый кружочек — по одному числу) так, что на каждой стороне квадрата сумма чисел равна 13. При этом расположение трех чисел уже указано (рис.1).

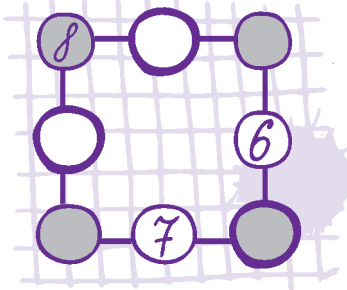


Рис. 1

— Сначала я пробовал действовать подбором, но потом понял, что это слишком долго и какие-то решения я могу просто пропустить. Долго думал, как быть, пока не задался вопросом: а куда можно поставить пятерку? Она не может быть в одной горизонтали с восьмеркой, потому что  $5 + 8 = 13$ , и если в третий кружочек той же горизонтали поставить *любое* оставшееся число, то сумма будет явно больше 13. По той же причине пятерка не может лежать и в одной вертикали с восьмеркой. Что же остается? Только три кружочка, но в двух из них уже поставлены числа 6 и 7. Поэтому число 5 может занимать единственное место: в правом нижнем кружочке. Ну, а после этого числа в остальных кружочках определяются без труда, исходя из того, что сумма чисел по всем сторонам квадрата равна 13. Например, в левом нижнем кружочке должно быть число  $13 - (7 + 5) = 1$ , в правом верхнем  $13 - (6 + 5) = 2$  и так далее. Итоговое расположение показано на рисунке 2. Ну, а сумма чисел в серых кружочках равна  $8 + 2 + 1 + 5 = 16$ .

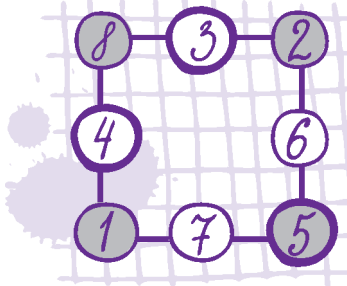


Рис. 2

— Умница! — похвалил я его. — Не осрамил честь семиклассника перед третьим и даже четвертым классом!

— Но, — многозначительно добавил Олег, — я обнаружил в условии *лишние данные!*

— Это какие? — удивился я.

— Шестерка и семерка! Оказывается, достаточно указать расположение только восьмерки, т.е. исходная картинка могла выглядеть, как на рисунке 3.

— Ну-ка, поясни.

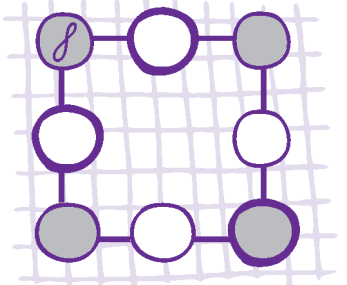


Рис. 3

Чему равна сумма чисел в серых кружочках?

Для пробы я предложил эту задачу своему соседу — семикласснику Олегу. Справедливость требует отметить, что он ее одолел и даже сумел подробно разъяснить свое решение, суть которого можно пересказать так.

— Я подумал: если для пятерки допустимы только три кружочка, то это тем более верно для шестерки и семерки! Значит, эти три числа должны лежать в тех же трех «разрешенных» кружочках, но вот вопрос: обязательно ли в том же порядке? Сразу видно,

что шестерка и семерка не могут находиться на одной горизонтали — ведь  $6 + 7 = 13$  и сумма их с третьим числом той же горизонтали превысит 13. Точно так же они не могут быть в одной вертикали. Значит, в правом нижнем углу — непременно пятерка, а шестерка и семерка расположены либо как в условии исходной задачи, либо симметрично относительно диагонали. Потому итоговое расположение чисел — либо то, которое я нашел, либо симметричное ему (рис.4).

Но нас-то интересует не расположение чисел, а только сумма тех из них, что находятся в серых кружочках. Эти цифры — те же самые, так что и сумма их останется неизменной — 16.

Что тут сказать? Молодец парень! Однако он был весьма удивлен, когда узнал, что и единственная восьмерка — тоже *лишние данные!* Иначе говоря, можно было вообще не указывать *ни одного* числа в кружочках. Более того — решение при этом еще и упрощается.

Итак, пусть не указано положение ни одного из чисел. Обозначим их значения (пока неизвестные) буквами так, как показано на рисунке 5.

Тогда, согласно условию, выполняются четыре таких равенства:

$$A + B + V = 13, \quad V + Г + Д = 13,$$

$$Д + E + Ж = 13, \quad Ж + И + А = 13.$$

Давайте их сложим. В правой части будет, понятное дело, число  $13 \cdot 4 = 52$ . А в левой? Там окажется сумма значений всех букв, причем некоторые из них встретятся один раз, а другие — дважды. Поэтому для удобства представим суммарное выражение в таком виде (убедитесь в его справедливости!):

$$(A + B + V + Г + Д + E + Ж + И) +$$

$$+ (A + B + Д + Ж) = 52.$$

Заметим, что в первых скобках находится сумма всех имеющихся чисел (правда, не ясно, в каком порядке, но от перестановки слагаемых сумма не меняется). Поэтому она равна  $1 + 2 + \dots + 8 = 36$ . Получаем, что

$$36 + (A + B + Д + Ж) = 52,$$

и потому

$$A + B + Д + Ж = 52 - 36 = 16.$$

Но  $A + B + Д + Ж$  — это и есть сумма чисел в серых кружочках. Так что она равна 16 в любом случае.

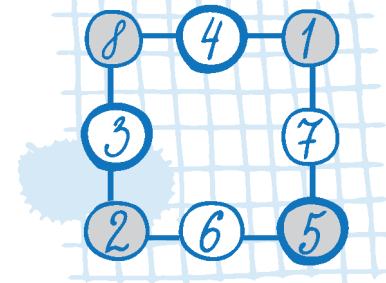


Рис. 4

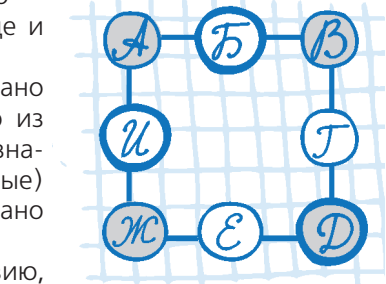


Рис. 5

Как видим, отсутствие данных избавило нас от необходимости выполнять какой бы то ни было перебор. Более того — не требуется даже выяснять, *можно ли вообще* расставить числа в кружочках в соответствии с требованиями условия. Так что в некоторых случаях, действительно, меньше знаешь — лучше решаешь. И, соответственно, крепче спишь, почивая на лаврах.

P.S. Хотя задача успешно решена, остался непроясненным вопрос: а существуют ли иные расположения в кружочках чисел от 1 до 8, дающие сумму 13 по каждой стороне квадрата, отличные от найденного Олегом (решения, переходящие друг в друга с помощью поворотов и отражений, считаем одинаковыми)? И если да, то сколько их?

## Простой мини-робот

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

**П**РЕДЛАГАЕМ ВАМ САМОСТОЯТЕЛЬНО ИЗГОТОВИТЬ ПРОГРАММИРУЕМЫЙ МОБИЛЬНЫЙ МИНИ-РОБОТ-УБОРЩИК. Вы сможете сделать это за несколько минут, если будете следовать нашим подробным инструкциям.



Что нужно для сборки мини-робота

**Необходимые элементы.** Вот короткий список деталей, которые мы сами использовали при сборке робота:

- небольшая щетка (для мытья посуды, для волос, косметическая и т.п.);
- вибромотор QX-6A-1, 3V (для щеток поменьше подойдет QX-4B-3V);
- литиевая батарейка CR2032, 3V (или меньшего размера);
- двусторонняя клейкая лента на пенной основе.

**Программирование.** Программирование достаточно простое, и его цель научить робота, где у него зад



Мини-роботы

и где перед. Для этого нужно прижать щетку к плоской поверхности, одновременно сдвигая ее вдоль этой поверхности, чтобы волоски отогнулись назад. Теперь следует закрепить щетку на некоторое время в этом положении, чтобы волоски “запомнили” этот изгиб. Вот собственно и все.



Роботы в манеже

**Сборка.** Спереди — там, где волоски загнуты внутрь щетки, — приклеиваем кусочек пленки и закрепляем на ней мотор. Чуть позади приклеиваем кусочек пленки для батарейки и кладем на него зачищенный кончик синего провода. Минусом к пленке закрепляем батарейку, а сверху, где плюс, прикрепляем к пленке зачищенный кончик красного провода.

**Отладка.** Собранный робот будет уверенно двигаться по поверхности стола или по полу, реагируя на малейшие неровности и обходя препятствия. Вот только если он будет описывать слишком маленькие окружности, нужно будет попытаться изменить наклон волосков или расположение мотора.

**Испытание.** Сделайте для робота манеж, чтобы он не убежал от вас, и разместите там несколько препятствий. Посмотрите, как будет ориентироваться робот в вашем лабиринте. Затем запустите туда несколько роботов.

# Два слова о колодце (и не только о нем)

С. ДВОРЯНИНОВ

*Спой мне песню, как синица  
Тихо за морем жила;  
Спой мне песню, как девица  
За водой поутру шла.*

А.С.Пушкин

## Слово первое – «журавль»

В древние времена люди брали воду из рек или озер. Потом появились колодцы. Колодец – это прежде всего глубокая яма. Глубокая – чтобы до водоносного слоя добраться. Так называемый водоносный горизонт может быть любым. Далее, внутри колодца устанавливается деревянный сруб. Он препятствует осыпанию земли. На Руси возле неглубоких колодцев ставили «журавль» (рис.1). Он состоит из трех частей: это врытый в землю столб, рычаг-коромысло с грузом-противовесом на одном конце и шест, укрепленный на другом конце. На шесте имеется – крючок, на котором закреплено ведро. Качается коромысло туда-сюда, словно кланяется, и своим длинным «клювом» достает наверх водицу – и людям, и скотине домашней, и чтобы огород полить, и для бани. А издали посмотреть – так и есть птица-



Рис. 1

журавль, стоящая на одной ноге и пьющая воду. Представьте: бескрайняя степь, и нет ничего кругом выше поднятой шеи журавля-колодца...

Пришли эти колодцы к нам из стран Востока и Древнего Египта. Там они наряду с каналами, плотинами и шлюзами были элементами ирригационной системы и поднимали воду на поля.

А теперь вопрос: для чего надо было заготавливать столб для колодца – пилить в лесу дерево, везти его ствол на место и вкапывать рядом с колодцем? Да еще крепить наверху коромысло, а к нему – шест? К чему такая сложная конструкция? Не проще ли лишь иметь веревку, на ней опустить в колодец ведро, зачерпнуть воду и поднять его наверх?

Легче ответить на эти вопросы тому, у кого есть хотя бы минимальный соответствующий жизненный опыт. Но часто ли современному городскому школьнику приходится тянуть или удерживать в руках веревку? Здесь может помочь художественная литература, а альпинисты наверняка вспомнят слова «Песни о друге» В.Высоцкого:

*А когда ты упал со скал,  
Он стонал, но держал...*

Альпинисты всегда идут в связке – каждый в цепочке связан с другими специальной веревкой. Она спасает при падении. Держать веревку, точнее груз на веревке, – тяжело, неудобно, некомфортно. Да и опасно, особенно малому ребенку – у колодца тяжелое ведро может его перетянуть. Так что и не пошлешь мальца к такому колодцу за водой. А к труду раньше приучали в народе сызмальства.

Сейчас мы убедимся, что набирать воду из колодца-журавля и удобно, и безопасно, и даже ребенку по силам. Оказывается, наши предки и в старину уже знали закон сохранения энергии – по крайней мере эффективно использовали его на деле.

Итак, мы подходим к «журавлю». Груз-противовес перетянул шест с пустым ведром, поэтому он лежит на земле, а ведро находится в воздухе и чуть качается на ветру. Мы начинаем перебирать шест руками, опуская его вниз. Фактически мы поднимаемся на этом шесте, точнее – пытаемся подняться. Получается, как бег на месте – так и подъем на месте. Наш собственный вес больше веса груза-противовеса, и потому мы потихоньку подымаем его вверх. (Обратите внимание, насколько физиологично это физическое упражнение: никакой нагрузки на позвоночник!) Наконец, цель достигнута: ведро опустилось в воду. В этот момент мы перестаем тянуть шест вниз. Груз-противовес оказался наверху, и теперь он перетягивает ведро. Груз начинает опускаться вниз, а ведро – подниматься вверх. На этом этапе нам следует даже чуть притормаживать шест руками, чтоб ведро не слишком быстро разогналось. Минута, да что там – всего несколько секунд, и ведро оказывается у нас в руках, точнее – стоящим на краю сруба. Пожалуйста, можно испить студеной колодезной воды (летом) или же пойти поставить самовар (зимой).

В некоторой степени «журавль» напоминает неподвижный ворот, который служит для изменения направления действия силы. Но неподвижный ворот не накапливает потенциальную энергию, а «журавль» – накапливает, сохраняет. Это, безуслов-



но, более сложный механизм. Заметим еще, что иногда вместо шеста использовали веревку. Тогда физические усилия человека были направлены на подтягивание на этой веревке (подобно подтягиванию на канате в спортзале). Ясно, что и это подтягивание происходит на месте. Так что когда увидите колодец-журавль – вспомните и правило рычага, и закон сохранения энергии!

### Слово второе – коловорот

Однако если колодец глубокий, то требуются и шест длинный – чтобы с земли до воды доставал, и столб высокий – чтобы обеспечивал необходимый размах коромысла. Кроме того, длинный шест, который движется не по вертикальной прямой, в колодец может и не войти – застрянет. В этом случае используют колодец с воротом, или коловорот.

Словари определяют слово «коловорот» как круговорот, круговое вращение, инструмент для сверления. В природе

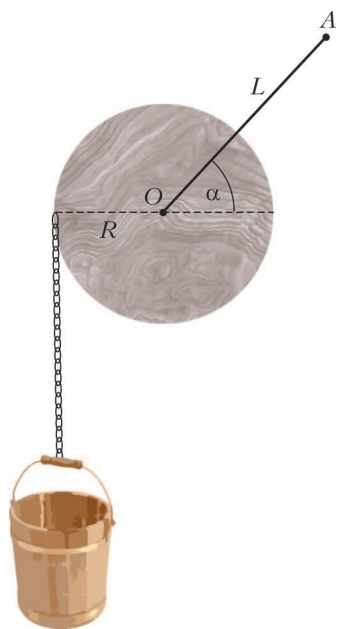


Рис. 2

коловорот по народному поверью происходит 21 декабря, в день зимнего солнцестояния, когда солнце поворачивает с зимы на лето и день начинает прибывать.

В колодцах с коловоротом на крепкое дубовое бревно – закрепленный горизонтально цилиндр с радиусом основания  $R$  – наматывается металлическая цепь (рис.2). Бревно вращают с помощью изогнутой ручки – собственно коловорота. На рисунке он изображен отрезком  $OA$ , длина которого  $L$ . Для подъема ведра с водой из колодца коловорот следует вращать по часовой стрелке.

Силу мы прикладываем в точке  $A$ , а каким должно быть ее направление? Точнее, каким оно должно быть, если мы хотим обойтись самой малой силой и не тратить ее попусту – не прикладывать ее по тем направлениям, вдоль которых работа не совершается?

Силу мы прикладываем в точке  $A$ , а каким должно быть ее направление? Точнее, каким оно должно быть, если мы хотим обойтись самой малой силой и не тратить ее попусту – не прикладывать ее по тем направлениям, вдоль которых работа не совершается? Ответ очевиден. Направление силы должно быть переменным, но всякий раз совпадающим с касательной к окружности в переменной точке  $A$ . Стало быть, при одном положении коловорота человек должен «виснуть» на ручке, при другом – толкать ее от себя вверх, но в обоих случаях сила направлена вертикально. В другие моменты следует ручку тянуть к себе или толкать от себя – в эти моменты сила направлена по горизонтали. Есть еще много промежуточных направлений.

**Устойчивость идеального ворота.** Сейчас мы сосредоточимся на описании именно этого явления – устойчивости – с помощью идеального модельного устройства. Идеального потому, что будем считать цепь невесомой.

Итак, мы подходим к колодцу. С одной стороны ворота на короткой цепи (теперь лучше сказать – на нити) висит пустое ведро массой  $m$ . Его уравновешивает ручка, расположенная в этот момент с другой стороны. Система находится в покое. Условием равновесия системы является равенство моментов сил:

$$mgR = MgL \cos \alpha,$$

где  $M$  – масса ручки, которая для простоты вся сосредоточена в точке  $A$ ,  $\alpha$  – угол отклонения ручки от горизонтали,  $L \cos \alpha$  – плечо силы тяжести рычага-ручки. Решая полученное уравнение относительно угла  $\alpha$ ,  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , найдем два значения:

$$\alpha = \pm \arccos \frac{mR}{ML}.$$

Оказывается, они соответствуют двум положениям равновесия системы – неустойчивому и устойчивому.

Пусть рычаг находится в верхнем положении  $\alpha = \alpha_+$ . Выведем рычаг из этого положения, например поднимем его чуть вверх. В результате правое плечо уменьшится, правый момент сил тоже уменьшится. Левое плечо остается неизменным – оно всегда равно  $R$ . Ведро будет перевешивать ручку, и потому рычаг начнет подниматься вверх, вращаясь против часовой стрелки. Стало быть, система будет удаляться от исходного положения  $\alpha = \alpha_+$ . Это признак неустойчивости. Если же рычаг из исходного положения чуть опустить, вращая его по часовой стрелке, то правый момент сил увеличится. Таким образом, при любом отклонении рычага от верхнего положения равновесия появляется сила, стремящаяся это отклонение увеличить, что и означает неустойчивость верхнего положения  $\alpha = \alpha_+$ .

А вот при малом отклонении рычага от нижнего положения равновесия  $\alpha = \alpha_-$  появляется сила, стремящаяся это отклонение уменьшить (убедитесь в этом самостоятельно) и вернуть систему в исходное состояние. Поэтому это положение равновесия устойчиво.

*Замечание.* Установить устойчивость и неустойчивость положений равновесия можно и по-другому. Пусть вначале рукоятка ворота расположена горизонтально, цепь практически целиком намотана на ворот, так что ведро находится на уровне оси ворота. Теперь отведем рукоятку на угол  $\alpha$  от горизонтали (см. рис.2) и запишем потенциальную энергию системы:

$$W(\alpha) = MgL \sin \alpha - mgR\alpha.$$

Возьмем производную по  $\alpha$ :

$$W'(\alpha) = MgL \cos \alpha - mgR.$$

Уравнение для критических точек функции  $W(\alpha)$ :

$$W'(\alpha) = 0, \text{ или } MgL \cos \alpha - mgR = 0,$$

полностью совпадает с полученным раньше равенством моментов сил. При этом критическая точка  $\alpha = -\alpha_-$  – это точка минимума потенциальной энергии (при переходе через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс), а критическая точка  $\alpha = \alpha_+$  – точка максимума. Хорошо известно, что всякая система стремится к состоянию, отвечающему минимуму потенциальной энергии (например, шарик скатывается с горки вниз, растянутая пружина сокращается, а сжатая наоборот распрямляется). Снова получаем, что нижнее положение рычага  $\alpha = \alpha_-$  устойчиво, а верхнее  $\alpha = \alpha_+$  – неустойчиво.

**Устойчивость реального ворота.** Теперь кратко остановимся на описании реального ворота и будем учитывать массу цепи.

Потенциальная энергия системы в этом случае равна

$$W(\alpha) = MgL \sin \alpha - mgR\alpha - (dR\alpha)g\left(\frac{R\alpha}{2}\right).$$

Сравните это выражение с аналогичным предыдущим – появилось новое слагаемое. Здесь  $\alpha$  – по-прежнему угол

поворота рычага от горизонтали,  $d$  – линейная плотность цепи,  $R\alpha$  – длина опустившейся части цепи,  $dR\alpha$  – масса этой части,  $\frac{R\alpha}{2}$  – расстояние, на которое опустился центр тяжести этого участка цепи. Производная по углу  $\alpha$  равна

$$W'(\alpha) = g(ML \cos \alpha - mR - dR^2\alpha).$$

Уравнение для критических точек  $W'(\alpha) = 0$  теперь таково:

$$ML \cos \alpha = mR + dR^2\alpha.$$

Пусть это уравнение имеет корни (для реального колодца это всегда так). Напомним, что устойчивые положения равновесия системы соответствуют точкам минимума потенциальной энергии, неустойчивые – точкам максимума. При переходе аргумента  $\alpha$  слева направо через критические точки в точках минимума производная меняет знак с минуса на плюс. На рисунке 3 критические точки – это абсциссы

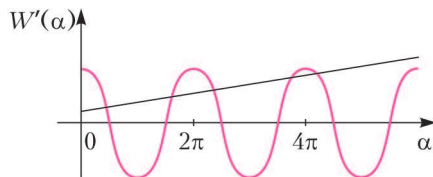


Рис. 3

точек пересечения синусоиды и прямой линии. Обратите внимание на пары критических точек, лежащих по разные стороны от точек  $\alpha = 2\pi$ . Легко видеть (сравнивая значения левой и правой частей уравнения), что меньшая (левая) из этих точек – точка минимума потенциальной энергии, большая (правая) – точка максимума потенциальной энергии.

**Бифуркация положений равновесия и катастрофы в механической системе типа «ворот».** Если при некоторых значениях параметров системы положения равновесия «отдалены» друг от друга, то данную систему можно *устойчиво* использовать как качели – при отклонении от точки покоя система совершает колебания около устойчивого положения равновесия.

А что будет происходить в нашем случае, если продолжать опускать пустое ведро в колодец? Понятно, что цепь будет сматываться с ворота все больше и больше, поэтому масса опустившейся части цепи будет увеличиваться. В результате величины  $\alpha_-$  и  $\alpha_+$  будут приближаться к нулю и одновременно друг к другу. Соответственно, будут приближаться друг к другу и два положения равновесия рычага-ворота (и системы в целом). Наконец, система потеряет устойчивость и произойдет *катастрофа* – скачкообразное изменение, возникающее в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. На деле это означает, что теперь нам не требуется крутить ворот, чтобы опустить ведро. Ведро и большой кусок цепи сами начнут вращать ворот – и тем сильнее и быстрее, чем ниже опускается ведро. Если колодец глубокий, то ворот начинает вращаться очень быстро. Его центр тяжести из-за наличия рычага не лежит на оси, и в системе начинаются биения, которые расшатывают столбы, удерживающие ворот. Лучше с самого начала начать тормозить ворот, прижимая к нему ладони. Вот почему часто ворот оказывается отполированным многими тысячами рук (подобно тому, как блестит нос служебной собаки, которую держит на поводке воин-пограничник скульптурной композиции на московской станции метро «Площадь революции»).

С момента слияния двух точек покоя системы ее уже нельзя использовать как качели – никаких качаний тут не

получится. Эта элементарная механическая конструкция и ее математическая модель представляют простейшую одномерную машину катастроф с одним управляющим параметром. Одномерная потому, что ее состояние определяется одной величиной  $\alpha$ . Управляющим же параметром является масса цепи.

Описанный процесс потери устойчивости – это пример явления, называемого *бифуркацией*. Термином «бифуркация» обозначают всевозможные качественные изменения или метаморфозы различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят. Это понятие, как и фрактал или хаос, относится к разряду междисциплинарных. Им оперируют инженеры и естествоиспытатели, физики и биологи, социологи и другие специалисты гуманитарных наук.

Бифуркционные значения параметра важны в физике. Так, если бы термометр был изобретен в Древнем Египте, то точку  $100^\circ\text{C}$ , когда вода превращается в пар, отметить было бы можно, а как отметить ноль – когда вода превращается в лед?

\* \* \*

В заключение читателям предлагается провести небольшую лабораторную работу, наглядно демонстрирующую описанные эффекты. В качестве ворота возьмите катушку из-под ниток, к которой на проволоке жестко прикреплен противовес (рис. 4). Катушка вращается вокруг горизонтальной оси – ее роль выполняет обычный гвоздь. С катушкой

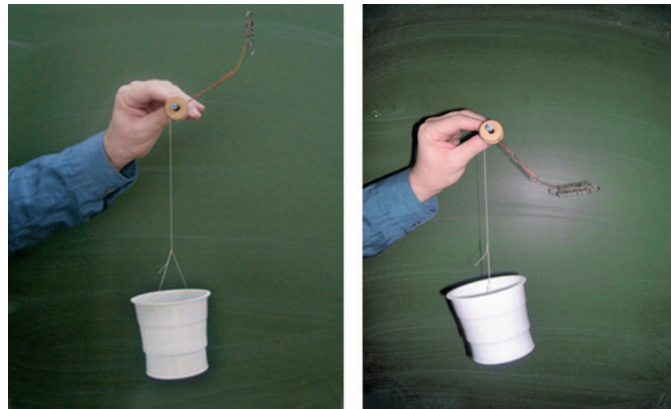


Рис. 4

связана намотанная на нее нить, на нити закреплена легкая емкость для воды. Вначале емкость пустая. Благодаря сильному трению мы можем наблюдать систему не только в устойчивом положении равновесия (рис. 4, б), но и в неустойчивом (рис. 4, а). Обычно же неустойчивые положения равновесия наблюдать трудно или даже практически невозможно (шарик на «вершине» другого шара, стоящий на острие заточенный карандаш). Малейшее внешнее воздействие мгновенно переводит систему из неустойчивого положения в устойчивое.

Теперь сделайте вот что. Медленно, почти по капелькам, начинайте наливать воду в емкость. Вы заметите, как в ответ на это рычаг, вращаясь против часовой стрелки, будет подниматься вверх и в конце концов приблизится к предельному – горизонтальному – положению. Два положения равновесия сольются и затем исчезнут. Сразу же начнется очень быстрое движение емкости с водой вниз.

Эту модель можно использовать и для демонстрации устойчивых качаний качелей (или колебаний) вблизи положения равновесия, и для демонстрации явления катастрофы и бифуркации.

# Как нанокластер с самолетом столкнулся

И. АМЕЛЮШКИН, А. СТАСЕНКО

*Первый контакт со стихией начинается над Кольским полуостровом... Появляются первые признаки обледенения – стекла пилотской кабины становятся матовыми. Начинается тряска...*

Из боржурнала самолета АНТ-25, первый беспосадочный перелет Москва – США, 1937 г.

НО НАЧНЕМ С ДРЕВНИХ ГРЕКОВ. ТОГДА БЫЛ ИЗВЕСТЕН единственный газ (хаос) – воздух, и он входил в четверку элементарных сущностей: вода, земля, огонь, воздух. Во времена Ломоносова добавился еще один газ – углекислый газ, или двуокись углерода. С тех пор информация о новых газах постепенно накапливалась, и, например, братья Монгольфье, нагревая воздух для своего воздушного шара за счет горения влажной соломы, считали, что получили некий новый газ.

На определенном этапе развития физики стало известно, что воздух, которым мы дышим, это не просто газ, а смесь газов. В их числе – и водяной пар, который идет из чайников и кастрюль, конденсируется поутру в виде капелек росы, висит в виде облаков, оставляет белые шлейфы за самолетами...

Более того, около полувека назад выяснилось, что любой газ состоит не только из молекул, но и содержит некоторое количество молекулярных ассоциаций, или кластеров (облачков), объединяющих две, три, ...,  $N$  молекул. Конечно, чем больше  $N$ , тем менее вероятно встретить такой кластер в газе, но они есть! С понижением температуры количество и размеры кластеров растут, и, наконец, происходит легко наблюдаемая конденсация. Вот как поэтично сказал о фазовых переходах древнегреческий философ Гераклит Эфесский, отождествляя воздух и водяные пары: «...вода – жива воздуха смертью... воды смерть – воздуху родиться».

А почему, вообще, молекулы «хотят» сконденсироваться? Ведь если их считать твердыми шариками радиусом  $r_m$  ( $m$  – от слова *molecule*), то они могут «почувствовать» друг друга только при соприкосновении. Эту мысль можно выразить в терминах потенциальной энергии взаимодействия  $\Pi(r)$ : на расстояниях между центрами молекул  $r > r_m$  нет никакого взаимодействия, а при  $r = 2r_m$  энергия взаимодействия резко возрастает до бесконечности (рис. 1, а). На самом деле это не так: молекулы «знают» друг о друге еще задолго до соприкосновения. Более того, они, будучи электронейтральными, испытывают «влечение» друг к другу за счет того, что обладают дипольными моментами – центры «тяжести» положительных и отрицательных зарядов частиц, входящих в состав молекулы, не совпадают друг с другом.

Этот факт «вращения» друг к другу (в терминах древней философии) выражается в том, что потенциальная энергия взаимодействия молекул уменьшается при сближении (а ведь все тела в природе стремятся к минимуму потенциальной энергии). На рисунке 1, б красной стрелкой показано

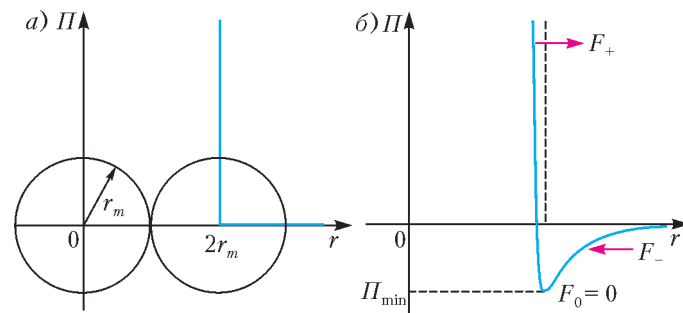


Рис.1. Потенциальная энергия взаимодействия молекул

направление соответствующей силы притяжения  $F_-$ . В точке  $F_0$  ( $r = 2r_m$ ) достигается минимум потенциальной энергии, а при попытке дальнейшего сближения потенциальная энергия резко возрастает – возникают силы отталкивания (красная стрелка  $F_+$ ).

И вот, представим себе, что молекулы водяного пара уже объединены в некий кластер, который собирается столкнуться с поверхностью крыла самолета и (что нежелательно) «примерзнуть» к ней. Но ведь и поверхность крыла тоже состоит из молекул (если тело диэлектрическое) или ионов и электронов (если это металл). Значит, взаимодействие этого множества молекул можно описать на языке потенциальной энергии того же вида, что и на рисунке 1, б. Ниже приведены результаты такого расчета.

Из справочника по физике были взяты значения  $r_m$  и  $\Pi_{\min}$  для воды и алюминия. Считаем, что температура влажного воздуха составляет  $-10^\circ\text{C}$ , концентрация молекул воздуха соответствует атмосферному давлению и заданной температуре, а концентрация молекул водяного пара соответствует относительной влажности воздуха 10%.

Пусть кластер, образовавшийся в таких условиях, состоит из  $N \approx 1000$  молекул воды, среди которых присутствуют молекулы воздуха (это явление в макрофизике называется растворимостью газа в жидкости). Впрочем, число молекул в кластере не является строго постоянным. Наиболее быстрые молекулы, преодолев силы межмолекулярного притяжения, вылетают из наноклапты. Остаются медленные молекулы: их кинетической энергии недостаточно для освобождения от влияния цепких соседей. Любопытно было бы приписать этому живому облачку макроскопические хаактеристики – радиус, поверхностное натяжение, плотность...

Поведение молекул воды в такой капле описывается системой из  $12(N - 1)$  уравнений; молекулы воды взаимодействуют друг с другом через посредство сил межатомного взаимодействия атомов кислорода и водорода. (Число 12 есть сумма параметров, описывающих поведение одной молекулы: по три для поступательной скорости, вращательной скорости, положения центра масс и пространственных углов.)

На рисунке 2 отражены последовательные стадии столкновения водяного кластера с поверхностью крыла для  $N \approx 1000$ . Голубыми кружками отмечены молекулы воздуха, остальные – молекулы водяного пара. Стрелками показано направ-

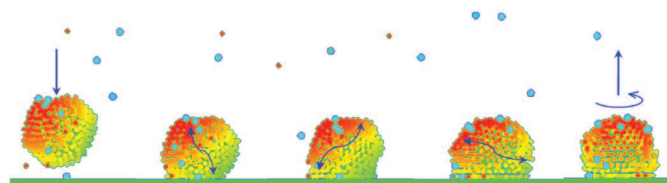


Рис.2. Последовательные стадии столкновения водяного кластера с поверхностью твердого тела

ление движения жидкости внутри кластера и вращение вокруг вертикальной оси. Температура поверхности при этом  $T_{\text{п}} = 0$  (очень холодная поверхность). Видно (см. первый кадр на рисунке 2), что это уже не капля, но еще и не кристалл, хотя и нечто угловатое.

На рисунке 3 видны последовательные стадии столкновения для того же значения  $N$ , но энергия взаимодействия кластера воды с поверхностью уменьшена по сравнению с

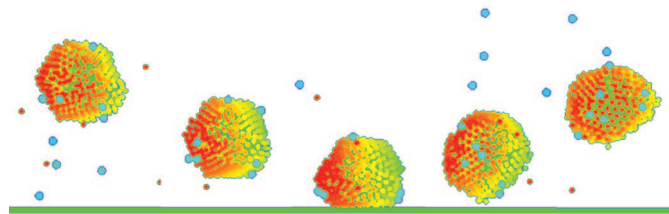


Рис.3. Столкновение того же кластера с той же поверхностью, но при сильно уменьшенной энергии взаимодействия

предыдущим случаем. В этом случае самолету «повезло» – водяной кластер отразился от его поверхности.

Оценим теперь амплитуду и частоту колебаний атомов кристаллической решетки твердого тела. Будем считать амплитуды одинаковыми во всех направлениях. Тогда, согласно закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы в случае термодинамического равновесия, имеем

$$\frac{m_{\text{п}} \langle v_{\text{п}}^2 \rangle}{2} \approx \frac{k_{\text{п}} \langle \xi^2 \rangle}{2} \approx \frac{k_{\text{Б}} T}{2}.$$

Здесь  $m_{\text{п}}$  – масса атома (индекс «п» – от слова *поверхность*),  $v_{\text{п}}$  – его скорость,  $k_{\text{п}}$  – жесткость межатомных взаимодействий,  $\xi$  – максимальное смещение атома из положения равновесия,  $k_{\text{Б}} \approx 1,4 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Угловые скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение. Жесткость  $k_{\text{п}}$  связана с модулем Юнга  $E$ , межатомным расстоянием  $a$  и характерной площадью сечения  $S = \pi a^2$  законом Гука:

$$k_{\text{п}} \approx \frac{ES}{a} = E\pi a.$$

Из последних двух соотношений находим

$$\langle \xi^2 \rangle \approx \frac{k_{\text{Б}} T}{k_{\text{п}}} \approx \frac{k_{\text{Б}} T}{E\pi a}.$$

Если принять  $T = 263$  К ( $-10$  °С),  $E = 70$  ГПа (для алюминия),  $a \approx 2 \cdot 10^{-8}$  см, то для амплитуды колебаний получим

$$\sqrt{\langle \xi^2 \rangle} \approx 0,64 \cdot 10^{-12} \text{ м},$$

что составляет приблизительно 0,2% от  $a$ . При этом частота колебаний атомов в решетке при средней скорости колебаний  $\sqrt{\langle v_{\text{п}}^2 \rangle} \approx 500$  м/с будет равна

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\langle v_{\text{п}}^2 \rangle}}{\sqrt{\langle \xi^2 \rangle}} \approx 10^{14} \text{ Гц}.$$

Эти данные были учтены при расчете поведения кластера, изображенного на рисунке 4 для  $N \approx 150$ . Большой голубой



Рис.4. Кластер стремится «размазаться» по поверхности твердого тела. Тут-то и начинается обледенение

кружок изображает молекулу воздуха. Из рисунка видно, что при ударе о поверхность часть молекул воды стремится покинуть кластер, а сам кластер – «размазаться» по поверхности. В этом случае и начинается обледенение.

По данной теме можно порекомендовать прочитать еще несколько статей А.Стасенко, опубликованных в журнале «Квант»: «Любовь и ненависть в мире молекул» (1994, №2), «Кладовые энергии молекул» (1995, №5), «Хаос молекул и звезд» (1998, №5), «Молекулы, сосиски и алмазы» (2003, №1), «Как молекулы столкнулись» (2007, №5). (Прим. ред.)

## Вихри враждебные...

А. СТАСЕНКО

КАКОЙ ЖЕ РУССКИЙ НЕ ЗНАЕТ ЭТИХ СТРОК:

«Буря мглою небо кроет,  
Вихри снежные крутя...»,  
«Лишь вихорь черный  
На древо смерти набжит...»  
(А.С. Пушкин)  
«Вихри враждебные веют над нами»  
(революционная «Варшавянка»).

Уверен, что наш читатель может напомнить множество других примеров. Но еще в древности интересовались этой формой движения – причем не бесстрастно. Например,

ветхозаветный Иезекииль, описывая аппарат вертикального взлета и посадки, привидевшийся ему в Храме, был потрясен «колесами», которые не отстают от аппарата: «эти колеса похожи были в своем движении на... вихрь особого рода».

А вот как описывает атмосферный вихрь римский поэт и философ Тит Лукреций Кар в поэме «О природе вещей» (1 век до н.э.):

«...легко ты теперь разберешься  
В том, что .... у нас называется смерчем ...  
Падает на море столб ...  
Тут все суда, что таким захвачены водоворотом,  
Вертясь бешено в нем, подвергаясь огромному риску ...»

Очень интересна также книга П.-А. Моллена «Охотники за тайфунами», в которой описаны атмосферные вихри тысячекilометровых масштабов, приводящие к катастрофическим разрушениям.

Что же общего у всех этих явлений, которые можно отнести к понятию «вихрь»?

Прежде всего, это наличие оси  $x$ , вокруг которой происходит движение среды, причем вектор скорости имеет окружную (азимутальную) компоненту  $v_{\phi}$ , лежащую в плоскости,

перпендикулярной оси. А если есть и осевая компонента скорости  $v_x$ , то движение частиц, очевидно, будет спиральным. Далее, эта окружная компонента скорости убывает с расстоянием  $r$  от оси, стремясь к нулю на бесконечности (рис.1). И можно сказать еще точнее: она убывает обратно

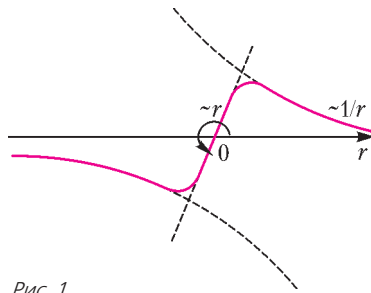


Рис. 1

пропорционально этому расстоянию:  $v_\phi \sim 1/r$ . Почему? Потому что вихрь характеризуется специальной величиной – *циркуляцией*. А она как раз и равна произведению окружной компоненты скорости среды на длину окружности  $2\pi r$ :

$$\Gamma = 2\pi r v_\phi. \quad (1)$$

Как же тут не вспомнить закон Био–Савара: индукция магнитного поля, порожденного бесконечно длинным прямым проводом с постоянным током  $I$ , убывает обратно пропорционально расстоянию  $r$  от этого тока:

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ или } I = 2\pi r \mu_0 B.$$

Выходит, можно сказать, что ток есть циркуляция магнитного поля!

Дальше – больше. Представим себе, что магнитное поле с индукцией  $B_x$ , направленное вдоль оси  $x$ , изменяется со временем с постоянной скоростью. Что говорит закон Фарадея? А то, что вокруг оси  $x$  возникает циркуляционное электрическое поле  $E_\phi$  такое, что  $2\pi r E_\phi$  пропорционально скорости изменения  $B_x$  со временем и площади  $\pi r^2$ . Но в этом случае, сократив на  $r$  обе части этого соотношения, получим

$$E_\phi \sim r. \quad (2)$$

(Заметим, что мы упорно сохраняем индекс  $\phi$ , подчеркивая, что рассматривается одна из компонент вектора  $\vec{r}$  цилиндрической системы координат.)

Именно введение понятий *циркуляции* и *потока* позволило Джеймсу Клерку Максвеллу завершить формулировку уравнений электромагнетизма. Как считает, например, Роберт Милликен, Максвелл «облек плебейски облаженные представления Фарадея в аристократические одежды математики».

Однако вернемся к нашим вихрям. Удивительно, но обе зависимости (1) и (2) характеризуют еще один интересный тип вихрей, который стал широко распространенным сотню лет назад. А именно, «отцом русской авиации» Николаем Егоровичем Жуковским было показано, что подъемная сила  $F_y$  крыла самолета с размахом  $l$  связана с циркуляцией скорости воздуха вокруг него:

$$F_y = \Gamma \rho v_\infty l$$

(здесь  $\rho$  – плотность воздуха). То, что за крылом должны возникать два вихря с противоположными значениями циркуляции (т.е. противоположными направлениями вращения воздуха), очевидно. Ведь подъемная сила создается за счет того, что крыло отбрасывает воздух вниз, создавая поток

импульса, равный весу летательного аппарата. А на место этого отброшенного вниз воздуха поступают сверху новые порции.

Но как устроены эти концевые вихри? Если принять зависимость (1), то с приближением к оси ( $r \rightarrow 0$ ) получим  $v_\phi \rightarrow \infty$ , что явно нелепо. Это недразумение разрешается, если мы вспомним о таком понятии, как вязкость воздуха. Ведь с уменьшением  $r$  разность скоростей двух соседних цилиндрических слоев воздуха возрастает (а в соотношении (1) мы ее никак не учитывали). Значит, возникнут силы, тормозящие вращение воздуха с приближением к оси. И, что вполне естественно, на оси скорость  $v_\phi$  будет равна нулю. Из законов гидродинамики следует, что  $v_\phi$  будет прямо пропорциональна радиусу, как и в соотношении (2).

На рисунке 1 качественно изображена эта зависимость окружной скорости воздуха в единичном спутном вихре самолета, а на рисунке 2 представлена суммарная скорость двух спутных вихрей в поперечном сечении на некотором расстоянии за самолетом.

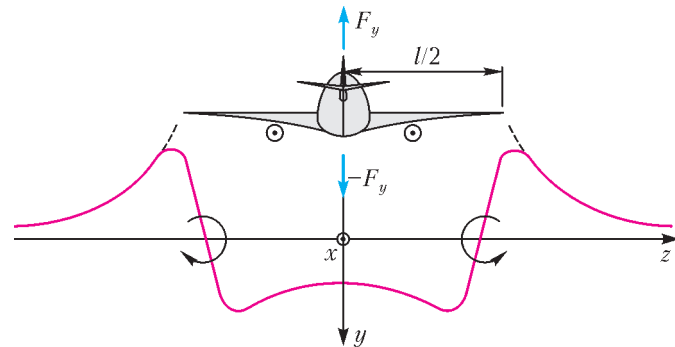


Рис. 2

Действительно, любопытный вихрь – внутри из-за вязкости воздуха он вращается как твердое тело и похож на результат (2), следующий из закона Фарадея, а с удалением становится так называемым *потенциальным* (безвязкостным) вихрем и напоминает результат (1). Причем эти вихри, необходимые для поддержания крылатого аппарата в воздухе, в окрестности аэродрома порой становятся враждебными: кружась над взлетно – посадочной полосой некоторое время, они создают угрозу другим (особенно малоразмерным) самолетам.

В заключение советуем проделать следующее: помешав в чашке (например, по часовой стрелке) черный кофе, добавьте туда каплю молока. И если вы увидите в образовавшейся картине аналог спиральной галактики, или торнадо, или тайфуна, вы можете смело поступать на факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (государственного университета), где вам сообщат о вихрях все остальное.

#### Что еще можно почитать о вихрях

1. П.-А.Молен. Охотники за тайфунами (М.: Мир, 1967).
2. В.Р.Дубенцов, М.А.Петросяни. Циклон (БСЭ, 1957, т.46).
3. А.Стасенко. Вихри над взлетной полосой («Квант», 1996, № 6).
4. А.Стасенко. Вихрь в тумане («Квант», 2001, №5).

# НОВЫЙ ВЗГЛЯД на теорему Штейнера – Лемуса

Л. ШТЕЙНГАРЦ

## Загадочная теорема о биссектрисах

В геометрии одной из самых загадочных теорем считается *теорема Штейнера – Лемуса*. Формулируется она следующим образом:

*Доказать, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то этот треугольник равнобедренный.*

Загадочность этой теоремы заключается в ее кажущейся простоте. Ведь совершенно нетрудно доказать, что в равнобедренном треугольнике две биссектрисы равны. Более того, аналогичные теоремы (как прямые, так и обратные) не представляют никаких особых проблем ни для медиан, ни для высот треугольника. Но вот с обратной теоремой для биссектрис дело обстоит намного сложнее.

### Упражнения

1. Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) биссектрисы; б) медианы; в) высоты, проведенные к боковым сторонам, равны.
2. Докажите, что если в треугольнике равны: а) две медианы; б) две высоты, то этот треугольник равнобедренный.

История обсуждаемой нами теоремы, скорее всего, началась в первой половине XIX века. В 1840 году немецкий математик Кристиан Людольф Лемус в письме своему французскому коллеге Шарлю Штурму упомянул этот вопрос и попросил его придумать чисто геометрическое доказательство. Штурм в то время уже был действительным членом Парижской академии наук, и через него задача стала известна многим ученым. Среди них был великий швейцарский геометр Якоб Штейнер. Он одним из первых доказал теорему, но его доказательство было сложным, и поэтому многие не оставляли попыток найти более простые методы. Сейчас известно несколько десятков различных доказательств теоремы Штейнера – Лемуса.

Несколько лет назад нам удалось придумать еще одно доказательство, которое мы и хотим предложить читателям. Это доказательство несколько похоже на то, которое имеется в книге Г.С.М.Кокстера и С.Л.Грейтцера «Новые встречи с геометрией». И все же оно – другое.

### Доказательство теоремы

Введем понятие, которое, на наш взгляд, заслуживает того, чтобы его ввели в школьную программу при изучении геометрии: назовем дугу, которая не больше полуокружности, *малой дугой*. Ясно, что градусная мера малой дуги не больше  $180^\circ$ . Также вполне очевидно, что две хорды равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие им малые дуги.

### Упражнения

3. Докажите, что из двух хорд одной окружности, большей является та, которой соответствует большая малая дуга.
4. Докажите, что из двух малых дуг большей является та, которой соответствует большая хорда.

Итак, предположим, что существует неравнобедренный треугольник  $ABC$ , у которого биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  равны (рис. 1). Введем обозначения:  $\angle A = 2\alpha$ ,  $\angle B = 2\beta$ . Допустим, для определенности, что угол  $A$  больше угла  $B$ , т.е.  $\alpha > \beta$ . Кроме того,  $2\alpha + 2\beta < 180^\circ$  (так как это сумма двух углов треугольника).

Проведем окружность через точки  $A$ ,  $B$  и  $A_1$ . При этом возможны три случая. Разберем каждый из них.

*Случай 1:* точка  $B_1$  оказалась на окружности (рис. 2).

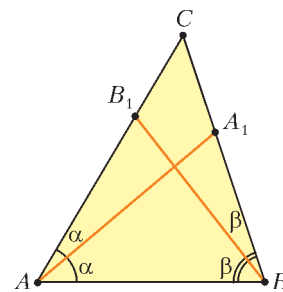


Рис. 1

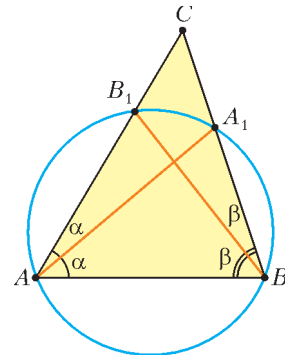


Рис. 2

Тогда  $\angle AA_1B = \angle AB_1B$  (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Но эти углы являются внешними для треугольников  $AA_1C$  и  $BB_1C$  соответственно. Из этого сразу следует, что  $\alpha = \beta$ .

*Случай 2:* точка  $B_1$  оказалась внутри окружности (рис. 3). При этом  $\cup EFA_1 > \cup Fm A_1$ . Следовательно,  $\angle EBA_1 > \angle FAA_1$ . Получается, что  $\beta > \alpha$ , а это противоречит нашему предположению.

*Случай 3:* точка  $B_1$  оказалась вне окружности (рис. 4). В этом случае хорда  $BE$  меньше хорды  $AA_1$ , так как, по условию, отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  равны. Имеем  $\cup EA_1B =$

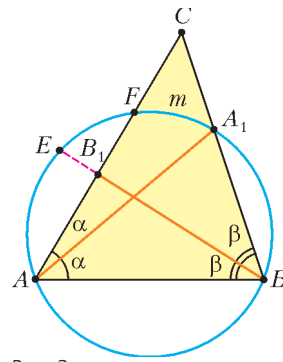


Рис. 3

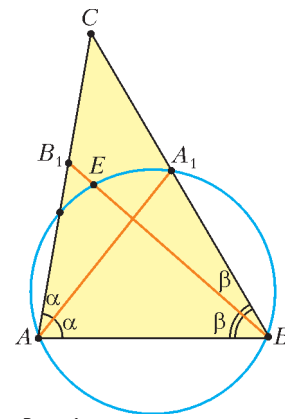


Рис. 4

$= \cup EA_1 + \cup A_1B = 2\beta + 2\alpha < 180^\circ$  и  $\cup AEA_1 = 4\beta < 2\beta + 2\alpha < 180^\circ$ . Значит, дуги  $EA_1B$  и  $AEA_1$  – малые. Теперь (так как хорда  $BE$  меньше хорды  $AA_1$ ) мы можем заключить, что дуга  $EA_1B$  меньше дуги  $AEA_1$ . Таким образом,  $2\beta + 2\alpha < 4\beta$ . А это снова противоречит тому, что  $\alpha > \beta$ .

Следовательно, треугольник  $ABC$  – непременно равнобедренный, и теорема Штейнера – Лемуса доказана.

### ОТ РЕДАКЦИИ

Теореме Штейнера – Лемуса уже более полутора веков. За это время накопилось много разных ее доказательств, и, как мы видим, регулярно появляются новые. В начале 60-х годов XX века Мартин Гарднер написал про эту теорему в своей колонке в «Scientific American» и получил после этого

множество откликов от читателей. Многие предлагали свои собственные доказательства, и среди них было немало оригинальных. «Квант» уже рассказывал об этой теореме в статье А.Коробова «Семь решений задачи Штейнера» («Квант» №4 за 1996 г.). Ниже мы приводим еще четыре доказательства теоремы Штейнера – Лемуса. Первое принадлежит самому Штейнеру и было опубликовано в 1844 году. Второе доказательство Гарднер выбрал как самое изящное из присланных ему читателями. Его авторы – Г.Гилберт и Д.Макдональд. Позже выяснилось, что Лемус придумал этот же способ, но лишь через десять лет после его письма Штурму, с которого началась вся история. Третье и четвертое доказательства – алгебраические.

Отметим также, что в посвященной этой же теореме статье Дж. Макбрайда «The equal internal bisectors theorem, 1840–1940... Many solutions or none? A centenary account» описана столетняя (на тот момент) история этой задачи и дана подборка доказательств.

#### Доказательство Штейнера

Штейнер доказывал, что треугольник будет равнобедренным, если в нем равны две биссектрисы при тупых внешних углах.

Пусть в треугольнике  $ABC$  равны внешние биссектрисы  $BY$  и  $CZ$  при стороне  $BC$ , а  $E$  – центр вневписанной окружности (рис.5). Введем обозначения:  $\angle CBE = \alpha$ ,  $\angle BCE = \beta$  и предположим, что  $\alpha > \beta$ . Тогда  $CE > BE$ . Если

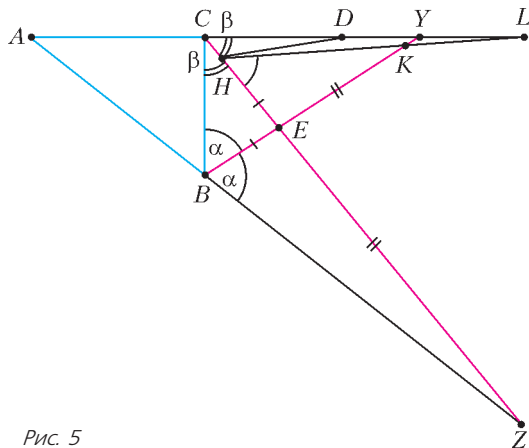


Рис. 5

отметить точки  $H$  и  $K$  так, чтобы выполнялись равенства  $EH = EB$  и  $EK = EZ$ , то отрезки  $HC$  и  $KY$  будут равны. Из равенства треугольников  $BEZ$  и  $HEK$  получим, что  $\angle ZHK = \alpha$ . Значит, если  $L$  – точка пересечения лучей  $CY$  и  $HK$ , то  $\angle CLH = \alpha - \beta$ . В равнобедренном треугольнике  $BEH$  угол при основании равен  $\frac{\alpha + \beta}{2}$ , откуда  $\angle CBH = \angle CBH = \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} \angle CLH$ .

Угол  $YBZ$  – внешний для треугольника  $ABY$ , поэтому  $\angle BYA < \angle YBZ = \alpha = \angle CBY$ , т.е.  $BC < CY$ . Поэтому на отрезке  $CY$  найдется такая точка  $D$ , что  $CB = CD$ . Тогда треугольники  $CBH$  и  $CDH$  равны, а значит,  $\angle CDH = \angle CBH = \frac{1}{2} \angle CLH$ . Получилось, что внешний угол треугольника  $HDL$  меньше внутреннего не смежного с ним угла. А это, очевидно, противоречие. Значит,  $\alpha = \beta$ , т.е.  $\angle ABC = \angle ACB$  и треугольник  $ABC$  равнобедренный. Что и требовалось доказать.

В этом доказательстве существенно, что оба внешних угла, биссектрисы которых равны, тупые. Если один из

них острый, то рассуждения Штейнера уже не работают. В следующем упражнении приведен пример такой ситуации.

**Упражнение 5.** В треугольнике  $ABC$  с углами  $\angle B = 12^\circ$  и  $\angle C = 132^\circ$  проведены внешние биссектрисы  $BM$  и  $CN$  этих углов (точка  $M$  лежит на прямой  $AC$ , точка  $N$  – на прямой  $AB$ ). Докажите (желательно без использования тригонометрии!), что  $BM = CN$ .

#### Доказательство Гилберта – Макдональда (и Лемуса)

Пусть в треугольнике  $ABC$  равны биссектрисы  $BM$  и  $CN$  (рис. 6). Пусть углы  $B$  и  $C$  не равны. Значит, один из них,

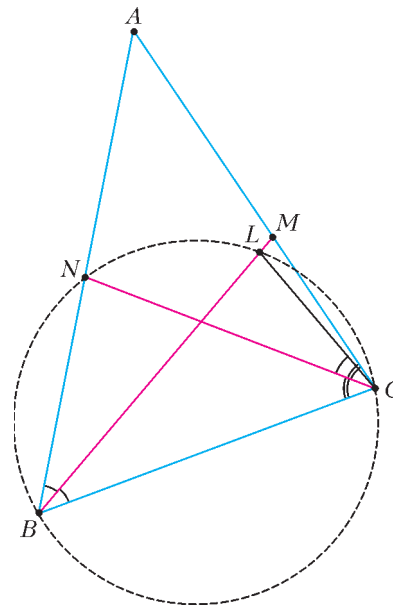


Рис. 6

скажем угол  $C$ , больше другого. Возьмем на  $BM$  точку  $L$ , чтобы угол  $BCL$  был равен половине угла  $B$ . Тогда точки  $B$ ,  $C$ ,  $L$  и  $N$  лежат на одной окружности. С одной стороны, верны неравенства  $\angle CBN < \angle BCL < 90^\circ$ . С другой стороны,  $BL < BM = CN$ , и угол  $BCL$  должен быть меньше угла  $CBN$ , так как он опирается на меньшую хорду. Противоречие.

#### Алгебраические доказательства

Представляем их в виде серии несложных упражнений. Для первого доказательства нужна формула из упражнения 8, для второго – формула из упражнения 9. Ниже  $AL$  – биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$ .

##### Упражнения

- Докажите, что  $\frac{BL}{CL} = \frac{BA}{CA}$ .
- Докажите, что  $AL^2 = AB \cdot AC - LB \cdot LC$ .
- Докажите, что

$$AL^2 = AB \cdot AC \cdot \left( 1 - \left( \frac{BC}{AB + AC} \right)^2 \right)$$

и выведите отсюда теорему Штейнера – Лемуса.

- Докажите, что  $AL = \frac{2AB \cdot AC}{AB + AC} \cos \frac{\angle BAC}{2}$  и выведите отсюда теорему Штейнера – Лемуса.

# Почему радуги бывают разными

*С.ВАРЛАМОВ*

Конечно, каждый читатель не раз видел на небе радугу. Лучше всего заметна самая яркая, так называемая первая радуга. Она видна в направлениях, составляющих угол  $42^\circ$  с линией, проходящей через центр солнца и глаз наблюдателя. При этом солнце расположено за спиной наблюдателя. Значительно менее яркая радуга видна в направлениях, составляющих угол  $51^\circ$  с той же линией. Порядки расположения цветов в этих двух радугах разные. Внутренняя часть (с меньшими углами) первой радуги фиолетово-синяя, а внешняя красная. У второй радуги – наоборот, внутренняя часть красная, а внешняя фиолетовая. Иногда кроме этих двух радуг видны еще и многочисленные дополнительные светлые дуги, расположенные внутри самой яркой первой радуги. Они есть и вне второй радуги, но их яркость очень мала.

Как возникает радуга? Почему не всегда видны дополнительные дуги? Попробуем ответить на эти вопросы.

Когда и как бы радуга ни возникла, она всегда образуется игрой света на каплях воды. Обычно это дождевые капли, изредка – мелкие капли тумана. Взаимодействие параллельного пучка солнечного света и круглой дождевой капли приводит к тому, что свет преломляется, отражается и очень



слабо поглощается каплей. Используемые в этой фразе термины понятны и школьникам, закончившим восьмой класс и знающим только о геометрической оптике, и старшеклассникам, знакомым с волновой природой света.

В геометрической оптике рассматриваются три главных закона, которые описывают поведение лучей света. Это закон прямолинейного распространения света в однородной среде и законы отражения и преломления света на границе раздела двух сред. Закон отражения света в упрощенной форме формулируется так: угол падения луча равен углу отражения. А закон преломления лучей света на границе раздела утверждает, что отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скорости света в первой среде (из которой свет падает на границу раздела) к скорости света во второй среде (находящейся за границей раздела). Или, иными словами, отношение синусов углов падения и преломления равно относительному показателю преломления второй и первой сред.

Если пользоваться только законами геометрической оптики, то можно показать, что лучи света, прошедшие внутри капли, отразившись внутри нее один или два раза и затем вышедшие наружу, собираются (группируются, или концентрируются) вблизи направлений, которые как раз соответствуют первой и второй радугам (рисунки 1 и 2 соответственно). (Можно аналогично найти направление для третьей и последующих радуг, но, поскольку они настолько слабы, что никогда не наблюдаются на фоне ярких первых двух радуг, мы их рассматривать не будем – в прямом и в переносном смысле!) Условия концентрации по некоторым направлениям в пространстве лучей, вышедших из капли, соответствуют экстремумам в зависимости угла поворота луча – будем обозначать его как  $180^\circ - \varphi$  – от так называемого прицельного угла падения  $\alpha$ . Для первой радуги  $\varphi = 42^\circ$ , а для второй радуги  $\varphi = 51^\circ$ . В случае света разных цветов (длин волн) соответствующие углы поворота немного отличаются, так как каждой длине волны света (цвету) соответствует свой коэффициент преломления  $n$ . Связь между углом падения  $\alpha$ , углом преломления  $\beta$  и углом  $\varphi$  для одного отражения света внутри капли такова:  $\varphi = 4\beta - 2\alpha$ . Для двух отражений луча света внутри капли:  $\varphi = 180^\circ - 2\alpha + 6\beta$ . По закону преломления,  $\sin \alpha / \sin \beta = n$ . У воды коэффициент преломления для всех длин волн видимого света близок к величине  $n = 4/3$ .

Графики зависимости углов  $\varphi$  от углов  $\alpha$  (в градусах) показаны на рисунке 3. Видно, что экстремумы приходятся как раз на значения углов  $\varphi = 42^\circ$  и  $\varphi = 51^\circ$ . Поскольку разным цветам соответствуют разные коэффициенты преломления  $n$  – это свойство среды называется дисперсией, – направления в пространстве, вблизи которых концентрируются лучи света, для разных длин волн не совпадают, и мы видим радугу цветной. Например, первая яркая радуга имеет угловой «размах» около  $3,5^\circ$ . Из рисунка 3 видно, что для одного отражения внутри капли экстремум это максимум, а для двух отражений внутри капли – минимум, поэтому понятно, почему порядки цветов в первой и второй радугах ( $42^\circ$  и  $51^\circ$ ) противоположные.

Любопытно, что если бы космонавт оказался на орбите Меркурия и устроил внутри космической станции туман из водяных капелек, то он увидел бы вовсе не такие радуги, к которым мы привыкли. Для него и первая, и вторая радуги солнечных лучей представлялись бы белыми! И только края этих радуг были бы слегка окрашены. Это связано с тем, что угловой размер Солнца для наблюдателей на Земле гораздо меньше угловой ширины радуг и составляет около  $0,5^\circ$ , а для наблюдателя, находящегося на таком же расстоянии от



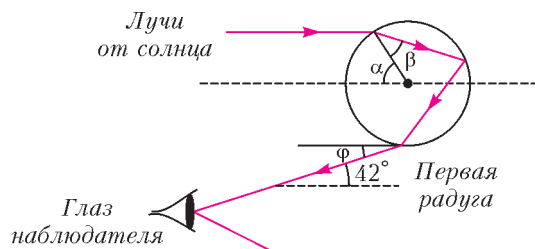


Рис. 1

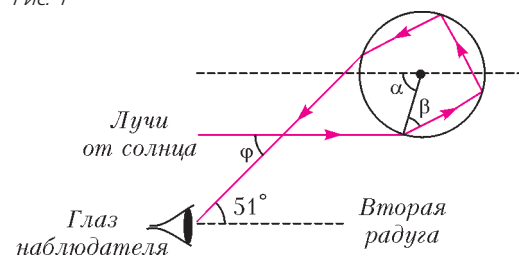


Рис. 2

Солнца, как Меркурий, угловой размер Солнца примерно в 2,5 раза больше.

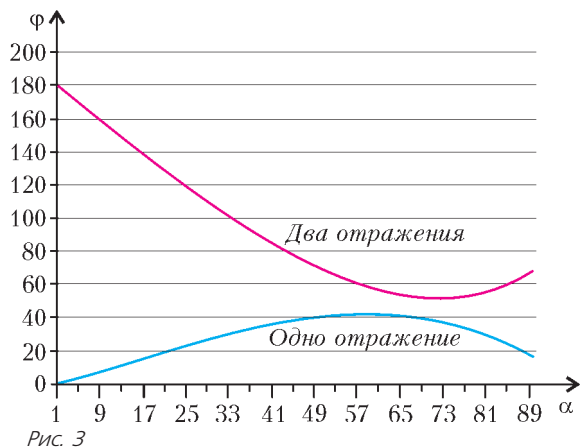


Рис. 3

Однако и в земных условиях тоже можно увидеть белую радугу. Фотография, приведенная на рисунке 4, сделана из окна каюты корабля в тумане. Слой тумана обеспечил существенное угловое расширение источника света – солнце сквозь туман выглядело отнюдь не маленьким светящимся диском с четкими краями, а большим белым пятном. Если внимательно присмотреться к фотографии, то можно отметить, что верхний край белой радуги имеет красноватый оттенок, а нижний – фиолетовый. Еще одна красивая фотография белой радуги приведена на рисунке 5.

Но вот для того чтобы объяснить, почему первая и вторая радуги получаются разными по яркости, законов геометрической оптики оказывается недостаточно. На любой границе раздела энергия  $E_{отр}$  отраженного света и энергия  $E_{прош}$  света, прошедшего через границу, в сумме равны энергии  $E_{пад}$  падающего света. Пропорции между энергиями прошедшего и отраженного света определяются относительным показателем преломления сред по разные стороны от грани-

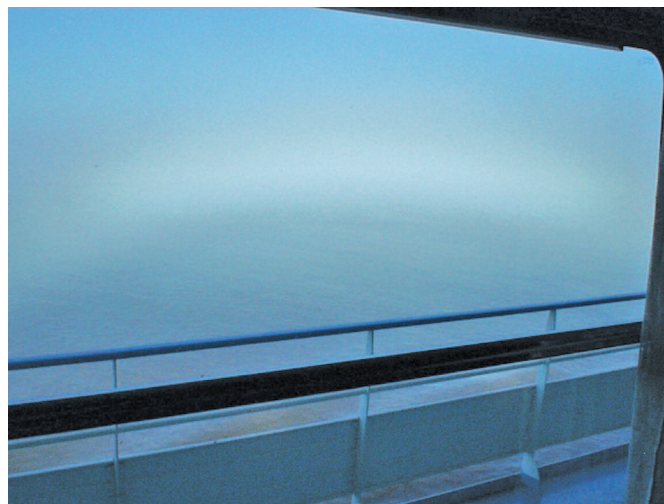


Рис. 4

цы, углом падения на границу, а также поляризацией падающего света (кстати, именно поэтому свет радуги сильно поляризован). Формулы для расчета отношений  $E_{отр}/E_{пад}$  и  $E_{прош}/E_{пад}$  вывел еще в начале XIX века Огюстен Френель, и заинтересовавшиеся читатели могут отыскать их,



Рис. 5

например, в учебниках по оптике для студентов. Так, при перпендикулярном ( $\alpha = 0$ ) падении света на границу раздела сред с относительным показателем преломления  $n$  долю энергии отраженного света можно вычислить с помощью такой формулы:

$$\frac{E_{отр}}{E_{пад}} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}.$$

Поскольку свет, образующий первую радугу, отразился внутри капли только один раз, а свет, образующий вторую радугу, отразился внутри капли два раза, то приближенно можно оценить отношение яркостей (интенсивностей света) этих радуг так:

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{(n+1)^2}{(n-1)^2} = 49.$$

На самом деле это отношение несколько меньше, так как внутренние отражения для больших углов падения характеризуются и большим коэффициентом отражения.

Но откуда берутся дополнительные радуги? Если какому-то направлению рассеяния солнечного света соответствует экстремум функции распределения по углам для одной

капли, то и всем каплям такого же размера соответствует аналогичное направление концентрации энергии рассеянного света. При этом направления, расположенным рядом с экстремальным, отвечают два разных пути лучей света внутри капли. Им соответствуют разные углы падения на каплю и, естественно, немного отличающиеся длины этих путей. Если разность длин таких путей для выбранного направления пропорциональна целому числу волн света с длиной волны  $\lambda$ , или четному числу полувольт, то в этом направлении наблюдается максимум интенсивности света на этой длине волны. Если же разность длин путей пропорциональна нечетному числу полувольт, то в таком направлении наблюдается минимум интенсивности света на этой же длине волны. Самому экстремальному направлению, конечно же, соответствуют почти одинаковые оптические длины путей для разных углов падения вблизи максимума. Такое перераспределение энергии светового потока по разным направлениям называется интерференцией. Заметной в природе интерференция становится только в том случае, если размеры всех дождевых капель, во-первых, очень близки друг к другу, а во-вторых, настолько малы, что выполняется так называемое дифракционное соотношение: отношение длины волны света  $\lambda$  к диаметру капли  $D$  больше углового размера радуги. Для крупных капель, с диаметром больше 1 мм, увидеть в природе дополнительные радуги нельзя, а для малых капель – можно. Оказывается, что если размеры капель малы, то рассчитать явление без учета дифракции света, т.е. нарушения прямолинейности распространения, связанного с волновой природой света, невозможно. (Отсюда возникает «вилка» в терминологии: некоторые называют дополнительные радуги дифракционными, а некоторые – интерференционными.)

А можно ли наблюдать явления, аналогичные возникновению дополнительных радуг, в домашних условиях? Можно. Для этого, во-первых, нужно создать условия для рассеяния света не в пространственный конус, как это имеет место в каплях, а только в некоторых направлениях. Это возможно, если вместо круглых капель использовать почти цилиндрическую струю воды. Во-вторых, нужен источник света, который характеризуется значительно меньшими, чем Солнце, угловыми размерами. И в-третьих, этот источник должен создавать свет, близкий по свойствам к монохроматическому. Таким источником может быть, например, лазер. Сейчас доступны лазеры с разными длинами волн.

Приведем описание экспериментов, проведенных автором статьи в домашних условиях.

При одном и том же расположении лазеров разных цветов – красного с длиной волны  $\lambda = 630\text{--}650$  нм, зеленого с  $\lambda = 532 \pm 10$  нм и синего с  $\lambda = 405$  нм (это – надписи на этикетках, наклеенных на корпусах лазеров) – на стене ванной комнаты были получены картинка (рис.6), соответствующие «радуге» первого порядка ( $42^\circ$ ) от тонкой струи воды (диаметром  $d \approx 1$  мм). Причем во всех трех случаях струя сохраняла свои параметры, т.е. вода текла из крана непрерывно и равномерно и настройка крана при смене лазеров не менялась. На фотографиях видно, что положения главных максимумов для разных цветов отличаются, но максимумы располагаются все-таки близко друг к другу.

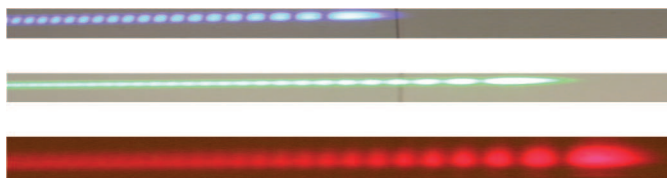


Рис. 6

Расстояние от струи до стены составляло 150 см, а смещение главного красного пятна по отношению к главному синему пятну оказалось равным 5 см. Это соответствует разнице углов отклонения лучей для синего и красного цветов примерно  $1,9^\circ$ . Такое отличие углов обусловлено дисперсией света в воде. А вот расстояния между минимумами картинок, отсчитываемыми от главного максимума, отличаются в количестве раз, соответствующее длинам волн. Для синего цвета угловое расстояние между соответствующими минимумами меньше аналогичного углового расстояния для красного цвета примерно в 1,4 раза ( $630 \text{ нм} / 405 \text{ нм} = 1,55$ ), а для красного и зеленого цветов это отношение равно примерно 1,2 ( $630 \text{ нм} / 532 \text{ нм} = 1,18$ ). Если пустить из крана более толстую струю воды, то при тех же расположениях главных максимумов разных цветов расстояния между соответствующими дополнительными максимумами и минимумами уменьшаются.

Добиться устойчивого течения струи с диаметром меньше 1 мм, к сожалению, не удастся, поэтому получить дифракционные или интерференционные радуги на струе воды с белым светом не получится. Это связано с тем, что полученные в эксперименте расстояния между дополнительными минимумами и максимумами для всех длин волн значительно меньше  $3^\circ$  – ширины первой радуги.

На водяных каплях в облаках это возможно, если все капли имеют одинаковые размеры, значительно меньшие 0,1 мм. Тогда угловые промежутки между соседними максимумами малых порядков (1–10) могут достигать 2–3 градусов, и поэтому первые несколько дополнительных радуг, расположенных в непосредственной близости от основной радуги, еще различаются как отдельные. Дело в том, что наиболее ярким воспринимается глазом желтый участок спектра излучения солнца. Именно этим длинам волн и соответствуют максимумы интенсивности света в дополнительных (дифракционных/интерференционных) радугах.

Когда угловое расстояние между соседними дополнительными радугами становится меньше  $0,5^\circ$ , их в принципе невозможно различить, так как угловой размер Солнца как раз равен этой величине. Угловое расхождение монохроматических лучей света лазера намного меньше  $0,5^\circ$ , поэтому можно увидеть множество максимумов разных порядков дифракции, возникающих при рассеянии света на тонкой струе воды.

В каждой «вложенной» в основную радугу ( $42^\circ$ ) дополнительной радуге угловое расположение цветов определяется двумя факторами, «действующими» в противоположных «направлениях», – рефракционным и дифракционным. При этом рефракционный поворот лучей *не зависит* от номера порядка дифракции, а дифракционный поворот *зависит*. Вот почему в дифракционных радугах цвета не разложены так же отчетливо, как в основной радуге. С увеличением номера светлые дуги разных цветов и разных порядков дифракции накрывают друг друга, и различить их уже невозможно – они вместе образуют светлый фон неба внутри основной радуги.

А теперь – из области фантастики. Вот если бы Солнце светило монохроматическим светом, то было бы заметно гораздо больше дифракционных радуг, вложенных в основную радугу, так как каждая из них имела бы угловой размер, равный угловому размеру Солнца. И насколько величайшей выглядела бы радуга, если бы Солнце, в дополнение к монохроматичности света, характеризовалось еще и очень маленьким угловым размером, а все капельки воды в облаке были бы совершенно одинаковых размеров. Такое можно себе только представить: на небе было бы несколько десятков одноцветных дуг!

# Две фальшивые МОНЕТЫ

К.КНОП

**С**ЮЖЕТ О НАХОЖДЕНИИ ФАЛЬШИВОЙ МОНЕТЫ ПРИ помощи двухчашечных (рычажных) весов давно уже стал классикой математических кружков. Задачу об отыскании одной легкой фальшивой монеты из девяти за два взвешивания (а из 27 монет – за три) обычно предлагают школьникам еще на первом году занятий кружка. Мы будем называть эту задачу и ее обобщения просто «классической».

Однако минимальные отклонения от этого сюжета приводят уже к более трудным задачам. Так, определение фальшивой монеты, которая может быть как легче, так и тяжелее настоящих, было темой статьи Г.Шестопада в «Кванте» №10 за 1979 год. А сюжету об определении двух одинаковых (более легких, чем настоящие) фальшивых монет повезло сильно меньше. А ведь он намного интереснее классического, а возникающие в нем подзадачи – еще менее тривиальны.

## Что нам пригодится из классики

Есть  $N$  монет, о которых заранее известно, что ровно одна из них (неизвестно, какая именно) – фальшивая (ФМ), на вид неотличимая от настоящих (НМ), но более легкая. Пусть также имеется алгоритм взвешиваний, позволяющий гарантированно найти эту фальшивую монету за некоторое количество взвешиваний на рычажных весах. Обозначим это количество взвешиваний  $f_1(N)$  (специалисты по информатике называют эту величину «временной сложностью алгоритма в худшем случае»).

**Теорема 1.** Для любого алгоритма взвешиваний  $f_1(N) \geq \lceil \log_3 N \rceil$ . Для всех натуральных  $N$  существует алгоритм с  $f_1(N) = \lceil \log_3 N \rceil$ . (Такие скобки означают округление вверх до ближайшего целого числа, т.е.  $k = f_1(N)$  – наименьшее натуральное число, для которого  $3^k \geq N$ .)

*Замечание.* Алгоритмы, для которых достигается такое равенство, будем называть оптимальными.

**Доказательство.** Для доказательства существования оптимальных алгоритмов мы просто построим один из них. А вот неравенство следует из оценки, которую принято называть *информационной границей*. Расшифруем это понятие.

Поскольку мы априори предполагаем, что мы умеем различать монеты (в частности, при втором и последующих взвешиваниях понимаем, какие именно из монет как использовались в предыдущих взвешиваниях), то можно полагать все  $N$  монет перенумерованными и считать, что нашей целью является определение номера фальшивой монеты – натурального числа от 1 до  $N$ . Каждый из возможных вариантов выбора фальшивой монеты мы будем называть *случаем*.

Пусть мы как-то проделали  $k$  взвешиваний (причем при разных исходах первого, второго и т.д. взвешиваний могли по-разному выбирать монеты для следующих взвешиваний). Запишем результаты для *этого случая* в виде строчки из  $k$  символов  $<, =, >$  следующим образом: если в результате взвешивания левая чаша весов оказалась легче правой, пишем  $<$ , если правая оказалась легче левой, то пишем  $>$ , а если чаши весов оказались в равновесии, пишем  $=$ . Далее, если по результатам взвешиваний мы установили номер

фальшивой монеты, то впишем его в конец строчки (если ФМ удалось определить быстрее, чем за  $k$  взвешиваний, то последние знаки в строчке можно дописать произвольно). Потом аналогично обработаем все остальные *случаи*. Таким образом, получим табличку из строчек длины  $k$ , в конце некоторых из которых стоят номера. Из того, что ФМ гарантированно (т.е. во всех *случаях*) определена, следует, что в этой табличке встретились все номера от 1 до  $N$  (некоторые, возможно, не один раз). Но это автоматически означает, что  $N$  не больше, чем максимально возможное количество *случаев*, т.е. число всех возможных строчек для такой таблицы. Подсчет этого числа – стандартная комбинаторная задача: на каждой позиции выбран один из трех символов, поэтому количество строчек длины  $k$  равно  $3^k$ . Итого имеем оценку  $3^k \geq N$ , которая и называется *информационной границей*, потому что определяет нижнюю границу числа взвешиваний именно исходя из имеющейся информации об их результатах.

Теперь разберемся с *оптимальным алгоритмом взвешиваний*. Мы должны убедиться, что при  $3^{k-1} < N \leq 3^k$  алгоритму достаточно  $k$  взвешиваний для определения ФМ.

*База индукции:*  $1 < N \leq 3$ , одно взвешивание. Поскольку  $1 < N$ , то хотя бы две монеты у нас есть. Сравним их. Если одна из них легче, то она и является фальшивой. Если же монеты равны по весу, то обе они настоящие. При  $N = 2$  так быть не может (в условии сказано, что ФМ точно есть), а при  $N = 3$ , очевидно, фальшивой является третья монета.

*Индукционный переход.* Пусть  $3^{k-1} < N \leq 3^k$ . Разделим  $N$  монет на три непересекающихся множества – группы из  $\lceil N/3 \rceil$ ,  $\lceil N/3 \rceil$  и  $N - 2\lceil N/3 \rceil$  монет. Взвесим первые две группы. Если одна легче, то ФМ находится в ней, и поскольку  $3^{k-2} < \lceil N/3 \rceil \leq 3^{k-1}$ , то по предположению индукции для нахождения ФМ (среди монет этой группы) достаточно  $k - 1$  взвешиваний. Если же эти две группы равны по весу, то ФМ находится в третьей группе, а там тоже не более  $3^{k-1}$  монет, и можно применить предположение индукции.

## Две фальшивые монеты – первый взгляд

Итак, возвращаемся к поиску двух ФМ. Пусть у нас есть множество из  $N$  монет, в котором ровно две ФМ, весящие одинаково, легче настоящих.<sup>1</sup> Мы хотим найти алгоритм, который гарантированно определит обе ФМ за  $f_2(N)$  взвешиваний, и попытаемся сделать  $f_2(N)$  как можно меньшим.

Сначала разберемся с информационной границей для этой задачи. Всего имеется  $\frac{N(N-1)}{2}$  вариантов выбора пары ФМ. Как и в оценке для  $f_1(N)$ , каждый вариант должен быть поставлен в соответствие какой-то строчке длины  $k$ ,

откуда имеем оценку  $3^k \geq \frac{N(N-1)}{2}$ , или, логарифмируя по основанию 3, для любого алгоритма взвешиваний получаем

$f_2(N) \geq \left\lceil \log_3 \frac{N(N-1)}{2} \right\rceil$ . Разумеется, эта граница не дает

ответа на вопрос о существовании оптимального алгоритма для конкретного  $N$  (т.е. такого, который находит обе ФМ не

более чем за  $k(N) = \left\lceil \log_3 \frac{N(N-1)}{2} \right\rceil$  взвешиваний).

<sup>1</sup> Для точности следует добавить, что две фальшивые монеты весят больше, чем одна настоящая. Это условие нужно для того, чтобы не имело смысла класть на чаши весов неравное число монет – чаша с большим количеством монет при этом будет тяжелее всегда, независимо от того, на какой из чаш лежат фальшивые монеты.

**Упражнения**

1. Чему равны информационные границы  $k(3)$  и  $k(4)$ ? Придумайте оптимальные алгоритмы для  $N = 3$  и  $N = 4$ .

2. Убедитесь, что  $k(5) = k(6) = 3$ . Придумайте оптимальный алгоритм для  $N = 6$ . Как из него получить оптимальный алгоритм для  $N = 5$ ?

**Т-алгоритм.** Пусть мы знаем оптимальный алгоритм для  $N_1 = (N + 1)/2$  монет. Рассмотрим следующий Т-алгоритм<sup>2</sup> для  $N$  монет: кладем  $N_1 - 1$  монет на левую чашу весов, другие  $N_1 - 1$  – на правую, а еще одну монету откладываем. Если одна из чаш тяжелее, то все монеты на ней настоящие, и нам осталось отыскать две ФМ из остальных  $N_1$  нашим оптимальным алгоритмом за  $k(N_1)$  взвешиваний. Если же чаши равны по весу, то на каждой чаше лежит одна ФМ (а отложенная монета настоящая), и обе ФМ можно найти последовательно (сначала одну – определив ее среди монет левой чаши, потом другую – среди монет правой чаши). На это будет затрачено  $2f_1(N_1 - 1)$  взвешиваний. Итого Т-алгоритм требует  $1 + \max(2f_1(N_1 - 1), k(N_1))$  взвешиваний.

**Упражнения**

3. Докажите, что Т-алгоритм оптимален для  $N = 7$  и  $N = 15$ .

4. Докажите, что Т-алгоритм неоптимален для  $N = 9$  и  $N = 11$ .

**Поиск: последовательно или параллельно?**

Присмотримся внимательнее к  $N = 9$ . Т-алгоритм справлялся за  $k(9) = 4$  взвешивания, если в первом взвешивании одна из чаш оказывалась легче другой. Однако после равновесия последовательное обнаружение двух фальшивых монет (одной – среди четырех монет левой чаши, другой – из монет правой чаши) требовало еще  $2 + 2 = 4$  взвешивания, и в этом случае Т-алгоритм тратил 5 взвешиваний.

Но ведь пара ФМ из двух четверок монет может быть выбрана всего лишь  $4 \times 4 = 16$  способами, и  $16 < 3^3$ . Ясно, что последовательное нахождение ФМ не всегда оптимально, и хочется отыскать алгоритм, который обе этих монеты выявит не более чем за 3 взвешивания. Очевидно, для этого нужно определять обе ФМ как-то иначе – «параллельно», а не последовательно.

Именно к «параллельным» задачам мы сейчас и перейдем. Пусть известно, что ФМ уже разделены: одна находится во множестве **Au**, будем называть монеты этого множества «золотыми», а вторая – во множестве **Ag** «серебряных» монет. Пусть в множестве **Au** –  $G$  монет, а в множестве **Ag** –  $S$ :  $|\mathbf{Au}| = G$ ,  $|\mathbf{Ag}| = S$ . Обозначим через  $g_2(G, S)$  то количество взвешиваний, которое требуется алгоритму для нахождения обеих ФМ. Мы понимаем, что их можно искать последовательно, при этом  $g_2(G, S) = f_1(G) + f_1(S)$ . Кроме этого, для этой задачи мы также можем доказать информационную оценку:  $g_2(G, S) \geq \lceil \log_3 GS \rceil$ .

**Упражнения**

5. Докажите, что  $f_1(G) + f_1(S)$  и  $\lceil \log_3 GS \rceil$  отличаются не более чем на 1. (Иначе говоря, параллельный поиск выигрывает у последовательного не более чем одно взвешивание.)

6. Докажите, что неравенство  $f_1(G) + f_1(S) \geq \lceil \log_3 GS \rceil$  обращается в равенство если и только если  $G$  и  $S$  – степени тройки.

**Задача 1.** Даны 2 золотые монеты и 4 серебряные. Как найти обе ФМ за 2 взвешивания? Иначе говоря, придумайте алгоритм, для которого  $g_2(2, 4) = 2$ .

**Решение.** Обозначим золотые монеты цифрами 1 и 2, а серебряные – буквами A–D. Если первым взвешиванием положить на чаши весов по одной золотой, или по одной

серебряной, или по две серебряные монеты, то какому-то из исходов взвешиваний будет соответствовать четыре случая. А так как  $4 > 3^1$ , то за оставшееся одно взвешивание мы не справимся. Поэтому первым взвешиванием положим на каждую чашу весов по одной золотой и одной серебряной монете. Такое взвешивание будем обозначать  $1A \vee 2B$ , где слева от знака  $\vee$  перечислены монеты с левой чаши весов, а справа – монеты с правой чаши<sup>3</sup> (все остальные монеты отложены, т.е. во взвешивании не участвуют).

1.  $1A > 2B$ . Тогда фальшивой является монета 2 и одна из монет B, C, D. Поскольку подозрительных монет 3, а ФМ из них ровно одна, то перед нами классическая задача, решаемая за одно взвешивание.

2.  $1A < 2B$ . Аналогично случаю 1. Фальшивой является монета 1 и одна из монет A, C, D.

3.  $1A = 2B$ . Здесь либо фальшивы монеты 1 и B, либо 2 и A. Видим, что золотые монеты 1 и 2 «разделены»: каждая соответствует своей серебряной. Следовательно, сравнив 1 с 2, мы определим и золотую, и серебряную ФМ.

**Задача 2.** Придумайте алгоритм, для которого  $g_2(2, 13) = 3$ .

**Решение.** Обозначим золотые монеты цифрами 1 и 2, а серебряные – буквами A–M. Первым взвешиванием положим на каждую чашу весов по 1 золотой монете и по 4 серебряных. Иначе говоря, делаем взвешивание  $1ABCD \vee 2EFGH$ .

1.  $1ABCD > 2EFGH$ . Фальшивой является монета 2 и одна из монет E–M. Поскольку подозрительных монет осталось ровно 9, а ФМ из них ровно одна, то перед нами классическая задача, которую мы умеем решать за два оставшихся взвешивания.

2.  $1ABCD < 2EFGH$ . Аналогично и симметрично п.1: фальшива монета 1 и одна из девяти монет A–D, I–M.

3.  $1ABCD = 2EFGH$ . Здесь либо фальшива монета 1 и одна из монет E–H, либо монета 2 и одна из монет A–D. Мы видим, что золотые монеты 1 и 2 снова разделены: каждой соответствует свое подмножество серебряных. Найдя за два оставшихся взвешивания фальшивую среди 8 серебряных монет A–H, мы тем самым определим и золотую ФМ.

*Замечание об обозначениях.* В дальнейшем мы будем обозначать  $\Phi$  множество пар монет, которые могут быть фальшивыми (в текущий момент алгоритма).

**Анализ решения.** Прежде всего следует отметить, что в задаче 2 имелось  $2 \times 13 = 26$  вариантов выбора пары ФМ. Следовательно, информационная граница равна 3, а это значит, что приведенный алгоритм является оптимальным.

Следующий важнейший вопрос: как понять, сколько именно золотых и серебряных монет должно лежать на весах в первом взвешивании? Оказывается, здесь работают не догадки, а аккуратный расчет.

Пусть мы кладем на каждую чашу по  $x$  золотых ( $x = 0$  или  $x = 1$ ) и  $y$  серебряных монет ( $y = 0, 1, \dots, 6$ ). Тогда каждому из исходов «>» и «<» соответствует  $Q = xy + x(13 - 2y) + y(2 - 2x)$  вариантов, а исходу «=» соответствуют  $26 - 2Q$  вариантов. Поскольку дальше задача должна быть разрешимой за два оставшихся взвешивания, то информационная граница требует выполнения неравенств  $Q \leq 9$  и  $26 - 2Q \leq 9$ . Из второго неравенства  $2Q \geq 17$ , т.е.  $Q \geq 9$ . Значит,  $Q = 9$ . Решим теперь уравнение  $xy + x(13 - 2y) + y(2 - 2x) = 9$ . Заметим, что при  $x = 0$  оно сводится к  $2y = 9$ , а это невозможно, так как  $y$  должно быть целым числом. Следовательно,  $x = 1$ . Тогда  $y + (13 - 2y) = 9$ , откуда  $y = 4$ .

<sup>2</sup> Здесь Т – от слова «тривиальный»

<sup>3</sup> Автор отдает себе отчет в том, что такая запись не является строгой – следовало бы писать вместо  $1A$  что-нибудь типа  $\{1, A\}$ . Строгость была принесена в жертву краткости сознательно.

Таким образом, мы использовали информационную границу для нахождения оптимального алгоритма, т.е. такого способа взвешиваний, который делает эту оценку достижимой. Фактически мы не только получили необходимый первый шаг алгоритма, но и доказали его единственность (с точностью до нумерации монет).

**Задача 3.** Придумайте алгоритм с: а)  $g_2(2,40) = 4$ ; б)  $g_2(2, (3^k - 1)/2) = k$ .

**Упражнение 7.** Найдите алгоритм с наименьшим возможным значением  $g_2(18,108)$ .

**Задача 4.** Придумайте алгоритмы с: а)  $g_2(5,5) = 3$ ; б)  $g_2(15,15) = 5$ . Докажите их оптимальность.

**Задача 5\*.** Придумайте оптимальные алгоритмы для  $g_2(4,20)$ ,  $g_2(5,16)$ ,  $g_2(8,10)$ .

**Указание.** В каждой из этих задач имеется 80 вариантов, т.е. нужно обойтись четырьмя взвешиваниями. Поступим так же, как мы действовали в анализе решения задачи 2: сосчитаем варианты при разных результатах взвешиваний в зависимости от числа золотых и серебряных монет, выложенных на весы. Убедимся, что при делении каждого множества монет на три примерно равные части (две взвешиваемые части равны, а третья может отличаться от них не более чем на 1) каждому из результатов взвешивания соответствует не более 27 вариантов. Далее будем поступать аналогично – т.е. стараться делить множество оставшихся вариантов на три примерно равные части.

#### Когда $4 + 5 < 9$

Вернемся к Т-алгоритму из упражнения 3, на этот раз для  $N = 13$ . Поскольку  $N(N-1)/2 = 78 \leq 3^4$ , то оптимальному алгоритму должно хватать 4 взвешиваний. Однако Т-алгоритм использует на одно взвешивание больше. При этом параллельное определение  $g_2(6,6)$  не дает никаких улучшений, потому что число случаев равно  $6 \times 6$ , так что информационная граница – 4. А что если уменьшить число монет, выкладываемых на каждую чашу, с 6 до 5? Увы, число случаев все равно больше  $3^3$ :  $5 \cdot 5 + 3 \cdot 2/2 = 28$ . А если еще уменьшить – до 4? Вроде бы хорошо:  $4 \cdot 4 + 5 \cdot 4/2 = 26$ . К сожалению, «клюв вынул – хвост увяз»: теперь проблемным стал исход, в котором одна из чаш перевешивает. В нем подозрительными (теми, среди которых может оказаться фальшивая) остаются  $4 + 5 = 9$  монет, а  $k(9) = 4$ , так что справиться за три оставшихся взвешивания вроде не удастся.

Впрочем, не будем торопиться с выводами. Ведь после первого взвешивания уже не все 9 монет «равноправны». Четыре из них побывали на весах, и взвешивание показало, что среди них точно есть (хотя бы одна) ФМ. Значит, среди остальных пяти монет – не более одной ФМ. Это оставляет в рассмотрении всего  $4 \cdot 3/2 + 4 \cdot 5 = 26$  случаев, а  $26 < 3^3$ . Иначе говоря, шансы есть. А чтобы понять, как их использовать, нам нужно сформулировать постановку новой задачи. В задачах 1–5 мы точно знали, что есть ровно одна фальшивая монета среди «золотых» и ровно одна – среди «серебряных». А теперь мы стартуем с другой информацией: среди  $Y$  «желтых» может быть одна или две фальшивые монеты, а среди  $W$  «белых» – не более одной. Мы будем искать алгоритмы с наименьшим числом взвешиваний  $h_2(Y, W)$ .

**Упражнение 8.** Найдите алгоритм с  $h_2(2,4) = 2$ .

**Решение.** Обозначим желтые монеты цифрами 1 и 2, а белые – буквами А–D. Первое взвешивание:  $1A \vee 2B$ .

1.  $1A = 2B$ .  $\Phi = \{1B, 2A\}$ . Вторым взвешиванием достаточно сравнить 1 с 2.

2.  $1A < 2B$ .  $\Phi = \{1A, 1C, 1D\}$ . Вторым взвешиванием найдем ФМ из 3 подозрительных.

3.  $1A > 2B$ .  $\Phi = \{2B, 2C, 2D\}$ . Симметрично п.2.

**Задача 6.** Найдите алгоритм с  $h_2(3,2) = 2$ .

**Решение.** Обозначим желтые монеты цифрами 1–3, а белые – буквами А и В. Первое взвешивание  $A \vee B$ , а второе –  $1 \vee 2$ .

1.  $A = B$ . Тогда  $\Phi = \{12, 13, 23\}$ , и второе взвешивание определяет, какая из трех желтых монет настоящая.

2.  $A > B$ . Тогда  $\Phi = \{1B, 2B, 3B\}$ . Второе взвешивание ищет ФМ среди трех желтых.

3.  $A < B$ . Тогда  $\Phi = \{1A, 2A, 3A\}$ . Симметрично п.2.

**Задача 7.** Найдите алгоритмы с: а)  $h_2(6,2) = 3$ ; б)  $h_2(3,8) = 3$ .

**Указание.** Придумайте первые взвешивания, которые сводят эти задачи к задаче 6.

**Задача 8.** Найдите оптимальные алгоритмы для: а)  $h_2(4,5)$ ; б)  $h_2(6,11)$ .

**Решение.** а) Обозначим желтые монеты цифрами 1–4, а белые – буквами А–Е. Первое взвешивание  $12A \vee 34B$ .

1.  $12A < 34B$ .  $\Phi = \{12, 1A, 1C, 1D, 1E, 2A, 2C, 2D, 2E\}$ . Мы свели задачу к решенной в упражнении 8.

2.  $12A > 34B$ .  $\Phi = \{34, 3B, 3C, 3D, 3E, 4B, 4C, 4D, 4E\}$ . Симметрично п.1.

3.  $12A = 34B$ .  $|\Phi \cap \{1,2,A\}| = |\Phi \cap \{3,4,B\}| = 1$  (на каждой чаше весов есть ровно одна ФМ), обе ФМ найдем последовательно за 2 взвешивания.

б) Обозначим желтые монеты цифрами 1–6, а белые – буквами А–К. Первое взвешивание  $123ABC \vee 456DEF$ .

1.  $123ABC < 456DEF$ . Значит,  $|\Phi \cap \{1,2,3\}| \geq 1$ ,  $|\Phi \cap \{A,B,C,G,H,I,J,K\}| \leq 1$ . Это условие задачи 7б).

2.  $123ABC > 456DEF$ . Аналогично и симметрично п.1.

3.  $123ABC = 456DEF$ . Возможны 3 группы случаев:

а)  $|\Phi \cap \{1,2,3\}| = |\Phi \cap \{4,5,6\}| = 1$ ;

б)  $|\Phi \cap \{4,5,6\}| = |\Phi \cap \{A,B,C\}| = 1$ ;

в)  $|\Phi \cap \{1,2,3\}| = |\Phi \cap \{D,E,F\}| = 1$ .

Второе взвешивание  $ABC \vee DEF$  при любом исходе оставит одну группу, а затем можно последовательно найти обе ФМ.

**Анализ решения.** Спрашивается, а как удалось понять, что первые взвешивания должны быть именно такими? Здесь, как и в решении задачи 2, сработал аккуратный расчет. На примере задачи б) покажем, как именно это было сделано. Всего имеется 6 желтых и 11 белых монет. Сосчитаем случаи:  $6 \cdot 5/2 + 6 \cdot 11 = 81$ . Значит, каждый из трех возможных исходов первого взвешивания должен соответствовать ровно 27 случаям. Пусть мы в этом взвешивании положили на каждую чашу по  $x$  желтых и  $y$  белых монет. Сосчитаем число случаев, приводящих к равновесию чаш:  $x^2 + xy + yz + (6-2x)(11-2y) + (6-2x)(5-2x)/2$  (первые три слагаемых соответствуют случаям, когда на каждой чаше по одной ФМ, а последние два – случаям, когда обе ФМ отложены). Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим условие  $3x^2 + 6xy + 81 - 33x - 12y = 27$ , откуда  $(x+2y-9)(x-2) = 0$ .

Оказывается, после этого уже не нужно вычислять, что происходит после других исходов первого взвешивания. Благодаря симметричности первого взвешивания два эти исхода тоже симметричны – и каждый из них соответствует  $(81 - 27)/2 = 27$  случаям. Иначе говоря, годится любое взвешивание с  $x = 2$ , а также любое взвешивание, для которого  $x + 2y = 9$ . Мы выше привели решение с  $x = y = 3$ , соответствующее второму равенству.

**Задача 9.** Найдите алгоритмы с: а)  $h_2(9,5) = 4$ ; б)  $h_2(18,5) = 5$ ; в)  $h_2(9,23) = 5$ ; г)  $h_2(27,14) = 6$ .

**Указание.** Рассчитайте первые взвешивания, которые сводят задачу а) к задаче 7б), а задачи б) и в) – к задаче а).

Придумайте, как свести задачу г) к задаче а) за два взвешивания.

**Решение.** Приведем расчет для задачи в). Поскольку  $9 \cdot 8/2 + 9 \cdot 23 = 9 \cdot 27 = 243$ , то каждый исход должен соответствовать 81 случаю:

$$x^2 + xy + yx + (9 - 2x)(23 - 2y) + (9 - 2x)(8 - 2x)/2 = 81,$$

$$3x^2 + 6xy + 162 - 63x - 18y = 0,$$

$$(x + 2 - 18)(x - 3) = 0.$$

Аналогично предыдущей задаче, здесь годится любое взвешивание с  $x = 3$  или любое взвешивание с  $x + 2y = 18$  (например, можно взять  $x = 0$ ,  $y = 9$ , что в случае равенства приводит к задаче а), а в случае неравенства – к последовательному нахождению одной ФМ среди 9 белых монет с более легкой чаши, а другой – среди всех 9 желтых монет).

**Задача 10.** а) Придумайте и докажите обобщение результатов задач 6–9.

б) Докажите, что если  $Y > 1$  и существует алгоритм с  $h_2(Y, W) = k$ , то существует и алгоритм для  $h_2(Y - 1, W + 1) = k$ .

**Задача 11.** Придумайте оптимальный алгоритм для  $h_2(12, 14)$ .

**Решение.** Здесь удобнее обозначить буквами желтые монеты, а цифрами – белые. Положим на каждую чашу весов по 6 желтых монет и по 3 белых (отложенными остались 8 белых монет), т.е. взвесим ABCDEF123  $\vee$  GHIJKL456.

1. ABCDEF123 = GHIJKL456. Так как все отложенные монеты белые и среди них не может быть больше одной ФМ, то на каждой чаше весов – ровно одна ФМ. Тогда обе ФМ можно найти последовательно за 4 взвешивания (9 монет одной чаши требуют ровно двух взвешиваний).<sup>4</sup>

2. ABCDEF123 < GHIJKL456. Тогда  $|\Phi \cap \{A, B, C, D, E, F\}| \geq 1$ , а все монеты GHIJKL456 – настоящие. Это  $h_2(6, 11)$  (здесь  $11 = 26 - 6 - 9$ ), см. задачу 8б).

### Последовательность 3, 4, 7, 13, 22, ...

Вот теперь мы вплотную подошли к общему случаю – когда любые две монеты (из  $N$  имеющихся) могут оказаться фальшивыми.

Выше было доказано неравенство  $3^k \geq \frac{N(N-1)}{2}$ , связывающее число монет  $N$  и необходимое число взвешиваний  $k$ . При этом мы для каждого  $N$  искали наименьшее возможное  $k$ . Но не менее актуальна обратная задача – для каждого  $k$  найти то наибольшее возможное  $N = N(k)$ , для которого имеет смысл искать алгоритм взвешиваний. Для первых значений  $k$  это несложно прикинуть «на коленке»:  $N(1) = 3$ ,  $N(2) = 4$ , а  $N(3) = 7$ . Собственно, выше в упражнениях 1–4 мы успешно нашли соответствующие алгоритмы. Однако что будет для следующих значений  $k$ ? Найдем  $N(k)$  в общем случае:

$$3^k \geq N(N-1)/2,$$

$$8 \cdot 3^k + 1 \geq (2N-1)^2,$$

$$2N-1 \leq \left[ \sqrt{8 \cdot 3^k + 1} \right].$$

Числа  $8 \cdot 3^k + 1$ , как несложно убедиться, являются точными

<sup>4</sup> А тем, что не любая пара монет с разных чаш может принадлежать множеству  $\Phi$ , можно пренебречь – здесь это не нарушает оптимальности алгоритма.

квадратами только при  $k = 0$  и  $k = 1$ . При  $k > 1$   $\left[ \sqrt{8 \cdot 3^k + 1} \right] = \left[ \sqrt{8 \cdot 3^k} \right]$ . Иначе говоря, при четных  $k$  ( $k = 2m$ ) имеем неравенство  $2N - 1 \leq 2 \cdot 3^m \sqrt{2}$ , а при нечетных  $k$  ( $k = 2m + 1$ ) – неравенство  $2N - 1 \leq 2 \cdot 3^m \sqrt{6}$ .

Итак, первая из еще не решавшихся задач –  $k = 4$ . Тогда  $2N - 1 \leq 18\sqrt{2} \approx 25,45$ , откуда находим  $N(4) = 13$ .

**Задача 12.** Среди 13 монет – две фальшивые. Найдите их за 4 взвешивания.

**Решение.** Обозначим монеты цифрами 1–8 и буквами А–Е. Первое взвешивание – 1234  $\vee$  5678.

1. 1234 > 5678.  $|\Phi \cap \{5, 6, 7, 8\}| \geq 1$ ,  $|\Phi \cap \{1, 2, 3, 4\}| = 0$ . Это  $h_2(4, 5)$  (см. задачу 8а)).

2. 1234 < 5678. Аналогично случаю 1.

3. 1234 = 5678. Второе взвешивание: 125А  $\vee$  346В.

3.1. 125А = 346В.  $\Phi = \{16, 26, 35, 45, АВ, CD, CE, DE\}$ .

Третье взвешивание 5С  $\vee$  6D.

3.1.1. 5С = 6D.  $\Phi = \{АВ, CD\}$ . Четвертое взвешивание, например, АВ  $\vee$  78.

3.1.2. 5С < 6D.  $\Phi = \{35, 45, CE\}$ . Далее 3  $\vee$  4.

3.1.3. 5С > 6D.  $\Phi = \{16, 26, DE\}$ . Далее 1  $\vee$  2.<sup>5</sup>

3.2. 125А > 346В.  $\Phi = \{36, 37, 38, 46, 47, 48, ВС, BD, BE\}$ .

Это фактически задача о трех золотых монетах 3, 4, В и трех серебряных (6, 7, 8 или С, D, Е в зависимости от того, какая из золотых монет окажется фальшивой).

3.3. 125А < 346В.  $\Phi = \{15, 17, 18, 25, 27, 28, АС, AD, AE\}$ .

Аналогично п. 3.2.

**Анализ решения.** Как именно вычислить, что в первом взвешивании на чаши весов нужно класть по 4 монеты, вдумчивому читателю этой статьи должно быть уже понятно. Других вариантов здесь действительно нет. А вот как вычислить нужное второе взвешивание после равенства (п.3 решения)? Давайте разбираться. Равенство в первом взвешивании соответствовало  $4 \cdot 4 + 5 \cdot 4/2 = 26$  случаям. После этого взвешивания у нас есть три группы монет – те, которые были выложены на левую чашу, на правую чашу и отложенные. Пусть во втором взвешивании мы берем на каждую чашу из этих групп  $x$ ,  $y$ ,  $z$  монет соответственно. Тогда равенство в этом взвешивании должно соответствовать ровно 8 случаям (соответственно, каждое из неравенств будет соответствовать 9 случаям,  $8 + 9 + 9 = 26$ ). Сосчитаем случаи равенства:

$$xy + yx + z^2 + (4 - 2x)(4 - 2y) + (5 - 2z)(4 - 2z)/2 = 8,$$

$$18 + 6xy - 8x - 8y + 3z^2 - 9z = 0,$$

$$(3x - 4)(3y - 4) + 0,5 \cdot (3z - 4,5)^2 + 7/8 = 0.$$

При  $z = 0$ :  $(3x - 4)(3y - 4) = -11$ . Решений нет.

При  $z = 1$  и  $z = 2$ :  $(3x - 4)(3y - 4) = -2$ . Отсюда  $3y - 4 = -1$ ,  $3x - 4 = 2$  (или наоборот), т.е.  $y = 1$ ,  $x = 2$ . Именно такое взвешивание ( $z = 1$ ) в решении и было предложено.

**Замечание.** Решение задачи 12 сразу позволяет решить  $h_2(13, 12)$ . Действительно, разобьем 12 «белых» монет на две группы по 6 и сравним эти две группы. Если они равны по весу, то обе ФМ – в 13 желтых монетах, которые мы отыщем согласно задаче 12. Если же они не равны, то мы имеем  $g_2(6, 13)$ , откуда за одно взвешивание получаем  $g_2(2, 13)$  (см. задачу 2).

Следующая задача – следующая ступенька трудности. Если  $k = 5$ , то  $2N - 1 \leq 18\sqrt{6} \approx 44,09$ , откуда находим  $N(5) = 22$ .

<sup>5</sup> Обратите внимание, что четвертое взвешивание можно было сделать одинаковым для всех трех исходов третьего взвешивания. Например, 13АВ сравнить с 2478.

**Задача 13.** Среди 22 монет – две фальшивые. Найдите их за 5 взвешиваний.

**Решение.** Разобьем монеты на три группы: A–F, I–N и 0–9 (в последней 10 монет). Первое взвешивание: ABCDEF  $\vee$  IJKLMN.

1. ABCDEF < IJKLMN (или ABCDEF > IJKLMN). Это  $h_2(6,10)$ , более легкая задача, чем решенная выше 8б).

2. ABCDEF = IJKLMN. Второе взвешивание: 012ABVIJK  $\vee$  345CDLMN.

2.1. 012ABVIJK < 345CDLMN:  $\Phi = \{AI, AJ, AK, BI, BJ, BK, EI, EJ, EK, FI, FJ, FK, 01, 02, 12, 06, 07, 08, 09, 16, 17, 18, 19, 26, 27, 28, 29\}$ . Третье взвешивание: AB6  $\vee$  7EF.

2.1.1. AB6 = 7EF.  $\Phi = \{01, 02, 12, 08, 09, 18, 19, 28, 29\}$ . Это  $h_2(3,2)$ .

2.1.2. AB6 < 7EF.  $\Phi = \{AI, AJ, AK, BI, BJ, BK, 06, 16, 26\}$ . Тогда 4-м взвешиванием находим ФМ из A, B, 6 а 5-м – парную к ней ФМ из соответствующей тройки монет.

2.1.3. AB6 > 7EF. Симметрично и аналогично 2.1.2.

2.2. 012ABVIJK > 345CDLMN. Симметрично и аналогично п.2.1.

2.3. 012ABVIJK = 345CDLMN.  $\Phi = \{67, 68, 69, 78, 79, 89, 6E, 6F, 7E, 7F, 8E, 8F, 9E, 9F, AL, AM, AN, BL, BM, BN, CI, CJ, CK, DI, DJ, DK\}$ . Третье взвешивание: 67ABE  $\vee$  89CDF.

2.3.1. 67ABE = 89CDF.  $\Phi = \{68, 69, 6F, 78, 79, 7F, E8, E9, EF\}$ . Дальше обе ФМ определяются последовательно.

2.3.2. 67ABE < 89CDF.  $\Phi = \{67, 6E, 7E, AL, AM, AN, BL, BM, BN\}$ . Дальше A  $\vee$  B, а 5-е взвешивание – либо найти пару ФМ из 6, 7, E, либо одну ФМ из L, M, N.

2.3.3. 67ABE > 89CDF. Симметрично и аналогично 2.3.2.

**Анализ решения.** Как и в предыдущих задачах, определение числа монет на чашах в первом взвешивании – результат расчета. Пусть на каждую чашу положены по  $x$  монет. Тогда исход «=» соответствует  $x^2 + (22 - 2x)(21 - 2x)/2$  случаям, а каждый их исходов «<» и «>» соответствует  $x(x - 1)/2 + x(22 - 2x)$  случаям. Следовательно, должны быть выполнены неравенства  $x^2 + (11 - x)(21 - 2x) \leq 81$  и  $x(x - 1)/2 + x(22 - 2x) \leq 81$ . Раскрывая скобки и упрощая, получаем  $150 \leq 43x - 3x^2 \leq 162$ . Решая это двойное неравенство, находим  $6 \leq x \leq 25/3$ , т.е. на каждую чашу можно класть по 6, 7 или 8 монет. Мы выбрали первую из этих возможностей.

Однако не меньший интерес представляет и выбор второго взвешивания после равновесия. Напомним анализ случаев: либо обе ФМ на весах ( $6 \cdot 6 = 36$ ), либо отложены ( $10 \cdot 9/2 = 45$ ). Итого – 81 случай, значит, второе взвешивание должно быть подобрано так, чтобы каждому исходу соответствовали ровно 27 из них.

Пусть мы во втором взвешивании кладем на каждую чашу весов по  $x$  из монет A–F, по  $y$  из монет G–N и по  $z$  из монет 0–9 (двумя переменными обойтись не получится). Рассчитаем исход «=»: он соответствует  $xy + yx + z^2 + (6 - 2x)(6 - 2y) + (10 - 2z)(9 - 2z)/2$  случаям. Запишем равенство  $2xy + z^2 + (6 - 2x)(6 - 2y) + (5 - z)(9 - 2z) = 27$ , или

$$3z^2 - 19z + 6xy - 12x - 12y + 54 = 0.$$

Отсюда ясно, что  $z$  делится на 3, а так как  $2z < 9$ , то  $z = 0$  или  $z = 3$ . Рассмотрим обе возможности:

1)  $z = 0$ . Тогда  $6xy - 12x - 12y + 54 = 0$ ,  $(x - 2)(y - 2) = 13$ . Так как 13 простое, а  $x$  и  $y$  не больше 3, то решений здесь нет.

2)  $z = 3$ . Тогда  $6xy - 12x - 12y + 24 = 0$ ,  $(x - 2)(y - 2) = 0$ . Значит, при  $z = 3$  достаточно взять либо  $x = 2$  (и любое  $y$ ), либо  $y = 2$  (и любое  $x$ ). В приведенном выше решении мы брали  $x = 2$  и  $y = 3$ .

#### Четыре теоремы о двух монетах

А теперь попробуем подробно объяснить, зачем нам были нужны эти громоздкие и далеко не самые простые алгоритмы.

Пусть имеется множество желтых монет A,  $|A| = 3N$ , и множество белых монет B,  $|B| = N$ . (Среди желтых монет есть хотя бы одна ФМ, среди белых – не более одной ФМ.) Пусть  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ,  $|A_1| = |A_2| = |A_3| = N$  (все множества  $A_1, A_2, A_3$  не пересекаются). Рассмотрим следующий алгоритм из двух взвешиваний: первое взвешивание  $A_1 \vee A_2$ .

1.  $A_1 = A_2$ . Второе взвешивание:  $A_1 \vee B$ .

а.  $A_1 < B$ . Тогда одна ФМ находится в  $A_1$ , а другая в  $A_2$ .

б.  $A_1 > B$ . Одна ФМ в  $A_3$ , другая в B.

с.  $A_1 = B$ . Обе ФМ в  $A_3$ .

2.  $A_1 < A_2$ . Второе взвешивание  $A_3 \vee B$ .

а.  $A_3 < B$ . Одна ФМ находится в  $A_1$ , другая в  $A_3$ .

б.  $A_3 > B$ . Одна ФМ в  $A_1$ , другая в B.

с.  $A_3 = B$ . Обе ФМ в  $A_1$ .

3.  $A_1 > A_2$ . Аналогично и симметрично п.2.

За два взвешивания этот алгоритм позволил определить, в каких из множеств размера  $N$  находятся обе ФМ.

**Теорема 2.** Пусть имеется множество A желтых монет размера  $3^k$  и множество белых монет B размера не более  $[0,5 \cdot 3^k]$ . Тогда для определения обеих ФМ достаточно  $2k$  взвешиваний.

**Доказательство.** База индукции ( $k = 1$ ) сводится к прямому применению описанного выше алгоритма, поскольку каждое из полученных в нем множеств состоит из одного элемента. Индукционный переход также сводится к этому алгоритму. Действительно, пусть мы представили B в виде  $B_1 \cup B_2$ , причем  $|B_2| \leq [0,5 \cdot 3^{k-1}]$ . Проведем два взвешивания со множествами  $A_1, A_2, A_3, B_1$  по алгоритму, в результате получим одну из двух возможных ситуаций.

$P_1$ : либо одна ФМ находится в каком-то из этих четырех множеств (все множества имеют размер не более чем  $3^{k-1}$ ), а другая – в другом из них;

$P_2$ : либо обе ФМ находятся в одном и том же множестве  $A_i$ , либо одна из них в  $A_i$ , а другая в  $B_2$ .

В ситуации  $P_1$  мы находим обе ФМ последовательно за  $2(k - 1)$  взвешиваний, а в ситуации  $P_2$  применяем предположение индукции.

**Замечание.** Этот алгоритм фактически идентичен тому, который мы применяли при поиске  $h_2(3,2)$  (см. задачу 6): в роли монет 1–3 в нем выступают подмножества  $A_1 - A_3$ , а в роли монет A и B – подмножества  $B_1$  и  $B_2$ . А еще этот же алгоритм применялся для сведения  $h_2(9,5)$  к  $h_2(3,2)$  (см. задачу 9а) и для сведения  $h_2(27,14)$  к  $h_2(9,5)$  (см. задачу 9г).

**Теорема 3.** Пусть имеется множество монет A,  $|A| \leq 6,5 \cdot 3^k$ . Тогда для определения обеих ФМ достаточно  $2k + 3$  взвешиваний.

**Доказательство.** Случай  $k = 0$  рассмотрен еще в упражнении 3 (Т-алгоритм для 7 монет). Случай  $k > 0$  также рассматривается при помощи этого алгоритма. Действительно, можно считать, что вместо шести монет у нас есть шесть «стандартных» множеств  $A_1 - A_6$ ,  $|A_i| \leq 3^k$ , а вместо седьмой – «нестандартное» множество B,  $|B_i| \leq 0,5 \cdot 3^k$ . Проведем три взвешивания по Т-алгоритму, мы придем к одной из двух следующих ситуаций:

$P_1$ . Одна ФМ находится в одном из стандартных множеств, а другая – в другом стандартном множестве. Поскольку каждое стандартное множество имеет размер не более чем  $3^k$ , то на определение каждой ФМ нам потребуется не более  $k$  взвешиваний. Итого в этом случае еще через  $2k$  взвешиваний обе ФМ будут найдены.

$P_2$ . Одна или две ФМ находятся в одном и том же стандартном множестве, и не более одной ФМ может находиться в нестандартном множестве. По теореме 2, обе ФМ в такой ситуации можно отыскать не более чем за  $2k$  дополнительных взвешиваний. Итого в каждой из ситуаций нам потребовалось не более  $2k + 3$  взвешиваний.

Аналогично, на базе алгоритмов для 13 и 22 монет (см. задачи 12 и 13) доказываются следующие две теоремы.

**Теорема 4.** Пусть имеется множество монет  $A$ ,  $|A| \leq 12,5 \cdot 3^k$ . Тогда для определения обеих ФМ достаточно  $2k + 4$  взвешиваний.

**Теорема 5.** Пусть имеется множество монет  $A$ ,  $|A| \leq 21,5 \cdot 3^k$ . Тогда для определения обеих ФМ достаточно  $2k + 5$  взвешиваний.

На самом деле обе этих теоремы можно даже немного усилить. Например, для 6 взвешиваний теорема 4 дает результат  $\lfloor 12,5 \times 3 \rfloor = 37$  монет, в то время как можно разобраться и с 38 монетами. Действительно, сформируем 12 групп по 3 монеты [и остаток из 2 монет]. Проведем 4 взвешивания с этими группами, как в задаче 12 (так, как будто каждая группа состоит из одной монеты). По результатам получим одну из двух возможных ситуаций: 1) найдены две различные группы, в каждой из которых есть ФМ; 2) найдена только одна группа с ФМ; возможно, еще одна ФМ содержится в остатке. В ситуации 1 мы найдем обе ФМ за два последовательных взвешивания, а ситуация 2 – это  $h_2(3,2)$ , которую мы также умеем решать за 2 взвешивания.

Аналогично, результат теоремы 5 для 7 взвешиваний улучшается с 64 до 65 монет. Ниже – табличка, в которой сведены максимально возможные (из информационной оценки) и достижимые (по теоремам 4 и 5) результаты:

$N$	4	5	6	7	8	9	10
Оценка	13	22	38	66	115	198	344
Алгоритм	13	22	38	65	113	194	341

**Задача 14.** а) Докажите, что существует бесконечно много значений  $N$ , для которых алгоритмы из теорем 4–5 являются оптимальными. б) Докажите, что для всех остальных значений  $N$  эти алгоритмы отличаются от оптимальных не более чем на одно взвешивание.

### Проблемы и контрпримеры

Неужели в задачах о двух фальшивых монетах все и всегда обстоит так же просто, как и в классической задаче с одной фальшивой монетой? Увы, нет. До сих пор неизвестен ответ на **главный вопрос**: действительно ли для каждого  $N$  информационная граница точна (иначе говоря, верно ли, что никакого разрыва между второй и третьей строчками в таблице не должно быть)? Гипотеза, что это в самом деле так, выдвинута более 20 лет назад, но до сих пор никем не доказана и не опровергнута.

## ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

### Опыт Эрстеда в ... метро

(Начало см. на 4-й странице обложки)

...Вы увидите, что стрелка компаса при разгоне вагона очень резко изменит свое направление и станет перпендикулярной направлению движения состава, а при резком торможении она повернется на 180 градусов. С чем это связано?

Прежде всего напомним, в чем состоял опыт Эрстеда, проведенный в 1820 году. Эрстед поместил над магнитной стрелкой прямолинейный провод, параллельный стрелке. При пропускании по проводу постоянного электрического тока стрелка отклонялась и устанавливалась перпендикулярно проводу. При изменении направления тока стрелка поворачивалась на 180 градусов. Так экспериментально было доказано, что электрические токи действуют на магниты, т.е. была установлена связь между электрическими и магнитными явлениями.

Вернемся к нашему опыту. Вагоны метро разгоняются двигателями постоянного тока, и суммарная величина тока в контактном рельсе под вагоном (см. желтые стрелки на фотографии) может составлять несколько тысяч ампер. Поэтому индукция магнитного поля контактного рельса в вагоне в несколько раз превышает индукцию магнитного поля Земли.

Можно оценить силу тока  $I$  в контактом рельсе при ускорении вагона метро. Для этого воспользуемся известным выражением (законом Био–Савара) для вычисления индукции магнитного поля, создаваемого длинным прямым проводником с током:  $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{R}$ , где  $R$  – расстояние от контактного рельса до компаса, а  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$  Гн/м – магнитная постоянная. Пусть магнитная индукция, создава-



емая контактным рельсом, в 10 раз больше индукции магнитного поля Земли (50 мкТл), а расстояние компаса от контактного рельса  $R = 1,5$  м. После простых подсчетов получаем  $I \approx 3700$  А.

Известно, что для демонстрации опыта Эрстеда в классе необходим ток силой более двух ампер. При меньшей силе тока стрелка компаса, находящегося на расстоянии нескольких сантиметров от провода, не становится перпендикулярно к нему при замыкании цепи. В контактом же рельсе проходит ток в тысячу раз больше, а значит, компас можно отодвинуть от провода гораздо дальше.

К. Богданов



# Геометрия световых лучей

В. ДРОЗДОВ

**Ч**ТО НУЖНО ДЛЯ УВЕРЕННОГО РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ задач по геометрической оптике?

Во-первых, необходимо знание законов геометрической оптики, которым подчиняется поведение световых лучей. Основных законов три.

1) В однородной прозрачной среде свет распространяется прямолинейно.

2) На границе раздела двух сред падающий луч, луч отраженный и перпендикуляр, восстановленный в точке падения, лежат в одной плоскости, причем угол отражения равен углу падения.

3) При переходе света из одной среды в другую падающий луч, луч преломленный и перпендикуляр, восстановленный в точке падения, лежат в одной плоскости, при этом произведение абсолютного показателя преломления среды на синус угла между лучом света и нормалью постоянно.

Учитываем также, что световые лучи обратимы: если поменять местами источник и приемник света, то траектория световых лучей останется прежней.

Во-вторых, можно и нужно опираться на основные положения геометрии и на формулы тригонометрии – оптика ведь геометрическая! Перечислять их нет смысла. Отметим лишь, что геометрические и тригонометрические «изыски» заведомо не требуются. Однако надо твердо помнить, что синус и тангенс угла  $\alpha$ , значительно меньшего одного радиана, можно заменять значением самого угла в радианной мере. При этом, в первом приближении,  $\cos \alpha \approx 1$ . Более точно  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \approx \sqrt{1 - \alpha^2} \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ .

В-третьих, почти всегда надо делать аккуратный и разборчивый чертеж – наш незаменимый помощник в решении задач. Чертеж должен быть достаточно крупным, чтобы четко были видны все его элементы, и сделан с применением транспортира, циркуля и линейки. От руки можно рисовать лишь весьма простые схемы.

В-четвертых, и это самое главное, необходим навык решения достаточного числа средних и трудных задач. К чему и приступим.

**Задача 1** (МПУ). Под каким углом должен упасть луч света на стекло, чтобы преломленный луч оказался перпендикулярным отраженному? Показатель преломления стекла  $n = 1,8$ .

**Решение.** Пусть искомый угол равен  $\alpha$  (рис.1). Тогда по закону преломления последовательно имеем

$$1 \cdot \sin \alpha = n \cdot \sin(90^\circ - \alpha),$$

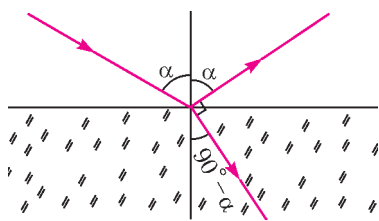
$$\sin \alpha = n \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = n, \quad \alpha = \operatorname{arctg} n.$$

Вычисления дают  $\alpha = 61^\circ$ .

**Задача 2** (МИЭТ). Сечение стеклянной призмы имеет форму равно-

Рис. 1



ронного треугольника. Луч падает на одну из граней перпендикулярно к ней. Вычислите угол между этим лучом и лучом, вышедшим из призмы. Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

**Решение.** Так как луч падает на первую грань призмы по нормали, то в точке  $A$  (рис.2) он не преломляется и прямолинейно доходит до точки  $B$ . Запишем для этой точки закон преломления:

$$1,5 \cdot \sin 60^\circ = \sin \beta,$$

$$\text{откуда } \sin \beta = \sqrt{\frac{27}{16}} > 1,$$

чего не может быть. Следовательно, в точке  $B$  будет происходить полное внутреннее отражение, и через вторую грань луч из призмы не выйдет. Геометрически ясно, что, отразившись от второй грани, луч пойдет по нормали к третьей. А значит, он выйдет из призмы через эту грань без преломления. Таким образом, искомый угол равен

$$\gamma = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ.$$

**Задача 3** (МГУ им.Н.Э.Баумана). Стеклянный шар, его показатель преломления  $n$ , освещается узким расходящимся пучком лучей, ось которого проходит через центр шара. Источник света расположен на расстоянии  $l$  от поверхности шара. На таком же расстоянии от поверхности, но по другую сторону от шара, получается изображение источника. Определите радиус шара.

**Решение.** Изображение источника находится, очевидно, в точке пересечения любого луча пучка и осевого луча (рис.3). Самое главное в решении этой задачи сообразить, что в силу симметрии расположения источника света и его изображения относительно центра шара и вследствие обратимости световых лучей луч внутри шара пойдет горизонтально. Чтобы не загромождать выкладки, сразу пренебрежем длиной отрезка  $BC$  по сравнению с радиусом шара  $R$ . По закону

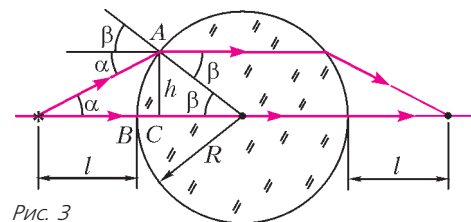


Рис. 3

преломления света в точке  $A$  и из очевидных геометрических соображений имеем систему уравнений

$$\sin(\alpha + \beta) = n \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l},$$

$$\sin \beta = \frac{h}{R}.$$

При замене синусов и тангенса малых углов самыми углами система радикально упрощается:

$$\alpha + \beta = n\beta,$$

$$\alpha = \frac{h}{l},$$

$$\beta = \frac{h}{R}.$$

Подставляя из второго и третьего уравнений значения углов  $\alpha$  и  $\beta$  в первое уравнение, приходим к результату

$$R = l(n-1).$$

**Задача 4.** Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Одна из граней посеребрена. Луч света падает нормально на другую, непосеребренную, грань и после двух отражений выходит через основание призмы перпендикулярно ему. Найдите углы призмы.

**Решение.** Построим ход луча в призме, неизвестный угол при вершине которой обозначим через  $\alpha$  (рис.4) Величины остальных углов легко выражаются через  $\alpha$ . Применим к треугольнику  $ABC$  теорему о сумме углов:

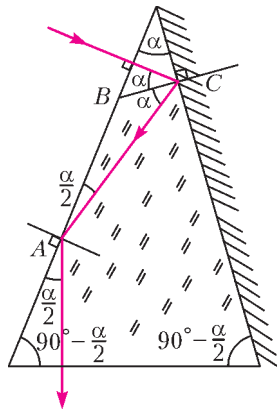


Рис. 4

$$\alpha + (90^\circ + \alpha) + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ,$$

откуда найдем  $\alpha = 36^\circ$ . Тогда другие два угла будут по  $90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 72^\circ$  каждый.

**Задача 5.** Найдите фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала радиусом  $R$  для луча, падающего на зеркало параллельно его оси на расстоянии  $a$  от нее.

**Решение.** Геометрическая конфигурация задачи ясна из рисунка 5. В равнобедренном треугольнике  $AOF$  легко выразить боковую сторону  $OF$  через основание  $OA = R$  и углы при нем, равные  $\alpha$ :

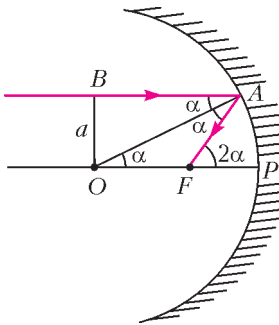


Рис. 5

$$OF = \frac{R}{2 \cos \alpha}.$$

Из прямоугольного треугольника  $OBA$  имеем

$$\cos \alpha = \frac{AB}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}.$$

Тогда

$$OF = \frac{R^2}{2\sqrt{R^2 - a^2}}.$$

Отсюда находим искомое фокусное расстояние зеркала, т.е. расстояние от точки  $F$  до полюса  $P$ :

$$FP = R - OF = R \left( 1 - \frac{R}{2\sqrt{R^2 - a^2}} \right).$$

Видим, что это расстояние зависит от  $a$ , т.е. для разных лучей оно будет разным. Однако для параксиальных лучей, для которых  $a \ll R$ ,

$$FP \approx R \left( 1 - \frac{R}{2R} \right) = \frac{R}{2}.$$

Следовательно, лучи, идущие вблизи главной оптической оси параллельно ей, собираются в одну точку – фокус зеркала  $F$ .

**Задача 6.** Свая длиной 2 м выступает над поверхностью воды на  $h = 1$  м. Определите длину тени от сваи на дне озера, если угол падения лучей света составляет  $\alpha = 30^\circ$ .

**Решение.** Из рисунка 6 видно, что длина тени  $AB$  от сваи равна сумме длин отрезков  $BC$  и  $AC$ . Очевидно, что  $BC = h \operatorname{tg} \alpha$  и  $AC = h \operatorname{tg} \beta$ . Тогда

$$AB = h(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

По закону преломления света,  $n \sin \beta = \sin \alpha$ , где  $n = 4/3$  –

показатель преломления воды. Отсюда находим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Таким образом,

$$AB = h \left( \operatorname{tg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \approx 1 \text{ м}.$$

**Задача 7.** Найдите боковое смещение светового луча, падающего на плоскопараллельную стеклянную пластинку, т.е. на прямоугольный параллелепипед, толщиной  $d$  под углом  $\alpha$  к нормали, если показатель преломления стекла равен  $n$ .

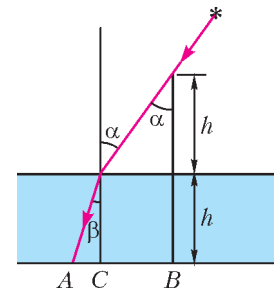


Рис. 6

**Решение.** Сначала необходимо убедиться, что луч, вышедший из пластинки, будет параллелен падающему – в планиметрии можно говорить о расстоянии лишь для параллельных прямых. По закону преломления света, записанному для точек  $M$  и  $N$  (рис.7):

$$\sin \alpha = n \sin \beta \text{ и}$$

$$n \sin \beta = \sin \varphi,$$

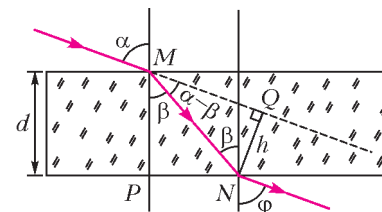


Рис. 7

следует, что  $\sin \varphi = \sin \alpha$ , и  $\varphi = \alpha$ , ибо углы  $\varphi$  и  $\alpha$  – острые. Из треугольника  $MNQ$  имеем

$$h = MN \sin(\alpha - \beta),$$

а из треугольника  $MNP$  –

$$d = MN \cos \beta.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} h &= d \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = d \left( \sin \alpha - \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right) = \\ &= d \sin \alpha \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right). \end{aligned}$$

**Задача 8** (МГТУ им.Н.Э.Баумана). Луч света падает на трехгранную призму под углом  $\alpha$ . Призма сделана из стекла с показателем преломления  $n$ . Преломляющий угол при вершине призмы  $\varphi$ . Под каким углом  $\psi$  луч выйдет из призмы и каков угол  $\theta$  отклонения луча от первоначального направления?

**Решение.** По закону преломления света (рис.8),

$$\sin \alpha = n \sin \beta \text{ и}$$

$$\sin \psi = n \sin \gamma.$$

По теоремам о сумме углов треугольника  $ABC$  и четырехугольника  $ACBD$  имеем  $\beta + \gamma + \delta = 180^\circ$  и  $90^\circ + 90^\circ + \varphi + \delta = 360^\circ$  соответственно, откуда следует  $\gamma = \varphi - \beta$ . Значит,

$$\begin{aligned} \sin \psi &= n \sin(\varphi - \beta) = n(\sin \varphi \cos \beta - \sin \beta \cos \varphi) = \\ &= \sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \varphi. \end{aligned}$$

Чтобы не было претензий на экзамене (по сути, формаль-

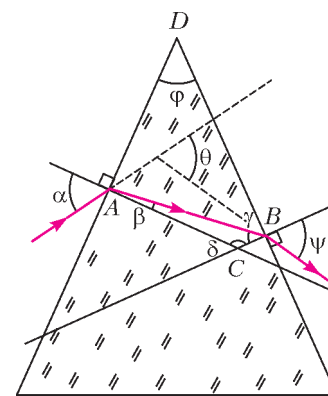


Рис. 8

ных), разумно записать в ответе

$$\psi = \arcsin(\sin \varphi \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \varphi).$$

Так как внешний угол треугольника равен сумме двух его внутренних углов, с ним не смежных, то

$$\theta = (\alpha - \beta) + (\psi - \gamma) = \alpha - \varphi + \psi.$$

**Задача 9** (физфак МГУ, 1994). Шар радиусом  $R$  из стекла с показателем преломления  $n$  разрезан по диаметру. На диаметрально плоскость одной из половин шара нормально падает параллельный пучок света. На каком расстоянии от центра шара пересекут главную оптическую ось лучи, прошедшие сферическую поверхность на наибольшем удалении от этой оси?

**Решение.** Ход луча, удовлетворяющего условию задачи, изображен на рисунке 9. Отметим, что этот луч, преломленный в точке  $A$ , пойдет перпендикулярно радиусу  $OA$  и пересечет главную оптическую ось в точке  $B$ . По закону преломления,  $\sin \alpha = \frac{1}{n}$ , так что лучи, идущие параллельно отмеченному лучу дальше от прямой  $OB$ , из полушара не выйдут из-за полного внутреннего отражения. Из треугольника

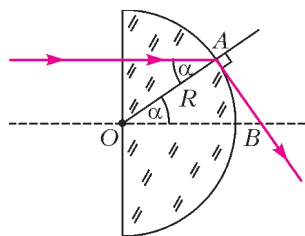


Рис. 9

$OAB$  находим

$$OB = \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

**Задача 10** (ВМК МГУ, 1990). Луч света, лежащий в плоскости рисунка 10, падает на боковую грань  $AB$  призмы, имеющей при вершине угол  $90^\circ$ . В каких пределах лежат возможные значения угла падения  $\alpha$ , если известно, что луч выходит из боковой грани  $AC$ ? Показатель преломления призмы  $n = 1,25$ .

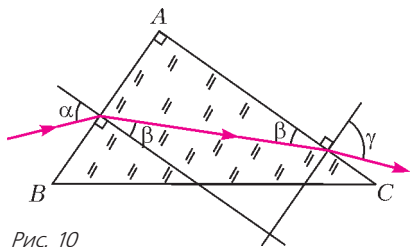


Рис. 10

**Решение.** По закону преломления луча на гранях призмы  $AB$  и  $AC$  имеем

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

$$n \sin(90^\circ - \beta) = \sin \gamma.$$

Чтобы луч не испытал полного внутреннего отражения на грани  $AC$ , необходимо выполнение условия

$$\sin \gamma < 1, \text{ или } n \cos \beta < 1.$$

Отсюда получаем

$$n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} < 1, \text{ или } \sqrt{n^2 - 1} < \sin \alpha.$$

Значит,

$$\arcsin \sqrt{n^2 - 1} < \alpha < 90^\circ, \text{ или } 48^\circ 40' < \alpha < 90^\circ.$$

**Задача 11** (НГУ). Пучок параллельных световых лучей падает по нормали на плоскую грань равнобедренной стеклянной призмы с показателем преломления  $n$  и выходит из призмы под углом  $\theta$  к первоначальному направлению падения. Угол  $\varphi$  при вершине призмы весьма мал. Найдите угол  $\varphi$ .

**Решение.** Геометрическая конфигурация, отвечающая условиям задачи, изображена на рисунке 11, причем для наглядности угол  $\varphi$  выбран не слишком малым. Однако считаем его таковым и применяем формулу  $\sin \varphi = \varphi$ . Луч, проходя через точку  $A$ , не преломляется, а для точки  $B$  запишем закон преломления света в виде

$$n \sin \varphi = \sin(\varphi + \theta).$$

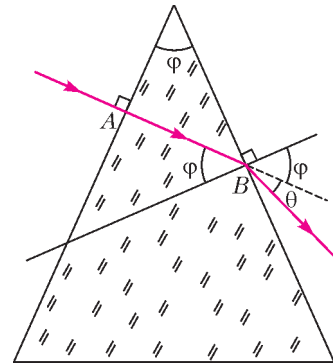


Рис. 11

Угол  $\theta$  тоже мал, поэтому

мал и угол  $\varphi + \theta$ . Окончательно получим

$$n\varphi = \varphi + \theta, \text{ откуда } \varphi = \frac{\theta}{n-1}.$$

**Задача 12** (МГУ). На дне водоема глубиной  $H = 1,2$  м находится точечный источник света. Найдите наибольшее расстояние от источника до того места на поверхности воды, где лучи выходят за пределы воды. Показатель преломления воды  $n = 1,33$ .

**Решение.** Обозначения отрезков и углов ясны из рисунка 12. Очевидно, что луч, идущий под углом больше  $\alpha$  к вертикали, не выйдет из воды, испытав полное внутреннее отражение. По закону преломления света в точке  $A$ ,

$$n \sin \alpha = 1.$$

Из треугольника  $ABC$

$$l = \frac{H}{\cos \alpha}.$$

Отсюда находим

$$l = \frac{nH}{\sqrt{n^2 - 1}} = 1,8 \text{ м.}$$

**Задача 13.** Широкий непрозрачный сосуд доверху наполнен жидкостью с показателем преломления  $n = 1,25$ . Поверхность жидкости закрыта тонкой непрозрачной пластиной, в которой имеется круглое отверстие радиусом  $r = 2$  см. Определите диаметр светлого пятна на дне сосуда, если он освещается рассеянным светом облачного неба, идущим со всех направлений. Толщина слоя жидкости  $d = 6$  см.

**Решение.** Поскольку на каждую точку открытой поверхности жидкости падают лучи со всех направлений ( $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ ), синус преломленного луча

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Следовательно, из каждой точки поверхности внутри жидкости распространяются лучи в конусе с углом полураствора

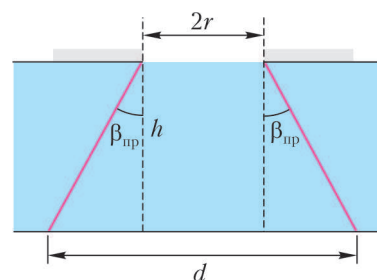


Рис. 13

$\beta_{\text{пр}}$  ( $\sin \beta_{\text{пр}} = \frac{1}{n}$ ). Тогда диаметр светлого пятна на дне, как видно из рисунка 13, будет равен

$$d = 2r + 2h \operatorname{tg} \beta_{\text{пр}} = 20 \text{ см}.$$

### Упражнения

1. Плоское зеркало поворачивается на угол  $\alpha$ . На какой угол повернется при этом отраженный от зеркала луч?

2. Два плоских зеркала составляют двугранный угол  $120^\circ$ . В биссекторной плоскости расположен точечный источник света. Расстояние между первыми мнимыми изображениями источника равно  $l$ . Чему будет равно расстояние между изображениями, если двугранный угол уменьшить в два раза?

3. В блоке оптического стекла с показателем преломления  $n = \sqrt{3}$  имеется наполненная воздухом полость в виде плоскопараллельной пластинки толщиной  $d = 0,2$  см. Луч света падает на границу раздела стекло-воздух под углом  $\alpha = 30^\circ$ . Определите смещение луча после прохождения через воздушную полость.

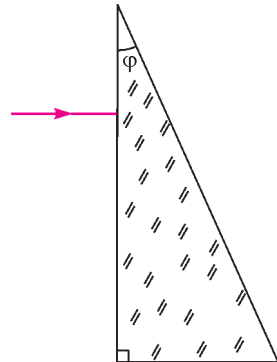


Рис. 14

4 (МГУ). Луч света падает нормально на переднюю грань призмы, как показано на рисунке 14. Преломляющий угол призмы  $\varphi = 30^\circ$ . Каким должен быть показатель преломления материала призмы, чтобы угол отклонения луча призмой был равен  $\varphi$ ?

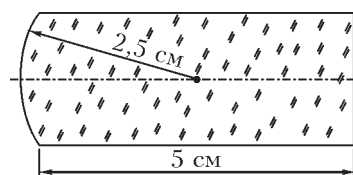


Рис. 15

5 (МФТИ, 1975). Плосковыпуклая толстая линза (рис.15) с радиусом кривизны выпуклой части  $R = 2,5$  см изготовлена из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$ . Где находится фокус такой линзы? Углы преломления считать малыми.

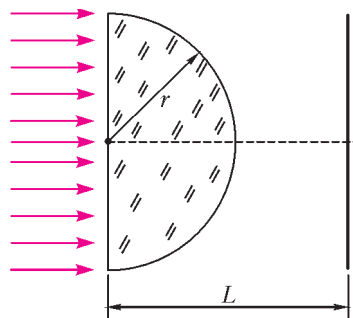


Рис. 16

6 (МГТУ им.Н.Э.Баумана). На половину шара радиусом  $r = 2$  см, изготовленного из стекла с показателем преломления  $n = \sqrt{2}$ , падает параллельный пучок лучей (рис.16). Определите радиус светлого пятна на экране, расположенном на расстоянии  $L = 4,82$  см от центра шара.

7. На каком расстоянии от центра стеклянного шара радиусом  $R$  должен находиться муравей, чтобы его изображение за шаром было натуральной величины? Показатель преломления стекла равен  $n$ .

8 (МГУ). Световой луч падает на поверхность стеклянного шара. Угол падения  $\alpha = 45^\circ$ , показатель преломления стекла

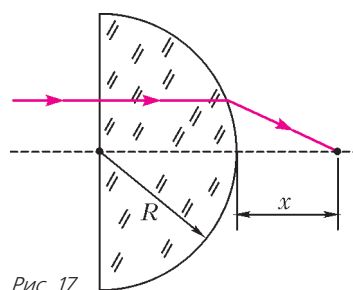


Рис. 17

$n = \sqrt{2}$ . Найдите угол между падающим лучом и лучом, вышедшим из шара.

9 (химфак МГУ). Тонкий пучок света падает нормально на стеклянное полушарие радиусом  $R = 30$  см с показателем преломления  $n = \frac{4}{3}$  (рис.17). Определите расстояние  $x$  от выпук-

лой поверхности полушария до точки, в которой соберется этот пучок.

10 (химфак МГУ). Определите, какова должна быть связь преломляющего угла стеклянной призмы  $\varphi$  с показателем преломления призмы  $n$ , если углы падения луча и выхода его из призмы равны  $\alpha$  (рис.18). Также имеет место следующее условие:  $\operatorname{tg} \alpha = n$ .

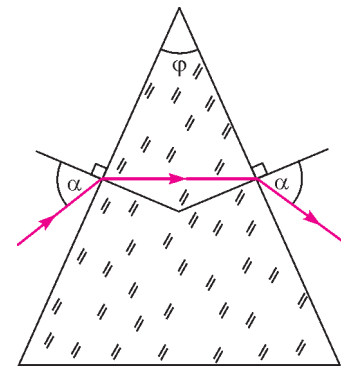


Рис. 18

11. Узкий пучок света, пройдя через полушарие из стекла с показателем преломления  $n$ , собирается на расстоянии  $x$  от выпуклой поверхности (рис. 19). На каком расстоянии от плоской поверхности соберутся лучи, если пучок пустить с противоположной стороны?

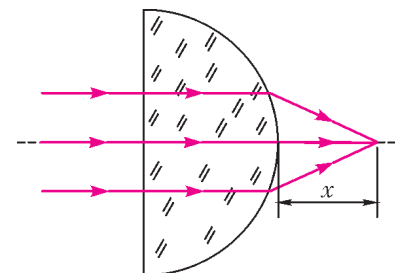


Рис. 19

12 (МГТУ им.Н.Э.Баумана). Равнобедренная стеклянная призма с малыми углами преломления  $\varphi$  (бипризма) помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально к ее основанию (рис.20). Показатель преломления стекла  $n = 1,57$ , основание призмы  $a = 5$  см. Найдите угол  $\varphi$ , если в середине экрана, расположенного на расстоянии  $l = 100$  см от призмы, образуется темная полоса шириной  $d = 1$  см.

13 (ЕГЭ). На поверхности воды плавает надувной плот шириной  $a = 4$  м и длиной  $l = 6$  м. Небо затянуто сплошным облачным покровом, полностью рассеивающим солнечный свет. Определите глубину тени под плотом. Глубиной погружения плота и рассеиванием света водой пренебrecь. Показатель преломления воды относительно воздуха принять равным  $n = 4/3$ .

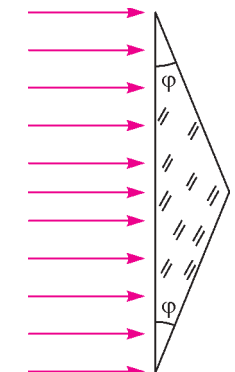


Рис. 20

14. На лист бумаги с текстом положили стеклянный куб с зачерненной верхней гранью. При каких показателях преломления стекла текст нельзя увидеть через боковые грани куба?

### Вниманию наших читателей

В статье «Новый прием в школы-интернаты при университетах» в «Кванте» №5-6 за 2012 год в условии задачи 3 задания по математике для поступающих в 10 класс физико-математического отделения допущена опечатка. Приводим правильное условие этой задачи.

3. Найдите все неотрицательные ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) решения уравнения  $8xy = (x + y)(x + 1)(y + 1)$ .

## ОЛИМПИАДЫ

# XXXIV Турнир городов

### ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2012 ГОД)

#### Базовый вариант

8–9 классы

1. (3)<sup>1</sup> Про группу из пяти человек известно, что Алеша на 1 год старше Алексева, Боря на 2 года старше Борисова, Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева, а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев?

*Е.Бакаев*

2. (4) См. задачу M2290,а «Задачника «Кванта».

3. (5) Таблица  $10 \times 10$  заполняется по правилам игры «Сапер»: в некоторые клетки ставят по mine, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

*А.Эвнин*

4. (5) Окружность касается сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  параллелограмма  $ABCD$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно. Докажите, что прямая  $KL$  делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины  $C$  на прямую  $AB$ .

*П.Кожевников*

5. (5) См. задачу M2287,а «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1. (4) См. задачу 3 для 8–9 классов для таблицы  $m \times n$ .

2. Даны выпуклый многогранник и сфера, которая пересекает каждое ребро многогранника в двух точках. Точки пересечения со сферой делят каждое ребро на три равных отрезка. Обязательно ли тогда все грани многогранника:

- (2) равные многоугольники;
- (3) правильные многоугольники?

*Г.Гальперин*

3. (5) См. задачу M2287,б «Задачника «Кванта».

- (2) См. задачу M2290,а «Задачника «Кванта».
- (3) См. задачу M2290,б «Задачника «Кванта».

5. (5) Из 239 неотличимых на вид монет две – одинаковые фальшивые, а остальные – одинаковые настоящие, отличающиеся от фальшивых по весу. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета тяжелее – фальшивая или настоящая? Сами фальшивые монеты находить не нужно.

*К.Кноп*

#### Сложный вариант

8–9 классы

1. (4) См. задачу M2286 «Задачника «Кванта».

<sup>1</sup> В скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за решение. Итог подводился по трем задачам, в которых достигнуты наилучшие результаты.

2. (5) Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 222 ореха по двум коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число  $N$  от 1 до 222. Далее Ноздрев перекладывает, если надо, один или несколько орехов в пустую третью коробочку и предъявляет Чичикову одну или две коробочки, где в сумме ровно  $N$  орехов. В результате Чичиков получает столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев?

*А.Подольский*

3. (6) См. задачу M2289 «Задачника «Кванта».

4. (7) Дан треугольник  $ABC$ . Пусть  $I$  – центр вписанной в него окружности,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $AIB$ ,  $BIC$  и  $AIC$  соответственно. Оказалось, что центр окружности, вписанной в треугольник  $XYZ$ , совпадает с  $I$ . Обязательно ли тогда треугольник  $ABC$  равносторонний?

*Б.Френкин*

5. (8) Машина ездит по кольцевой трассе по часовой стрелке. В полдень в две разные точки трассы встали два наблюдателя. К какому-то моменту машина проехала возле каждого наблюдателя не менее 30 раз. Первый наблюдатель заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду быстрее, чем предыдущий. Второй заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду медленнее, чем предыдущий. Докажите, что произошло не менее полутора часов.

*В.Брагин*

6. а) (4) Внутри окружности находится некоторая точка  $A$ . Через  $A$  провели две перпендикулярные прямые, пересекающие окружность в четырех точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора таких двух прямых.

б) (4) См. задачу M2292,а «Задачника «Кванта».

*И.Митрофанов*

7. (10) См. задачу M2293 «Задачника «Кванта».

10–11 классы

1. (4) Дана бесконечная последовательность чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Известно, что для любого номера  $k$  можно указать такое натуральное число  $t$ , что  $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \dots$ . Обязательно ли тогда эта последовательность периодическая, т.е. существует ли такое натуральное  $T$ , что  $a_k = a_{k+T}$  при любом натуральном  $k$ ?

*Л.Штейнгарц*

2. (5) Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 1001 орех по трем коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число  $N$  от 1 до 1001. Далее Ноздрев перекладывает, если надо, один или несколько орехов в пустую четвертую коробочку и предъявляет Чичикову одну или несколько коробочек, где в сумме ровно  $N$  орехов. В результате Чичиков получает столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев?

*А.Подольский*

3. (6) См. задачу 5 для 8–9 классов.

4. (8) На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $C_1$  и  $A_1$  соответственно, отличные от вершин. Пусть  $K$  – середина  $A_1C_1$ , а  $I$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Оказалось, что четырехугольник  $A_1BC_1I$  вписанный. Докажите, что угол  $AKC$  тупой.

*А.Полянский*

5. (8) См. задачу M2293 «Задачника «Кванта».

6. а) (5) Внутри сферы находится некоторая точка  $A$ . Через  $A$  провели три попарно перпендикулярные прямые, пересекающие сферу в шести точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора такой тройки прямых.

б) (5) См. задачу M2292,6 «Задачника «Кванта».

*И.Митрофанов*

7. (10) Клетчатая полоска  $1 \times 1000000$  разбита на 100 сегментов. В каждой клетке записано целое число, причем в клетках, лежащих в одном сегменте, числа совпадают. В каждую клетку поставили по фишке. Затем сделали такую операцию: все фишки одновременно передвинули, каждую – на то количество клеток вправо, которое указано в ее клетке (если число отрицательно, то фишка движется влево); при этом оказалось, что в каждую клетку снова попало по фишке. Эту операцию повторили много раз. Для каждой фишки первого сегмента посчитали, через сколько операций она впервые снова оказалась в этом сегменте. Докажите, что среди посчитанных чисел не более 100 различных.

*И.Митрофанов*

*Публикацию подготовили  
С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов*

## Московская студенческая олимпиада по физике 2012 года

21 апреля 2012 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) имени Н.Э.Баумана состоялся II (Московский) тур Всероссийской студенческой олимпиады по физике в технических вузах. По результатам личных соревнований и соревнований команд подведены итоги олимпиады. Они таковы.

В личном зачете места распределились следующим образом: 1 место – Петр Карпов, 5 курс, Национальный исследовательский технологический университет (НИТУ) «МИСиС»; 2 место – Михаил Шитов, 1 курс, Обнинский институт атомной энергетики – филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»; 3 место – Иван Никитин, 1 курс, МГТУ имени Н.Э.Баумана.

В командном зачете 1 место занял МГТУ имени Н.Э.Баумана (74 балла); 2 место – НИТУ «МИСиС» (66 баллов); 3 место – Московский институт электронной техники (61 балл); 4 место – Московский государственный университет нефти и газа имени И.М.Губкина (53 балла); 5 место – Обнинский институт атомной энергетики (45 баллов).

### Задачи олимпиады

1. Два трактора тащат ящик, который вместе с ними находится в вершинах равностороннего треугольника. Три натянутых троса одними концами закреплены на тракторах и ящике, а другими концами связаны в узел, находящийся в центре треугольника. Направление движения каждого трактора совпадает с линией натяжения троса, закрепленного на нем, а скорости тракторов равны  $v$  и  $u$ . Определите скорость ящика и силу натяжения тросов, если масса ящика  $M$ , а коэффициент трения ящика с поверхностью земли  $\mu$ .

2. Космический корабль плавно удаляется от Земли по спиралеобразной траектории под действием реактивной силы  $F$ , много меньшей силы тяжести и направленной вдоль вектора скорости. Определите угол между вектором реактивной силы  $\vec{F}$  и вектором силы тяжести  $\vec{F}_T$ .

3. На носу и на корме катера массой  $M$  установлены упоры на расстоянии  $L$  друг от друга. По палубе катера скользит без трения от кормы к носу тяжелый груз массой  $m$  со скоростью  $v_0$ . Груз испытывает абсолютно упругое взаимодействие с упорами. Определите максимальное смещение катера от

начального положения и смещение катера до полной остановки, если сила сопротивления воды  $F_c = -rv$ , где  $rL/(Mv_0) \gg 1$ , а катер вначале покоился.

4. Прямая трубка длиной  $L$  и поперечным сечением  $S$  вращается относительно одного из концов в горизонтальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$ . Через трубку в направлении от оси вращения вытекает вода со скоростью  $v$ . Определите момент силы, который необходимо прикладывать для поддержания постоянной угловой скорости вращения.

5. Реактивный двигатель представляет из себя сопло в виде трубки постоянного сечения  $S$ . Стенки сопла нагреваются таким образом, что температура газа на входе и на выходе одинакова и равна  $T$ . На входе давление газа  $p_1$ , скорость газа  $v_1 = \sqrt{(RT/M)}/2$ , где  $M$  – молярная масса газа. Определите скорость газа на выходе  $v_2$  и силу тяги двигателя  $F$ .

6. Заряд  $Q$  расположен около заземленной металлической сферы радиусом  $R$  на расстоянии  $\sqrt{2}R$  от ее центра. Определите заряд  $q$  на сегменте сферы, отсеченном конусом с полууглом  $\pi/4$  при вершине, направленном из центра сферы в сторону заряда.

7. Между двумя квадратными параллельными незаряженными металлическими пластинами со стороной  $L$ , расстояние между которыми  $d$ , поместили квадратную пластину, равномерно заряженную с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , со стороной  $l < L$  на расстоянии  $b < d \ll l$  от нижней пластины, которую при этом заземлили. Определите потенциал верхней пластины.

8. Трансформаторы имеют индуктивности первичных обмоток  $L_1$  и  $L_2$  и коэффициенты трансформации  $k_1$  и  $k_2$  соответственно. Первичные обмотки соединили последовательно, и вторичные обмотки соединили так же. На первичные обмотки подали переменное напряжение с амплитудой  $U_0$ . Определите напряжение на вторичных обмотках.

9. На круглое отверстие нормально падает свет с длиной волны  $\lambda$  и интенсивностью  $I_0$  от точечного источника, находящегося от него на расстоянии  $a$ . Какова интенсивность света в точке наблюдения, находящейся на оси системы на расстоянии  $2a$  от отверстия, если радиус отверстия  $r = \sqrt{a\lambda}$ ?

*Публикацию подготовил В.Шевчук*

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2012 г.)

1. Допустим, что не все точки лежат на одной прямой. Тогда какие-то три из них будут вершинами треугольника, одна из сторон которого равна 1. Но так как все длины сторон – натуральные числа, в этом треугольнике не может быть выполнено неравенство треугольника: одна из двух других его сторон больше второй как минимум на 1. Поэтому все точки должны лежать на одной прямой. Пример подходящего расположения: точки  $A, B, C, D$ , лежащие на одной прямой в таком порядке, и  $AB = 1, BC = 3, CD = 2$ .

2. а) 12 и 18.

б) Если  $a$  и  $b$  – различные простые, то числа  $a^2b$  и  $ab^2$  будут близнецами. У каждого из них по шесть делителей (например, у числа  $a^2b$  это  $1, a, b, a^2, ab$  и  $a^2b$ ), и четыре из них общие для обоих чисел. Поскольку простых чисел бесконечно много, то и таких пар близнецов можно построить бесконечно много. Разумеется, не все близнецы получаются таким способом: например, числа 60 и 90 тоже близнецы.

3. Не может.

Пусть для определенности слон ходит по белым полям, а конь стоит на d4. С этого поля конь может пойти на любое из белых полей c2, e2, c6, e6. Допустим, что слон бьет какие-то два из них – больше он при всем желании одновременно бить не может. Нетрудно убедиться, что после следующего хода слон сможет побить только одно из двух оставшихся полей. Поэтому за любые два последовательных хода слона хотя бы одно из этих четырех полей не окажется под боем. Значит, у коня всегда есть шанс сходить именно на то поле из четырех, которое слон не побьет, а потом вернуться на d4. Если предположить, что конь обладает телепатическими способностями, то он сможет оставаться не пойманным сколь угодно долго, действуя таким образом. Значит, у слона нет гарантированной стратегии для поимки коня.

4. а) Нельзя.

Камнем преткновения в данном случае является делимость на 5. В самом деле, в получившемся после вычеркивания пятерки числе не останется ни одной пятерки и ни одного нуля (нулей-то вообще не было). Поэтому это число не будет делиться на 5.

б) Можно.

Вопрос, как такое число найти. С учетом решения пункта а) ясно, что число должно оканчиваться нулем. Это снимает проблемы с делимостью на 5 и на 2. Правда, чтобы число делилось на 4, надо, чтобы предпоследняя цифра была четная. Поэтому имеет смысл, чтобы число оканчивалось цифрами ...20. В этом случае все будет в порядке и с делимостью на 4. А для делимости на 8 добавим еще и единицу. Итак, если число оканчивается цифрами ...120, то все будет в порядке с делимостью на 2, 4, 5 и 8.

Теперь заметим, что сумма всех цифр числа равна  $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ , и если из нее вычесть 3, то она будет делиться на 3, если же вычесть 9 – то на 9. Поэтому вопросы с делимостью на 3 и на 9 решены, по сути, автоматически. Поскольку число, оканчивающееся цифрами ...120, после вычеркивания шестерки останется четным и сумма цифр его, очевидно, будет делиться на 3, то и с делимостью на 6 тоже вопрос решен. Что же осталось? Только семерка. Здесь уже ничего не придумаешь, кроме подбора. После нескольких попыток нетрудно выяснить, что, например, число 345689120 делится на 7, поэтому искомым может быть, допустим, число 3456789120.

5. Ступенчатая фигура в левом верхнем углу (рис. 1) состоит из шести квадратиков  $2 \times 2$ , поэтому в ней сумма не больше  $6 \cdot 12 = 72$ . То же верно для фигуры в правом нижнем углу.

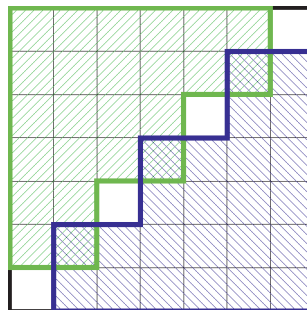


Рис. 1

9	3	9	3	9	3	9
0	0	0	0	0	0	0
9	3	9	3	9	3	9
0	0	0	0	0	0	0
9	3	9	3	9	3	9
0	0	0	0	0	0	0
9	3	9	3	9	3	9

Рис. 2

Каждая из клеток таблицы вне диагонали покрыта этими фигурами один раз, а каждая клетка диагонали – 0 или 2 раза. В каждой из четырех непокрытых клеток число не больше девяти. Поэтому общая сумма чисел таблицы заведомо не больше  $72 \cdot 2 + 9 \cdot 4 = 180$ . Чтобы получить именно такую сумму, обязательно надо поставить на непокрытых клетках диагонали девятки, а на дважды покрытых клетках – нули. Теперь надо заполнить остальные клетки так, чтобы в каждом квадратике  $2 \times 2$  обеих ступенчатых фигур сумма равнялась 12. Это можно сделать, например, используя кроме нулей и девяток еще тройки, расположив их так, как показано на рисунке 2. Видно, что и во всех вообще квадратиках  $2 \times 2$  сумма равна 12.

### МЕНЬШЕ ЗНАЕШЬ – КРЕПЧЕ СПИШЬ

Такое расположение существует, и оно – единственное (рис. 3).

Как его найти? Вот краткое описание рассуждений.

Так как расположения, переходящие друг в друга при поворотах и отражениях, считаем одинаковыми, то следует ограничиться теми, у которых восьмерка стоит *не в углу* (вариант, когда она в

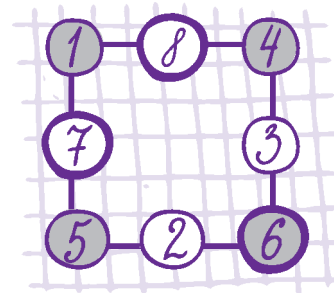


Рис. 3

углу, исчерпывающе «проработал» Олег), а в середине стороны, для определенности – верхней (т.е. в обозначениях, введенных нами,  $B = 8$ ). В одной строке с восьмеркой могут находиться либо единица с четверкой, либо двойка с тройкой. Рассмотрим оба варианта. 1) Пусть это числа 1 и 4. Возьмем для определенности  $A = 1$  и  $B = 4$  (а если наоборот, получим зеркальное отражение, что нового решения не дает). Так как сумма чисел в левой вертикали равна 13, то  $Ж + И = 12$ . Поэтому  $Ж = 5, И = 7$  или наоборот. Если  $Ж = 5$ , то, вспомнив, что сумма чисел в серых кружочках равна 16, получаем  $Д = 6$ . Остальные числа определяются автоматически, и мы получаем приведенный выше ответ. Ну а если  $Ж = 7$ , то  $Д = 4$ , что недопустимо, поскольку  $B = 4$ .

2) Пусть это числа 2 и 3. Для определенности положим  $A = 2$  и  $B = 3$ . Так как сумма чисел в левой вертикали равна 13, то  $Ж + И = 11$ , что может быть представлено (исключая использованные уже числа) как  $11 = 4 + 7 = 5 + 6$ . Аналогично для правой вертикали  $Г + Д = 10$ , что представляется единственным способом:  $10 = 4 + 6$ . Отсюда моментально следует, что в левой и правой вертикалях имеются одинаковые числа (либо 4, либо 6), что недопустимо. Так что этот случай решений не дает.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

## Вопросы и задачи

1. См. рис.4.

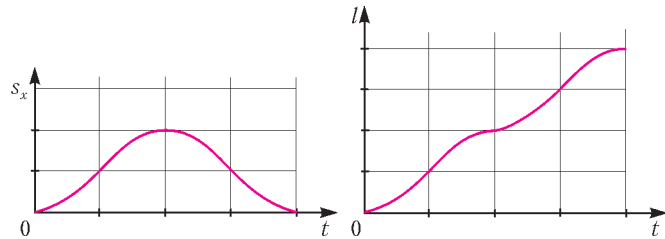


Рис. 4

2. Движение автомобиля сказывается только на величине горизонтальных составляющих скорости и ускорения предмета и не влияет на его движение по вертикали, поэтому во всех случаях предмет будет падать одно и то же время.

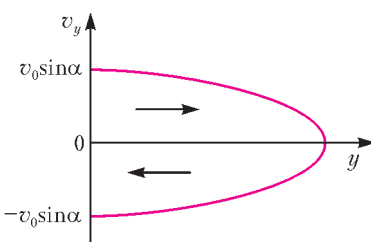


Рис. 5

случаях предмет будет падать одно и то же время.

3.  $v_y = \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gy}$  (рис.5), знак «плюс» соответствует подъему тела, «минус» – спуску.

4. Ускорение одинаково во всех точках параболической траектории тела и равно  $g$ .

5.  $\tau = \frac{v_0 \sqrt{2}}{a}$ ; задачу можно свести к вычислению изменения скорости при полете тела, брошенного под углом  $45^\circ$  к горизонту (рис.6).

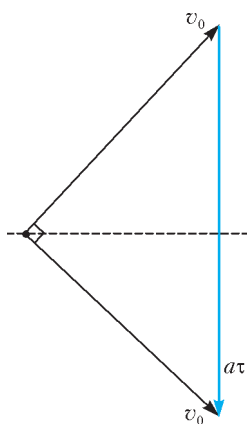


Рис. 6

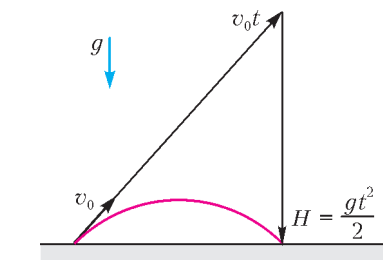


Рис. 7

6. Изобразив на рисунке 7 векторы, составляющие перемещение камня, получим  $H = \frac{gt^2}{2} = 5 \text{ м}$ .

7. В системе отсчета, связанной с телом  $A$ , скорость тела  $B$  постоянна по величине и направлению. Тела встретятся, если вектор начальной скорости тела  $B$  направлен в точку  $A$ , т.е.

если  $\text{tg } \alpha = \frac{H}{s} = \sqrt{3}$ , откуда  $\alpha = 60^\circ$ .

8. Это делается для того, чтобы вода, двигаясь по траектории свободно брошенного тела, не производила давления на плотину.

9. Для этого самолет должен двигаться с ускорением, направленным вниз и равным  $g$ . Иными словами – двигаться подобно телу, брошенному под углом к горизонту в вакууме, т.е. по параболе.

10. В начальной и конечной точках параболической траектории мощность имеет равные и наибольшие по модулю значения, а в вершине параболы она наименьшая и равная нулю.

11.  $v_{\min} = \sqrt{gR}$  (величина этой скорости рассчитывается из условия равенства нулю силы реакции опоры в начале закругления).

12. Поверхность воды принимает форму части параболоида вращения (рис.8).

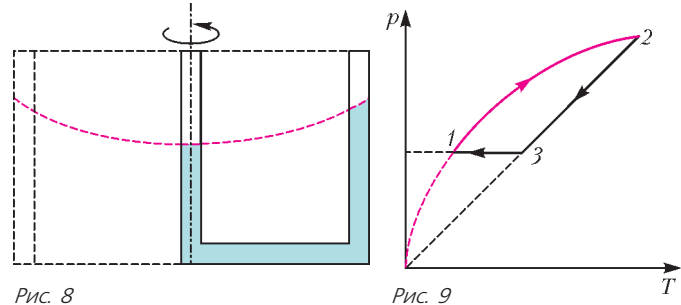


Рис. 8

Рис. 9

13. График приведен на рисунке 9. На участке 1–2 давление газа меняется по закону  $p = \alpha \sqrt{T}$ , где  $\alpha$  – некоторая постоянная.

14. Температура будет меняться по параболическому закону – так, как показано на рисунке 10, достигая максимума в середине процесса.

15. Возможные параболические траектории движения электрона изображены на рисунке 11.

16. Зависимость  $P(I) = \xi I - I^2 r$  приведена на рисунке 12.

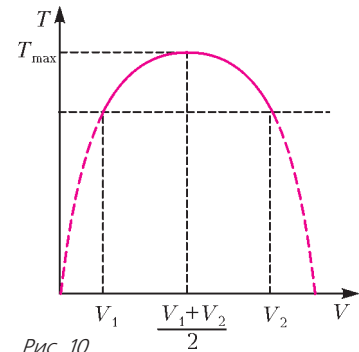


Рис. 10

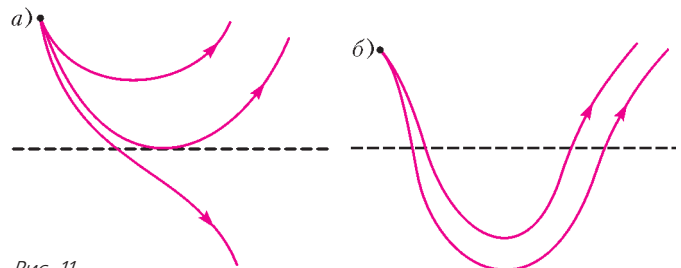


Рис. 11

17. Падающая по параболе струя воды становится оптическим волноводом. Лучи света испытывают на границе вода–воздух полное отражение и выходят из струи лишь в месте ее падения на землю.

## Микроопыт

Светлые области на поверхности «экрана» будут иметь контуры конических сечений. Последовательно можно получить очертания круга, эллипса, параболы и гиперболы.

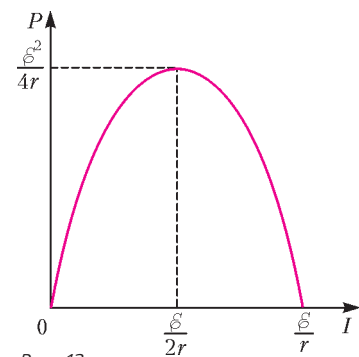


Рис. 12

## ГЕОМЕТРИЯ СВЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ

- $\delta = 2\alpha$ .
- $l' = l$ .
- $x = 0,2 \text{ см}$ .
- $n = 2 \cos \varphi = 1,73$  при  $\varphi < 45^\circ$ .
- $l = 2R \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{5}{3} \text{ см}$  (от центра сферической поверхности).
- $R = L - rn = 2 \text{ см}$ .
- $l = \frac{R}{n-1}$ .



8.  $\gamma = 2\alpha - 2\arcsin \frac{\sin \alpha}{n} = 30^\circ$ .    9.  $x = \frac{R}{n-1} = 90$  см.  
 10.  $\varphi = 2\arctg \frac{1}{n}$ .    11.  $x' = \frac{x}{n}$ .  
 12.  $\varphi = \frac{a+d^n}{2l(n-1)} = 0,05$  рад =  $3^\circ$ .    13.  $h = 1,76$  м.    14.  $n > \sqrt{2}$ .

**XXXIV ТУРНИР ГОРОДОВ**

**ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2012 ГОД)**

**Базовый вариант**

*8–9 классы*

1. Сумма возрастов Алеши, Бори, Васи, Гриши и Димы равна сумме возрастов Алексеева, Борисова, Васильева, Григорьева и Дмитриева. Значит, Дмитриев старше Димы на  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  лет.  
 3. Сумма всех чисел таблицы равна числу пар, состоящих из соседних заминированной и незаминированной клеток. После нашей операции эти пары сохраняются, т.е. сумма не изменится.  
 4. Пусть  $CH$  – указанная высота,  $N$  – ее точка пересечения с прямой  $KL$ . Ясно, что  $KM$  – диаметр окружности, а  $CHKM$  – прямоугольник. Пусть  $O$  – центр окружности. Высота  $CH$  равна диаметру, поэтому достаточно доказать, что  $CN = OK$ . Поскольку  $CO$  – биссектриса угла  $C$  равнобедренного треугольника  $LCM$ , то  $CO$  и  $LM$  перпендикулярны. Но и прямая  $LK$  перпендикулярна  $LM$  (угол  $KLM$  опирается на диаметр, а значит, прямой). Следовательно,  $CNKO$  – параллелограмм, откуда  $CN = OK$ .

*10 – 11 классы*

2. а) Не обязательно.  
 Рассмотрим правильную треугольную призму с квадратными боковыми гранями. Отметим на каждом ребре точки, делящие его на три равные части. Эти точки равноудалены от центра призмы, т.е. лежат на сфере соответствующего радиуса.  
 б) Обязательно.  
 Пусть  $A_1 \dots A_n$  – одна из граней многогранника. Все точки  $B_i, C_i$ , делящие его стороны  $A_{i-1}A_i$  на три равные части, лежат на одной окружности (пересечении сферы с плоскостью грани) с центром  $O$ . Пусть  $A_{i-1}A_i = 3a$ ,  $A_iA_{i+1} = 3b$ . По теореме о секущей

$$A_i B_i \cdot A_i C_i = A_i B_{i+1} \cdot A_i C_{i+1} \Leftrightarrow 2a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Значит, все стороны грани равны. Поэтому равны и все отрезки  $B_i C_i$  и равнобедренные треугольники  $B_i O C_i$ . Следовательно, равны все треугольники вида  $B_i O A_i$ , углы  $B_i A_i O$  и углы  $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1} = 2\angle B_i A_i O$ .

5. Разобьем все монеты на группы А, Б, В и Г из соответственно 30, 30, 60 и 119 монет. Сначала сравним А с Б, затем А + Б с В. Возможны 4 случая.

1)  $A = B$ ,  $A + B = V$ . Это значит, что все 120 монет в  $A + B + V$  – настоящие. Отложив из  $A + B + V$  любую монету и сравнив остальное с Г (где точно есть фальшивые монеты), узнаем требуемое.

2)  $A = B$ ,  $A + B \neq V$ . Тогда либо в А и в Б есть по фальшивой монете, либо все монеты в  $A + B$  – настоящие, а в В есть фальшивые (одна или две). Отложив одну монету из А, мы заведемо оставим фальшивую монету в Б + В. Сравним 119 взвешенных монет (без отложенной) с Г. Если равновесие, то фальшивые есть в Г и В, а в  $A + B$  их нет. Поэтому результат второго взвешивания определяет соотношение весов.

Если равновесия нет, то в Г все монеты настоящие, и нужную информацию дает результат последнего взвешивания.

3)  $A \neq B$ ,  $A + B = V$ . Значит, в  $A + B$ , а следовательно, и в В есть фальшивые монеты. Сравнив В с 60 монетами из Г (они настоящие), узнаем, какие монеты легче.

4)  $A \neq B$ ,  $A + B \neq V$ . В  $A + B$  фальшивые монеты точно есть, значит, в В – нет, т.е. там все монеты настоящие. Но тогда уже результат второго взвешивания дает нужную информацию.

**Сложный вариант**

*8–9 классы*

2. 37 душ.

*Оценка сверху.* Положив в коробочки 74 и 148 орехов, Ноздрев может при любом  $N$  переложить не более 37. Действительно,  $N$  можно записать в виде  $74k + r$ , где  $k = 0, 1, 2, 3$ , а  $-37 \leq r < 37$ . Если  $r = 0$ , то  $k > 0$ , и числа 74, 148 и 222 можно набрать одной или двумя коробочками, ничего не перекладывая. Если  $r < 0$ , то набрав число  $74k$  одной или двумя коробочками, отложим из этих коробочек в третью  $r$  орехов. Если  $r > 0$ ,  $74k = 0$ , 74 или 148. Взяв подходящую коробочку или не взяв ни одной, добавим к ним третью коробочку, куда из не взятой переложены  $r$  орехов.

*Оценка снизу.* Покажем, что для любой раскладки есть  $N$ , которое потребует переложить не менее 37 орехов. Пусть в коробочках лежат  $p$  и  $q$  орехов,  $q \geq p$ . Если  $p \geq 74$ , то при  $N = 37$  придется переложить не менее 37 орехов. Если  $p < 74$ , то  $q > 148$ . Чтобы получить  $N = 111$  надо либо к  $p$  орехам добавить более 37 штук, либо от  $q$  орехов отнять более 37 штук.

4. Пусть  $K$  – точка пересечения отрезков  $XY$  и  $BI$ ,  $L$  – отрезков  $YZ$  и  $CI$ , а  $M$  – отрезков  $XZ$  и  $AI$ . По условию отрезок  $XI$  делит пополам углы  $KIM$  и  $KXM$ , поэтому треугольники  $IKX$  и  $IMX$  равны. Аналогично, равны треугольники  $IKY$  и  $ILY$ ,  $ILZ$  и  $IMZ$ . Следовательно,

$$\angle IKY = \angle ILY = 180^\circ - \angle ILZ = 180^\circ - \angle IMZ = \angle IMX + \angle IKX,$$

т.е.  $BI \perp XY$ .

В треугольнике  $XBY$  отрезок  $BK$  служит биссектрисой и высотой, а значит, и медианой, т.е. прямая  $BI$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $XY$ . Поэтому  $\angle XIK = \angle YIK$ . Но

$$\angle XIK = \frac{1}{2} \angle AIB = \frac{1}{2} \left( 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C \right), \text{ а } \angle YIK = \frac{1}{2} \left( 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A \right).$$

Следовательно,  $\angle A = \angle C$ . Аналогично,  $\angle A = \angle B$ .

5. Каждый наблюдатель насчитал не менее 29 кругов. Наблюдателя, у которого время прохождения круга растёт, назовем Плюсом, а другого – Минусом. Пусть для Плюса машина проходит круги с 1-го по 29-й за  $p - 14, p - 13, \dots, p + 14$  секунд, а у Минуса – за  $m + 14, m + 13, \dots, m - 14$  секунд. Суммарное время прохождения 29 кругов равно  $29p$  и  $29m$  соответственно.

Первые 15 «кругов Плюса» покрывают 14 «кругов Минуса»: либо с 1-го по 14-й (если Плюс впервые встретился машине раньше Минуса), либо со 2-го по 15-й (если Минус встретился раньше). В любом случае  $(p - 14) + (p - 13) + \dots + p > (m + 13) + (m + 12) + \dots + m$ .

С другой стороны, последние 15 «кругов Минуса» покрывают 14 «кругов Плюса»: либо с 16-го по 29-й, либо с 15-го по 28-й, откуда  $(m - 14) + (m - 13) + \dots + m > (p + 13) + (p + 12) + \dots + p$ .

Сложив эти неравенства и приведя подобные, получим  $p + m > 392$ , откуда  $29p + 29m > 29 \cdot 392$ . Тогда хоть одно из суммарных времен не меньше  $29 \cdot 196 = 5684$ , что больше полутора часов (5400 с).

6. а) Если точка  $A$  совпадает с центром  $O$  окружности, то утверждение очевидно. В противном случае докажем, что центр масс – это середина отрезка  $OA$ .

Прямые высекают две перпендикулярные хорды. У каждой хорды центр масс ее концов – середина этой хорды. Если одна из хорд – диаметр, то середина другой совпадает с  $A$ ,

поэтому центр масс – середина  $OA$ . Если обе хорды – не диаметр, то пусть  $B$  и  $C$  – их середины. Тогда  $OABC$  – прямоугольник, и центр масс – середина  $BC$ , которая совпадает с серединой  $OA$ .

#### 10–11 классы

1. Не обязательно.

Пусть  $a_n$  равно наибольшей степени 2, на которую делится  $n$  (в частности,  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 4, a_5 = 1, a_6 = 2, a_7 = 1, a_8 = 8$ ). Эта последовательность, очевидно, не периодична (в ней есть бесконечно много разных членов), однако для каждого  $k$  можно взять  $t = 2k$ . Действительно, числа  $k, 3k, 5k, 7k, \dots$  делятся на одну и ту же степень двойки.

2. 71 душу.

*Оценка сверху.* Положив в коробочки 143,  $286 = 2 \cdot 143$  и  $572 = 4 \cdot 143$  ореха, Ноздрев может при любом  $N$  переложить не более 71. Действительно,  $N$  можно представить в виде  $143k + r$ , где  $0 \leq k \leq 7$ , а  $-71 \leq r < 71$ . Если  $r = 0$ , то  $k > 0$ , и число  $143k$  можно набрать одной или несколькими коробочками, ничего не перекладывая. Если  $r < 0$ , то набрав коробочками число  $143k$ , отложим из этих коробочек в пустую  $r$  орехов. Если  $r > 0$ , то  $1001 - N = 143(7 - k) - r$ . Переложив  $r$  орехов, получим несколько коробочек с  $1001 - N$  орехами. Тогда в остальных коробочках  $N$  орехов, их и предьявим.

*Оценка снизу.* Покажем, что для любой раскладки есть  $N$ , которое потребует переложить не менее 71 ореха. Пусть в коробочках лежат  $x, y$  и  $z$  орехов. Шесть чисел  $x, y, z, x + y, x + z, y + z$  делят большой отрезок  $[0; 1001]$  на семь меньших (возможно, некоторые из них вырождены), среди них есть отрезок длины не менее  $\frac{1001}{7} = 143$ . На этом отрезке есть целое число, отстоящее от концов отрезка не менее чем на 71. Без перекладывания мы можем получать только наборы, где общее число орехов лежит на конце одного из семи малых отрезков. Чтобы изменить это число на  $r$ , надо переложить не менее  $r$  орехов.

4. Пусть  $M$  – середина  $AC$ , а  $A_2, B_2$  и  $C_2$  – точки касания вписанной окружности, соответственно, со сторонами  $BC, AC$  и  $AB$ . Далее,  $\angle A_1IC_1 = 180^\circ - \angle B = \angle A_2IC_2$ . Отсюда следует, что прямоугольные треугольники  $A_1A_2I$  и  $C_1C_2I$  равны (по катету и острому углу), причем один из них находится внутри четырехугольника  $BA_2IC_2$ , а второй – снаружи. Отсюда

$$AC_1 + CA_1 = AC_2 + CA_2 = AB_2 + CB_2 = AC.$$

Построим параллелограммы  $AC_1KD$  и  $CA_1KE$ . Тогда  $ADCE$  – тоже параллелограмм (возможно, вырожденный) и  $M$  – его центр, т.е. середина отрезка  $DE$ . Как известно, медиана меньше полусуммы соответствующих сторон, т.е.

$$KM < \frac{1}{2}(KD + KE) = \frac{1}{2}(AC_1 + CA_1) = \frac{1}{2}AC.$$

Это значит, что точка  $K$  лежит внутри окружности с диаметром  $AC$ , поэтому угол  $AKC$ , тупой.

6. а) Пусть  $O$  – центр сферы,  $Q$  – искомый центр масс. Прямые высекают хорды, и ясно, что  $Q$  – центр масс середин этих хорд (для икосаэдра, как центрально-симметричной фигуры, пары противоположных лучей тоже можно заменить прямыми, содержащими большие диагонали).

Средины хорд (обозначим их  $K, L, M$ ) – это проекции центра сферы  $O$  на проведенные прямые, поэтому  $\overline{AO} = \overline{AK} + \overline{AL} + \overline{AM}$  (вектор равен сумме своих проекций на три перпендикулярные оси), т.е.  $\overline{AQ} = \frac{1}{3}\overline{AO}$ .

7. Отметим 99 границ между сегментами. Назовем пару фишек особой, если на старте они были соседями в первом сегменте, но вернулись туда через разное число операций. Ясно, что в какой-то момент фишки особой пары впервые попали в

разные сегменты, причем до этого они в первый сегмент повторно не попадали. До этого они, очевидно, оставались соседями, значит, они и сейчас соседи по полоске, но их разделила граница. Докажем, что для каждой особой пары такая граница – своя. Допустим, что некоторая граница  $\Gamma$  впервые разделила две особые пары  $\Pi$  и  $P$ :  $\Pi$  после  $k$  операций,  $P$  – после  $m > k$  операций.

Заметим, что операция обратима: положения фишек в предыдущий момент определены однозначно. Откатаем назад  $k$  операций от момента разделения  $\Pi$  границей. Тогда фишки из  $\Pi$  вернутся на свои исходные места в первом сегменте. Теперь откатаем назад  $k$  операций от момента разделения  $P$  границей. Так как пара  $P$  занимала те же места, что  $\Pi$  при предыдущем откате, то они и попадут на те же места, т.е. в первый сегмент. Но это – положение фишек после  $m - k$  операций от старта. Значит, фишки пары  $P$  уже попадали повторно в первый сегмент. Но тогда они были разделены границей ранее, и разделение их границей  $\Gamma$  – не первое. Противоречие. Итак, количество особых пар не более 99. Значит, подсчитанные числа при движении по первому сегменту изменятся не более 99 раз, и таких чисел всего не больше 100.

#### МОСКОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2012 ГОДА

- $v_{я} = v + u$ ;  $F_{и} = \mu Mg$ .
- $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{2F}{F_T}$ .
- $s_{\max} = \frac{2mv_0}{r}$ ,  $s = \frac{mv_0}{r}$ .
- $M = \rho v S \omega L^2$ , где  $\rho$  – плотность воды.
- $v_2 = 2\sqrt{\frac{RT}{M}}$ ,  $F = p_1 S$ .
- $q = Q \frac{3 - \sqrt{2}}{4}$ .
- $\varphi = \frac{\sigma l^2 b}{\varepsilon_0 L^2}$ .
- $U = U_0 \frac{L_1 k_1 + L_2 k_2}{L_1 + L_2}$ .
- $I = \frac{2I_0}{9}$ .

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Л.В.Калиничева, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»  
Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными материалами  
в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru**

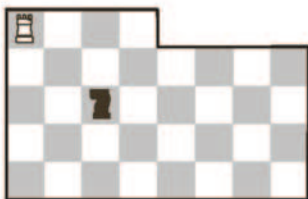
## КОМПЬЮТЕРЫ РЕШАЮТ И ОПРОВЕРГАЮТ?

Продолжаем рассказ о том, как компьютеры проявляют себя в шахматной композиции. Речь идет о решении машинами головоломок, задач и этюдов, об использовании их шахматными композиторами, проверке произведений и даже составлении композиций.

Разумеется, мы сейчас не касаемся достижений компьютеров в практической игре. Как мы знаем, они уже давно превзошли гроссмейстеров и даже чемпионов мира. Последний матч между сильнейшим компьютером и сильнейшим человеком состоялся в 2005 году, и тогда «Фриц» обыграл в классические шахматы чемпиона мира Владимира Крамника со счетом 4:2.

Вот один пример, лежащий на грани между шахматной задачей и головоломкой. Представьте себе, что на различных досках нестандартного размера ладья гоняется за конем, причем оба короля отсутствуют. Возникает вопрос: на каких досках ладья поймает коня, а на каких нет? Доскональное исследование этой задачи провел компьютер.

Стандартная доска малоинтересна, ввиду ее очевидной «шичейности»: справиться с конем невозможно, за исключением нескольких неудачных ситуаций для него. При уменьшении размеров доски коню становится все теснее и теснее. Вот две занятные позиции на урезанной доске, настоящие головоломки.



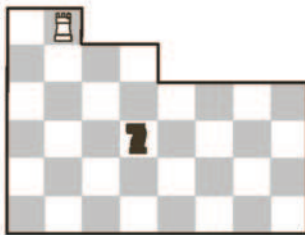
Здесь ладья ловит коня. 1. ♖a3! Смысл хода не столько в нападении на коня, сколько в контроле над центром доски. 1... ♗e2 2. ♜d3. Если бы фигуры стояли не на белых полях d3 и e2, а на черных d2 и e3, то при любом отступлении коня ладья забирала его за три хода. Цель белых и состоит в переходе к этой чернополюсной «оппозиции». Далее – основные варианты.

2... ♗f4 3. ♜e3! ♗d5 4. ♜f3 ♗b4 5. ♜c3 ♗d5 6. ♜c4 ♗e3 7. ♜d4 ♗c2 (не убежать коню и после 7... ♗f1 8. ♜e4 ♗d2 9. ♜e3 ♗f1 10. ♜e2 ♗g3 11. ♜e1) 8. ♜d1 ♗e3 9. ♜d2 ♗c4 10. ♜d3 ♗b2 11. ♜d4, и все кончено.

Или 2... ♗c1 3. ♜d2 ♗b3 4. ♜d1 ♗c5 5. ♜d4 ♗b3 6. ♜c4! Неожиданно выпуская коня на свободу, но тому недолго придется пользоваться ею.

6... ♗d2 7. ♜b4 ♗f3 8. ♜e4 ♗d2 9. ♜e3! и т.д.

Данная миниатюра – удачный образец компьютерного творчества. Оригинальная идея воплощена с рекордной экономичностью.



Тут урезанная доска имеет еще более необычную форму, а решение содержит 15 ходов – небольшая шахматная партия!

1. ♜b3! ♗f4 2. ♜f3 ♗d5 3. ♜f2! Ладья становится в засаду. 3... ♗b4 4. ♜d2 ♗a6. Конь оттеснен, но, прежде чем погибнуть, успевает промчаться по просторам доски. 5. ♜d4 ♗c5 6. ♜d5 ♗e4 7. ♜d3 ♗c5 8. ♜d4. Эта позиция уже возникала после пяти ходов, но на сей раз ход коня. 8... ♗b3. Теперь следует маневр ладьи, знакомый нам по предыдущей позиции. 9. ♜c4 ♗d2 10. ♜b4 ♗f1 11. ♜e4 ♗d2 12. ♜e3 ♗f1 13. ♜e2 ♗g3 14. ♜e1, и конь пойман.

Итак, содержательная борьба возникает на доске даже при столь скромном материале. Да, в данном случае робот поистине оказался на коне!

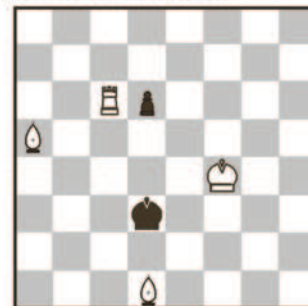
Перейдем теперь к настоящей шахматной композиции, где компьютеры тоже добились немало. Многие рекордные позиции из предыдущего номера «Кванта» можно рассматривать как этюды с заданием: белые начинают и выигрывают. Хотя они относятся к разряду аналитических (эстетических элементов в них маловато), следует признать, что машины добились заметных успехов в композиции – как в решении, так и в составлении этюдов.

Здесь надо сказать, что в наши дни ни один шахматный композитор не обходится в своей работе без ЭВМ. При составлении задач и этюдов позиции обязательно проверяются на компьютере. Если этюд – миниатюра (не больше семи фигур) или сводится к ней, то машина обращается к соответствующей эндшильной программе.

В этюдах число ходов не ограничено, и не каждый из них по зубам компьютеру. Другое дело – задача: число ходов строго фиксировано, и справиться с ней игровой программе легко путем простого перебора. При современном быстродействии любая задача проверяется за считанные секунды. Через ЭВМ «просеяны» многие сборники задач, и под микроскопом машин нередко обнаруживается брак: одни

позиции содержат побочные решения (дуали), в других мат ставится быстрее, чем требуется, третьи вообще не решаются. Недаром композиторы любят шутить, что нет задач правильных, а есть задачи непровергнутые!

Опровержение задачи порой отличается изяществом и вызывает удивление даже у самого автора. При этом изящны находятся и в произведениях знаменитых композиторов.



Мат в 4 хода

Решение этой известной миниатюры С.Лойда довольно симпатичное: 1. ♗c3 d5 2. ♗f3 d4 3. ♗b3 dc 4. ♜d6×. Увы, машина указала простое побочное решение: 1. ♗b6! ♗d2 2. ♗f3 ♗:d1 (2... ♗d3 3. ♗e3 и 4. ♗e2×) 3. ♗e3 и 4. ♜c1×; 1...d5 2. ♗f3 d4 3. ♗e2+ ♗d2 4. ♗a5×.



Мат в 2 хода

А с этой задачей Л.Лошинского, Л.Гугеля и В.Шифа произошло еще более забавное недоразумение. В ней нет побочного решения, потому что... нет решения вообще!

Замысел авторов заключался в 1. ♗:d3 с угрозой 2. ♗:c4×. На 1... ♗:g7 (♗f6, ♗:g7, ♜b2, ♜a2) с целью перекрыть пятую линию следует 2. ♗:g7 (соответственно, ♗d4, ♜g5, ♗:b2, ♗b2)×.

Итак, задача выглядит безукоризненной, но вмешивается компьютер и находит эффектное опровержение – 1... ♗d7!! и мата нет, а стало быть, нет и задачи.

Как мы видим, человек, а в данном случае сразу трое композиторов пропустили неожиданную реплику, причем в двухходовке. Разумеется, для компьютера такой прокол невозможен.

Е.Гук

# Опыт Эрстеда в ... МЕТРО



Если в вагоне метро у вас случайно оказался в руках компас, посмотрите на его стрелку, когда вагон будет разгоняться, трогаясь с места, или тормозиться перед остановкой. Вы увидите ...



(Продолжение — на странице 54 внутри журнала)