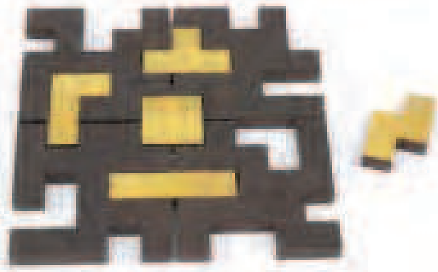
МАЙ/ИЮНЬ

ISSN 0130-2221
2012 · №3

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ПЯТЬ ТЕТРАМИНО

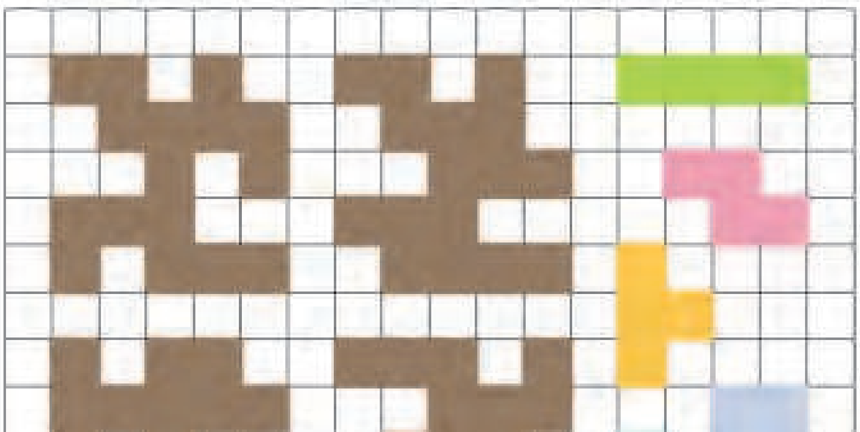
Тетрамино – это фигурка из четырех единичных квадратиков, которые склеены друг с другом по стороне. С точностью до поворотов и отражений таких фигурок всего пять. Каждую можно расположить так, что она будет похожа на букву латинского алфавита, поэтому их обычно называют этими буквами: I, L, O, T, Z.

Есть много головоломок и задач с тетрамино. Это и известная многим игра «Тетрис», и, например, такой вопрос: можно ли замостить прямоугольник, используя все пять тетрамино?

А недавно японец Минеюки Юемацу (Mineyuki Uyematsu) придумал еще одну головоломку с этими фигурками. Требуется так расположить четыре темно-коричневые детали, чтобы пять образовавшихся «дырок» можно было заполнить набором тетрамино (не должно остаться внутренних пустот). На приведенной вверху фотографии это не получилось: в пустую «дырку» никак нельзя поместить оставшуюся деталь.

Изящная и обманчивая простота этой игрушки была отмечена первым призом на конкурсе, проходившем в рамках XXXI Международного съезда любителей головоломок. Справитесь ли вы с ней быстрее, чем за 15 минут? Желаем удачи!

Е.Епифанов



КВАНТ МАЙ ИЮНЬ 2012 № 3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Сохранение импульса, уравнение Мещерского и банджи-джампинг

А.РЫБАКОВ

Очень редко появляются совсем новые сюжеты задач механики. Но сейчас такое произошло. Движение прыгуна в экстремальном аттракционе банджи-джампинг обладает некоторыми удивительными особенностями, которые требуют объяснения. Оказалось, что это можно сделать, если применить к прыгуну и привязанному к нему канату уравнение, выведенное нашим соотечественником еще в позапрошлом веке.

Экстремальный аттракцион

В телевизионных репортажах из дальних стран уже неоднократно рассказывалось о таком экстремальном развлечении: к ногам человека привязывают свободной конец упругого каната, другой конец которого закрепляют, после чего человека сталкивают с большой высоты (рис.1). Это и есть банджи-джампинг. Много ссылок на этот аттракцион дает Интернет, попал он уже и в Википедию. Будем для простоты называть его просто джампингом. В этом прыжке много разных фаз, и, соответственно, много удовольствий поджидают прыгуна. Но нас сейчас интересует только одно обстоятельство – видеосъемка показала, что человек летит вниз с ускорением, превышающем ускорение свободного падения g. На первый взгляд, это представляется удивительным – ведь, казалось бы, прыгун и часть каната ускоряются только силой тяжести, никаких других сил обнаружить не удается.

Однако начнем с самого начала. Выясним, к какому типу систем можно отнести прыгуна с канатом и какие законы (уравнения) надо использовать для описания динамики такой системы.

Прыгун и движущаяся часть каната – это типичный пример тела с переменной массой. Во избежание недоразумений надо сказать, что речь идет об изменении массы тела за счет отсоединения какой-то его части (или присоединения извне). В нашем случае при движении непрерывно увеличивается покоящаяся часть каната и, соответственно, уменьшается масса движущейся его части. Это очевидное обстоятельств и окажется важнейшим для наших дальнейших рассуждений.

Поставим самые напрашивающиеся вопросы. Что происходит с импульсом системы? Что происходит с ее механической энергией? Как записывается основное уравнение динамики для такой системы?

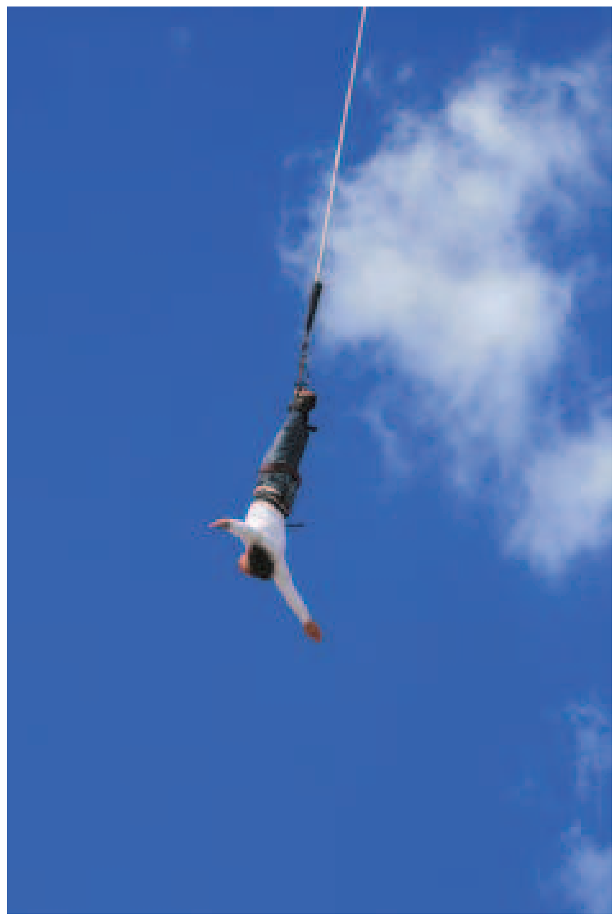


Рис. 1

Попытаемся ответить на все эти вопросы. Но прежде рассмотрим совсем простой, но очень важный для наших рассуждений пример.

Щелканье кнута и закон сохранения импульса

В раннем-раннем детстве я видел в дачном поселке под Ленинградом, как местные жители встречали вечером стадо коров (позднее коров в дачной местности уже не было). Подгоняя буренок, пастух щелкал кнутом. Вот оно!

Молодому читателю, возможно, надо напомнить, как устроен кнут. А устроен он очень просто: к палке (рукоятке, кнутовищу) привязан узкий длинный ремень (иногда – веревка). Это «устройство» называют еще бичом. Так, в известном стихотворении Н.А.Некрасова эти слова стоят рядом:

Там били женщину кнутом,
Крестьянку молодую.
Ни звука из ее груди,
Лишь бич свистал, играя…

Двинув кнутовище, пастух сообщает всему ремню импульс – а дальше начинается самое для нас интересное. Конец ремня, привязанный к остановившемуся кнутовищу, тормозится, и все меньшая часть ремня продолжает движение (рис.2). Но в точке перегиба

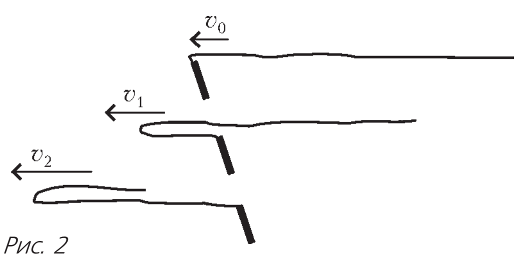


Рис. 2

никакая сила на движущуюся часть ремня не действует, значит, ее импульс не изменяется. А поскольку масса этой части ремня уменьшается, то скорость ее должна увеличиваться. Таким образом, движущаяся часть ремня непрерывно ускоряется. По-видимому, конец ремня даже переходит через скорость звука – и раздается характерный очень громкий щелчок.

Человек, привыкший к рассуждениям, основанным на втором законе Ньютона, может спросить: «Какая же сила ускоряет часть кнута?» В том-то и дело, что никакие внешние силы к ускорению части кнута не имеют отношения. А движущаяся часть ремня непрерывно ускоряется потому, что этого требует закон сохранения импульса. Аналогия с движением каната в джампинге совершенно очевидна. Привяжите к концу ремня какое-нибудь тело – аналогия станет еще нагляднее. Но в джампинге в дело вмешивается еще и сила тяжести. Значит, в общем случае нам надо иметь уравнение, описывающее движение тела переменной массы под действием внешних сил. В одном крайнем случае (в отсутствие внешних сил) уравнение должно обеспечивать сохранение импульса, как в случае с кнутом, в другом (при неизменной массе) – переходить в обычный второй закон Ньютона.

Порядок в этом вопросе навел еще в позапрошлом веке российский ученый Иван Всеволодович Мещерский.

Уравнение Мещерского

Иван Всеволодович Мещерский родился в Архангельске в 1859 году. С 1878 по 1882 год он учился на математическом отделении физико-математического факультета Петербургского университета. После окончания был оставлен в университете для подготовки к профессорскому званию. Первые результаты по интересующей нас теме относятся к 1893 году. В 1897 году Мещерский защищает магистерскую диссертацию на тему «Динамика точки переменной массы». Некоторые дополнительные результаты были опубликованы в 1904 году в работе «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае». Эти работы были включены в книгу И.В.Мещерского «Работы по механике тел переменной массы», изданную в 1949 году в серии «Классики естествознания». Именно это издание есть в моей личной библиотеке. (Несколько раз я приносил эту книгу в класс, чтобы показать ученикам, как удручающе громоздки уравнения механики, если они записаны без использования векторных обозначений.)

Мещерский оставил след не только как ученый, но и как выдающийся педагог высшей школы. С 1902 года до конца своих дней он возглавлял кафедру теоретической механики в Петербургском политехническом институте. Удивительна судьба выпущенного в 1914 году «Сборника задач по теоретической механике», составленного группой преподавателей под руководством И.В.Мещерского. У меня на полке стоит 33-е издание этого задачника, увидевшее свет в 1973 году, т.е. менее чем за 60 лет книга выдержала 33 издания! Другого такого примера я не знаю. А ведь в 1973 году история задачника отнюдь не закончилась. Многие сюжеты, которые нам сейчас известны по школьным и вузовским задачникам, впервые появились именно в этой книге.

Теперь – об уравнении Мещерского. Кратко напомним основополагающие моменты. Согласно Мещерскому, основной закон динамики тела переменной массы записывается в виде

$$M(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\,\frac{dM}{dt}\,, \qquad (*)$$

где $\vec{F}$ – сумма всех внешних сил, действующих на тело, $M(t)$ – зависящая от времени масса тела, $\frac{dM}{dt}$ – скорость изменения этой массы, $\vec{u}$ – относительная скорость отсоединяемого вещества (т.е. скорость отсоединяемых частей относительно «материнского» тела). Если речь идет именно об уменьшении массы, то, конечно, $\frac{dM}{dt} < 0$. Главный (для всех учебников) пример применения уравнения $(*)$ – это анализ движения ракеты, в этом случае u – скорость истечения продуктов сгорания топлива, $\left|\frac{dM}{dt}\right|$ – массовый расход топлива. В русскоязычной литературе уравнение $(*)$ называют уравнением Мещерского. Оно является следствием фундаментального закона изменения импульса для системы материальных точек. Поэтому, в частности, некоторые задачи на интересующую нас тему были решены до работ Мещерского без использования уравнения $(*)$. Можно переписать уравнение Мещерского еще в таком «почти симметричном» виде:

$$M\vec{v}\,' - M'\vec{u} = \vec{F}\,,$$

где производные по времени обозначены соответствующими буквами со штрихами.

Уравнение $(*)$ является обобщением второго закона Ньютона – к известным нам членам добавляется еще одно слагаемое. Конечно, все члены имеют размерность силы, и возникает соблазн назвать новое слагаемое тоже какой-нибудь силой. Так обычно и поступают авторы, пишущие об уравнении Мещерского. Они называют новое слагаемое «реактивной силой». Необходимость введения такой терминологии представляется весьма сомнительной. Эти авторы просто хотят сохранить возможность говорить, что тело (даже тело переменной массы) ускоряется какой-то силой. Но это не так! И мы это уже видели на примере кнута (и еще увидим ниже – в последнем разделе статьи).

В общем случае, конечно, уравнение Мещерского является, как и второй закон Ньютона, дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции $\vec{r}(t)$. Ограничиваясь в школьном курсе постоянными силами (и, соответственно, равноускоренным движением), мы как бы не замечаем этих математических проблем. Но с уравнением Мещерского так поступать не удается, кроме редчайших исключений. Практически любая содержательная задача о движении тела переменной массы приводит к дифференциальному уравнению.

Задача Кейли

На одном достаточно простом примере покажем, как записывается уравнение Мещерского для конкретного движения объекта интересующего нас типа и как можно, не гонясь за математической строгостью, найти его решение. Читатели, интересующиеся лишь основной линией наших рассуждений (о джампинге), вполне могут пропустить этот раздел.

В своей диссертации в обзоре литературы Мещерский пишет: «Изменение массы, совершающееся непрерывно, рассматривает впервые, насколько мне известно, Кейли». И действительно, английский математик Артур Кейли в 1857 году опубликовал статью, в которой проанализировал следующую задачу:

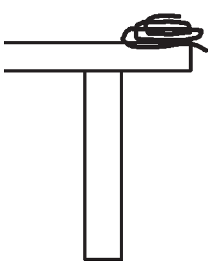


Рис. 3

Тяжелая цепь свернута в клубок на самом краю стола (рис.3), а одно звено свешивается за край стола. Как будет двигаться конец цепи, предоставленной самой себе?

Кейли, конечно, не знал уравнения Мещерского. Мы же воспользуемся этим уравнением. Будем отсчитывать вертикальную координату конца цепи x вниз от края стола. Запишем уравнение (∗) для движущегося участка цепи длиной x. Пусть масса единицы длины цепи равна ρ. Тогда движущийся участок имеет массу $m = \rho x$, на него действует сила тяжести $\rho g x$, за единицу времени масса этого участка увеличивается на ρv. Скорость элемента цепи, лежащего на столе, относительно движущегося участка цепи равна $u_x = -v$. Так что уравнение (∗) в проекции на ось x примет вид

$$m\frac{dv}{dt} = \rho x g - \rho v^2,$$

и мы получим следующее уравнение для функции $x(t)$:

$$xx'' = xg - x'^2.$$

Это, как уже сказано, и есть дифференциальное уравнение второго порядка (звучит пугающе). Математики умеют решать такие уравнения, выполняя формальные преобразования, придумывая замены переменных и тому подобное. Но мы же физики – мы пойдем своим путем.

Подумаем: какого типа движение может совершать свешивающийся участок цепи? О равномерном не может быть и речи. Может быть – равноускоренное? Что ж, попробуем.

Предположим, что свешивающийся со стола участок цепи движется с неким неизвестным нам пока постоянным ускорением a ($a < g$). Это предположение может показаться слишком смелым, но ведь мы ничем не рискуем – если оно неправильно, мы придем к противоречию и тогда будем придумывать что-нибудь другое. Итак, пусть

$$x'' = a = \text{const}.$$

Тогда

$$x' = at, \quad x = \frac{at^2}{2}.$$

Подставим эти соотношения в наше дифференциальное уравнение и после совсем простых алгебраических преобразований получим

$$a = \frac{g}{3}.$$

Таким образом, наше предположение блестяще подтвердилось – конец цепи движется с постоянным ускорением, и мы решили задачу Кейли. Если математик выразит неудовольствие, увидев такое «решение», заметим, что физик имеет право добывать информацию любым способом.

Почему же сила тяжести сообщает нашей цепи ускорение, меньшее g? На очень наивном языке можно было бы ответить, что часть силы тяжести тратится на приведение в движение покоящихся до этого элементов цепи.

А теперь попробуйте догадаться, как будет двигаться цепь (или канат) под действием силы тяжести, если, наоборот, элементы цепи останавливаются.

Складываемый коврик

Что происходит с механической энергией при движении по канату (или какому-то другому представителю гибкой связи) «точки перегиба»? На первый взгляд кажется, что канат можно считать идеальным в том смысле, что при таком движении потери механической энергии не происходит. Но это не так! Рассмотрим столь простое движение интересующего нас объекта, что уравнение Мещерского сведется к алгебраическому уравнению (обсуждаемая задача есть, например, в книге П.Гнэдига, Д.Хоньека и К.Райли «Двести интригующих физических задач»; вып. 90 Библиотечки «Квант»):

Узкий длинный ковер (ковровая дорожка) лежит на полу (рис.4). Конец ковра загибают и тянут назад со

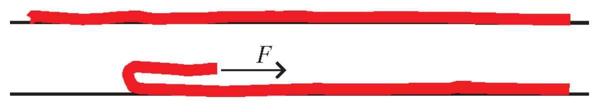


Рис. 4

скоростью v. Масса единицы длины ковра равна ρ. Какую силу F прикладывают к концу ковра?

Когда конец ковра, к которому приложена сила, пройдет путь L, точка перегиба ковра пройдет путь $L/2$, т.е. она движется не со скоростью v, а со скоростью $w = v/2$. За время Δt в движение вовлекается участок ковра длиной $\Delta l = w\Delta t$ и массой $\Delta m = \rho w \Delta t$. Поэтому уравнение Мещерского принимает совсем простой вид:

$$F = u\frac{dM}{dt} = v\rho w = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Нам известны все параметры, описывающие движение ковра. Рассмотрим разные члены в балансе энергии в тот момент, когда ковер сложен вдвое. К этому моменту точка приложения внешней силы F пройдет, как уже сказано, путь L. Значит, этой силой будет совершена работа

$$A = FL = \frac{\rho v^2}{2}L.$$

Теперь сосчитаем кинетическую энергию движущейся части (т.е. половины) ковра:

$$E_{\text{к}} = \frac{L}{2}\rho\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}A.$$

Мы получили, что ровно половина работы внешней силы потеряна. Такой вот удивительный результат! И нам надо запомнить на будущее, что массивные гибкие связи нельзя считать идеальными – при движении точки перегиба мы обязательно теряем заметную часть механической энергии. Но, подчеркнем, речь идет именно о массивных связях – к «невесомым» нитям, связывающим грузы в наших школьных задачах, все это отношения не имеет.

(Читатель может вспомнить, что удивительная «двойка» в балансе энергии появляется в курсе физики в самых неожиданных местах: при зарядке конденсатора, при поднятии жидкости в капилляре и т.п.)

Возвращение к джампингу

Мы подробно обсудили разные аспекты проблемы, теперь у нас все готово, чтобы написать уравнение Мещерского для «участников» джампинга – движущейся части каната и прыгуна. Направим ось x вниз и спроектируем уравнение Мещерского на эту ось. Будем аккуратны со знаками: вектор относительной скорости останавливающейся части системы направлен вверх, поэтому $u = -v$. В задаче о ковре мы уже выяснили, что за единицу времени останавливается часть каната массой $\rho v/2$, поэтому уравнение примет вид

$$M(t)a = M(t)g + \frac{1}{2}\rho v^2$$

(здесь M – масса движущейся части каната и самого прыгуна, t – время полета, ρ – как и выше, линейная плотность каната), или

$$a = g + \frac{v^2}{M}\frac{\rho}{2}.$$

Это, конечно, не решение задачи, ведь M и v – неизвестные нам пока функции времени. Но ясно, что скорость v со временем растет, а масса M – падает. Таким образом, мы доказали, что ускорение прыгуна в любой момент времени $t > 0$ больше ускорения свободного падения g и растет со временем. Качественно картина явления представляется нам вполне ясной: тело с уменьшающейся массой приобретает под действием силы тяжести все больший импульс, а значит – ускоряется. И этот эффект будет тем сильнее, чем больше масса каната (по сравнению с массой прыгуна).

Новый опыт

Снова вернемся к понятию реактивной силы. В элементарных курсах физики реактивную силу, приводящую в движение ракету, обычно объясняют как силу давления продуктов сгорания топлива на стенку камеры сгорания. Представляется, что иногда такое «объяснение» может затемнять суть дела.

Рассмотрим совсем простой, «школьный» опыт. В кузов игрушечного автомобиля поместим длинную тяжелую ленту. Она должна быть свернута таким образом, чтобы иметь возможность разматываться и покидать кузов с минимальным трением. Закрепим конец ленты на демонстрационном столе и толкнем автомобиль. Лента, покидая кузов и останавливаясь, не уносит импульс, и, следовательно, импульс автомобиля с остатком ленты не меняется. Но масса-то уменьшается! Значит, скорость должна увеличиваться. Итак, лента разматывается – и автомобильчик разгоняется!

Ясно, что никакой реактивной силы, толкающей автомобильчик вперед, обнаружить не удается (нет никакого давления на стенку кузова). «Но это то же самое, что кнут!» – может сказать читатель. Ну да! Тем удивительнее, что никакого упоминания о таком опыте я никогда не видел. Удастся ли реально продемонстрировать этот опыт, зависит от того, сможет ли экспериментатор уменьшить силу трения – с одной стороны, между автомобилем и столом и, с другой стороны, между лентой и кузовом – до необходимых значений. Указание экспериментатору: при сматывании ленты не должна меняться ее высота над столом, а автомобильчик должен быть легким (по сравнению с лентой).

Автору было бы очень интересно услышать об успехах в проведении этого опыта.

Что можно сложить из кубиков?

В.ГОРИН

Разбиения

Зададимся каким-нибудь натуральным числом n и разложим его в сумму целых положительных слагаемых:

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_l .$$

Для определенности будем считать, что слагаемые упорядочены по невозрастанию:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_l > 0 .$$

Такое разбиение удобно изображать в виде *диаграммы Юнга* λ – набора единичных квадратов на плоскости.

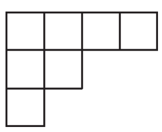


Рис.1. Диаграмма Юнга из 7 клеток, отвечающая разбиению 7 = 4 + 2 + 1

В первом ряду мы располагаем λ_1 квадратов, во втором – λ_2 и т.д. Пример приведен на рисунке 1. При этом само число n оказывается равным числу клеток в диаграмме. Условимся также считать, что для $n = 0$ существует одна-единственная диаграмма Юнга – «пустая».

Упражнение 1. Изобразите все диаграммы Юнга из 5 клеток. Сколько их?

Диаграммы в прямоугольнике

Пусть $\mathbb{Y}(m,k)$ обозначает множество всех диаграмм Юнга, помещающихся в прямоугольник $m \times k$. Иными словами, λ лежит в $\mathbb{Y}(m,k)$ тогда и только тогда, когда длина первой строчки λ не превосходит k, а число строк в λ не больше m.

Для небольших m и k все элементы из $\mathbb{Y}(m,k)$ нетрудно перечислить. На рисунке 2 приведены диаграммы Юнга из множества $\mathbb{Y}(2, 2)$.

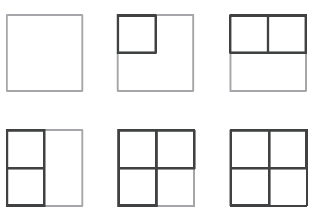


Рис.2. 6 диаграмм Юнга, составляющих множество $\mathbb{Y}(2,2)$

Упражнение 2. Изобразите элементы $\mathbb{Y}(4, 2)$. Сколько их всего?

Как обычно, число элементов в множестве A будем обозначать через $|A|$. Найдем общую формулу для $|\mathbb{Y}(m,k)|$. Чтобы определить это число, посмотрим на *границу* диаграммы Юнга – ломаную, идущую от левого нижнего угла прямоугольника до правого верхнего и ограничивающую диаграмму (как показано на рисунке 3). Двигаясь вдоль границы, мы делаем k шагов вверх и m шагов направо. Запишем последовательность шагов в виде строчки из букв «*в*» (вверх) и «*н*» (направо). Диаграмме на рисунке 3 при этом отвечает последовательность *нвнннвнвн*. Ясно, что любая последовательность из k букв «*в*» и m букв «*н*» однозначно задает диаграмму из $\mathbb{Y}(m, k)$. Отсюда сразу видно, что $|\mathbb{Y}(m,k)|$ совпадает с количеством способов расставить в ряд k букв «*в*» и m букв «*н*», т.е. с соответствующим биномиальным коэффициентом:

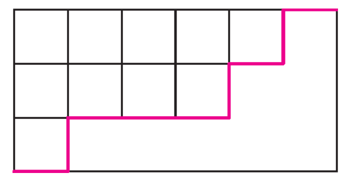


Рис.3. Диаграмма Юнга в коробке 6×3, граница отмечена красным

$$|\mathbb{Y}(m,k)| = \binom{m+k}{k} = \frac{(m+k)!}{m!\,k!} . \qquad (1)$$

В частности, при $m = k = 2$ получаем $|\mathbb{Y}(2, 2)| = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$, что совпадает с ответом, полученным ранее.

Попробуем теперь ответить на вопрос о том, как выглядит *случайная* диаграмма Юнга из множества $\mathbb{Y}(m, k)$. Чуть более формально, давайте объявим все элементы множества $\mathbb{Y}(m, k)$ равновероятными, иными словами, в случайном эксперименте любая из этих диаграмм выпадает с вероятностью $1/|\mathbb{Y}(m, k)|$. На рисунке 4 приведена «типичная» диаграмма Юнга в прямоугольнике размера 20×30. Как мы видим, эта диаграмма в каком-то смысле «близка» к диагонали. На самом деле имеет место точное утверждение, называемое «законом больших чисел» или же «теоремой о предельной форме».

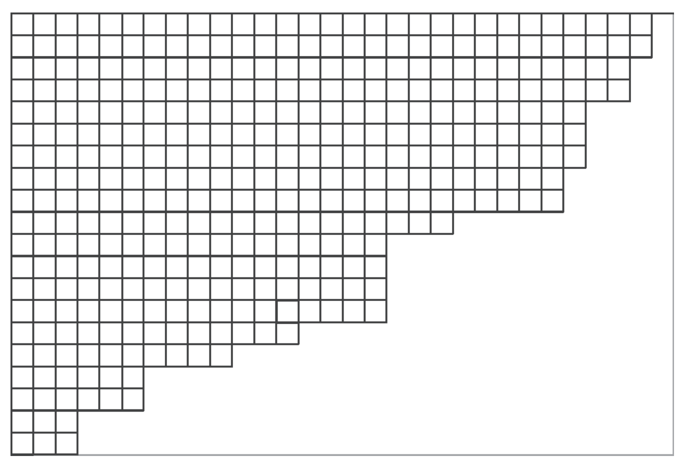


Рис.4. «Типичная» диаграмма Юнга в прямоугольнике 20×30

Прежде чем сформулировать эту теорему, введем вспомогательный целый параметр N, который мы в дальнейшем устремим к бесконечности. Зададимся какими-нибудь *пропорциями* прямоугольника $\mu : \kappa$ и рассмотрим прямоугольник со сторонами $m = \mu N$ и $k = \kappa N$. Например, если $\mu = \kappa = 1$, то речь идет просто о квадрате $N \times N$. Зафиксируем какое-нибудь число

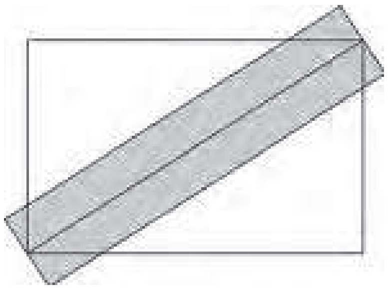


Рис.5. Окрестность диагонали прямоугольника

$\varepsilon > 0$. Назовем ε-окрестностью диагонали прямоугольника $m \times k$ прямоугольник с высотой $2\varepsilon N$, средняя линия которого совпадает с диагональю. Пример изображен на рисунке 5. Менее формально, эта окрестность представляет собой множество тех точек, которые после масштабирования всей картинки в N раз окажутся на расстоянии не более ε от диагонали. Обратим особое внимание на то, что (хотя мы и не обозначаем эту зависимость явно) множество точек ε-окрестности существенно зависит от выбора числа N.

Можно сказать и по-другому. Мы фиксируем прямоугольник размерами $\mu \times \kappa$, выделяем в нем ε-окрестность диагонали. А затем начинаем «измельчать» разбиение прямоугольника на клетки: сначала разбиваем на клеточки 1×1, потом – на клеточки $1/2 \times 1/2$, … …, $1/N \times 1/N$, и так далее. Рисуем по этим клеточкам случайные диаграммы Юнга. И оказывается – чем мельче клеточки, тем больше вероятность того, что граница случайной диаграммы Юнга полностью поместится в выбранную нами ε-окрестность. Более того, эта вероятность стремится к 1 при стремлении размера клеточек к нулю.

Упражнение 3. Пусть $\varepsilon = 1/5$, $\mu = \kappa = 1$, а $N = 6$. Сколько всего существует диаграмм Юнга из $\mathbb{Y}(6, 6)$, граница которых лежит в ε-окрестности диагонали квадрата?

Теорема 1 (закон больших чисел для диаграмм в прямоугольнике). *Для любого $\varepsilon > 0$ вероятность того, что граница случайной диаграммы Юнга из множества $\mathbb{Y}(\mu N, \kappa N)$ лежит в ε-окрестности диагонали прямоугольника, стремится к 1 при N, стремящемся к бесконечности.*

На рисунке 6, в качестве иллюстрации к теореме 1, показаны границы диаграмм Юнга в прямоугольниках с пропорцией сторон 2 : 3 при $N = 30$, 60 и 120. Хорошо видно, что с ростом N граница все сильнее прижимается к диагонали прямоугольника.

Доказательство теоремы 1 достаточно технично, изложим здесь лишь его идею, а подробный план рассуждений приведен в приложении в конце статьи.

Рассмотрим прямую, проходящую через левый верхний угол прямоугольника под углом 45 градусов к осям координат, как на рисунке 7. Эта прямая пересекает границу диаграммы Юнга в одной-единственной точке K. Если диаграмма случайна, то и координата точки K является *случайной величиной*. Оказывается, для вероятности того, что эта координата принимает заданное значение, можно выписать явную формулу, зависящую от размеров прямоугольника. Анализируя эту формулу, можно убедиться, что при $N \to \infty$ вероятность того, что точка K лежит в $(\varepsilon/2)$-окрестности диагонали прямоугольника, стремится к единице. Затем можно убедиться, что аналогичное утверждение оказывается верным и для любой другой прямой, параллельной рассмотренной, а отсюда уже легко вывести, что и вероятность того, что вся граница диаграммы Юнга лежит в ε-окрестности диагонали, стремится к 1 при N, стремящемся к бесконечности.

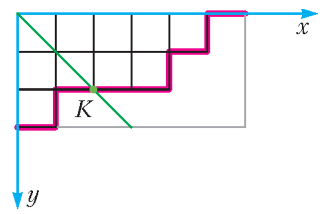


Рис.7. Пересечение границы диаграммы Юнга (красная) с прямой (зеленая)

Производящие функции

При изучении последовательностей конечных множеств (таких, как множества диаграмм Юнга разных размеров) удобно пользоваться *производящими функциями*. В этом разделе мы определим, что это такое.

Предположим, что у нас есть некоторый набор конечных множеств $A_0, A_1, A_2, \ldots$ *Производящей функцией* множеств A_n называется степенной ряд

$$G(z;\, A_n) = |A_0| + z|A_1| + z^2|A_2| + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n |A_n|.$$

Заметим, что в этой записи не предполагается, что z – какое-то фиксированное число, скорее на производящие функции следует смотреть как на формальные суммы, операции с которыми производятся по обычным правилам сложения и умножения многочленов.

Упражнение 4. Пусть A_n – множество всех натуральных чисел, не превышающих 10 и делящихся на $n + 1$. Докажите, что

$$G(z;\, A_n) = 10 + 5z + 3z^2 + 2z^3 + 2z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9.$$

Чем же удобны производящие функции? Оказывается, производящие функции множеств во многих ситу-

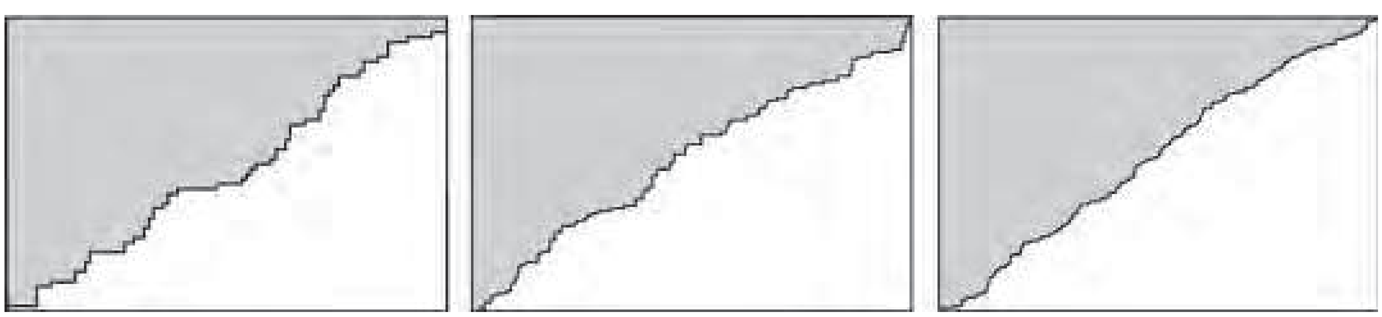


Рис.6. Границы «типичных» диаграмм Юнга в прямоугольниках 60×90, 120×180 и 240×360

ациях могут быть вычислены и записаны в компактной форме. Например, пусть все A_n – одноэлементные множества, тогда их производящая функция

$$G(z;\, A_n) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \qquad (2)$$

может быть записана в виде

$$G(z;\, A_n) = 1/(1 - z).$$

Как следует воспринимать последнюю формулу, которая очень напоминает известное правило для суммирования геометрической прогрессии? По определению $1/(1-z)$ – это такой степенной ряд, который после умножения на $1 - z$ дает единицу. И действительно, умножая (2) на $1 - z$ и раскрывая скобки, легко убедиться, что почти все слагаемые сокращаются и остается 1.

Кроме того, над производящими функциями можно производить все обычные операции: складывать, вычитать, перемножать, делить, возводить в степени, многие их этих операциий отвечают несложным преобразованиям множеств. Приведем самый простой пример: предположим, что у нас есть два набора множеств A_n и B_n такие, что для каждого n все элементы A_n и B_n различны. Пусть $C_n = A_n \cup B_n$, тогда понятно, что

$$G(z;\, C_n) = G(z;\, A_n) + G(z;\, B_n).$$

Упражнения

5. Пусть A_n и B_n – два набора множеств. Определим C_n как множества пар (a, b), в которых a является элементом одного из множеств A_k, b – элементом одного из множеств B_l, а сумма индексов этих множеств равна n, т.е. $k + l = n$. Докажите, что

$$G(z;\, C_n) = G(z;\, A_n)\, G(z;\, B_n).$$

6. Пользуясь результатом упражнения 5, найдите компактную (т.е. содержащую лишь конечное число арифметических операций) форму записи для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, где a_k – это число способов разделить k одинаковых конфет между Ваней, Петей, Машей и Дашей.

Подробнее о производящих функциях можно прочитать в статье С.Воронина и А.Кулагина «Метод производящих функций» в «Кванте» №5 за 1984 год, в книге С.Ландо «Лекции о производящих функциях»[1] и в книге С.Табачникова и Д.Фукса «Математический дивертисмент».

Диаграммы с фиксированным числом клеток

Вернемся теперь к диаграммам Юнга. Давайте изменим постановку задачи и откажемся от ограничивающего прямоугольника размера $m \times k$, вместо этого рассмотрим множество $\mathbb{Y}_n$ *всех* диаграмм Юнга из n клеток. Снова начнем наше изучение с вопроса, сколько всего таких диаграмм. К сожалению, никакой простой явной формулы для $|\mathbb{Y}_n|$ – числа диаграмм Юнга из n клеток – до сих пор не известно. Но кое-что сделать можно.

Упражнение 7. Найдите $|\mathbb{Y}_n|$ для n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

[1] Эта книга доступна в электронном виде по адресу www.mccme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf

Попробуем вычислить производящую функцию для множеств $\mathbb{Y}_n$ диаграмм Юнга

$$Y(z) = G(z;\, \mathbb{Y}_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{Y}_n|\, z^n = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + \ldots$$

Уже Эйлер заметил следующее:

$$Y(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - z^i\right)^{-1}. \qquad (3)$$

Поясним, какой смысл имеет бесконечное произведение (3). Необходимо воспользоваться формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\left(1 - z^k\right)^{-1} = 1 + z^k + z^{2k} + z^{3k} + \ldots,$$

подставить эти выражения в (3), а затем перемножить возникающие ряды по обычным правилам перемножения многочленов. Нас не должен смущать тот факт, что перемножается бесконечное число сомножителей. Действительно, обратим внимание на то, что, чтобы вычислить коэффициент при z^n у бесконечного произведения, достаточно перемножить лишь первые n скобок, так как во всех последующих степени z больше n. А значит, мы можем последовательно, раскрывая скобки, вычислять все коэффициенты интересующего нас степенного ряда.

Давайте подсчитаем коэффициент при z^n у произведения в (3). Пусть из первой геометрической прогрессии мы взяли слагаемое z^{j_1}, из второй – z^{2j_2}, из третьей – z^{3j_3} и так далее. Тогда коэффициент при z^n у произведения (3) равняется количеству способов представить n в виде суммы $n = j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \ldots$. Но это количество в точности и равно числу диаграмм Юнга из n клеток: для диаграммы Юнга λ числа $j_1(\lambda), j_2(\lambda), \ldots$ имеют смысл числа строк длины 1, числа строк длины 2 и т.д. соответственно. Это рассуждение доказывает формулу Эйлера.

Упражнение 8. Пусть $\widehat{\mathbb{Y}}_n$ – множество диаграмм Юнга из n клеток, все строки которых имеют различную длину. Докажите, что

$$G\left(z;\, \widehat{\mathbb{Y}}_n\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + z^k\right).$$

По аналогии с разделом «Диаграммы в прямоугольнике» зададимся теперь вопросом о том, как выглядит случайная диаграмма Юнга из n клеток. Как и раньше, мы будем предполагать, что все элементы множества $\mathbb{Y}_n$ равновероятны. Оказывается, ответ на этот вопрос сильно отличается от того, что было для множеств $\mathbb{Y}(m, k)$. А именно, для каждого n рассмотрим кривую на плоскости, задаваемую уравнением

$$e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}} x\sqrt{n}} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}} y\sqrt{n}} = 1. \qquad (4)$$

Упражнения

9. Что произойдет с кривой, задаваемой уравнением (4), если умножить n на 4?

10*. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной осями координат и кривой, задаваемой уравнением (4), равна n.

Поясним причину возникновения коэффициента $\sqrt{n}$. По определению, площадь диаграммы Юнга из множества Y_n равна n. Трудно ожидать, чтобы фигуры безгранично растущей площади имели какой-то предел. Однако если сжать всю картинку в $\sqrt{n}$ раз, то площадь диаграммы станет равной 1, и для полученных после такого масштабирования фигур уже можно пытаться доказывать предельные теоремы.

Следующая теорема является аналогом теоремы 1.

Теорема 2 (закон больших чисел для диаграмм с фиксированным числом клеток). *Для любого* $\varepsilon > 0$ *вероятность того, что граница случайной диаграммы Юнга из множества* $\mathbb{Y}_n$ *лежит в* ε*-окрестности кривой, задаваемой уравнением (4), стремится к 1 при n, стремящемся к бесконечности.*

Замечание. Под ε-окрестностью в формулировке теоремы 2 имеется в виду множество точек плоскости, находящихся на расстоянии не больше $\varepsilon\sqrt{n}$ от нашей кривой. Это хорошо согласуется с приведенным выше рассуждением о необходимости масштабирования всей картинки в $\sqrt{n}$ раз.

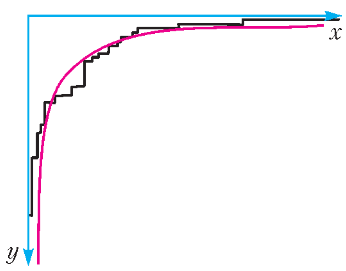


Рис.8. «Типичная» диаграмма Юнга из 524 клеток и предельная кривая

Отметим, что, несмотря на схожие формулировки, доказательство теоремы 2 значительно сложнее, чем теоремы 1, и мы не будем его приводить. Сама кривая (4), а также большая случайная диаграмма Юнга приведены на рисунке 8.

Упражнение 11. Выведите результат упражнения 10 из теоремы 2.

Трехмерные диаграммы Юнга

Теперь давайте повысим размерность и перейдем к *трехмерным* диаграммам Юнга. Трехмерные диаграммы удобно отождествлять с *плоскими разбиениями* – прямоугольными таблицами целых неотрицательных чисел, в которых числа (нестрого) убывают вдоль строк и столбцов. Если мы теперь представим, что такая таблица лежит на столе, и положим на каждую ее клетку, в которой написано число t, ровно t единичных кубиков, то мы получим трехмерное тело – трехмерную диаграмму Юнга. При этом количество кубиков (объем диаграммы) будет в точности равно сумме всех чисел плоского разбиения. Пример приведен на рисунке 9. А на рисунке 10 приведены все трехмерные диаграммы из 1, 2 и 3 кубиков.

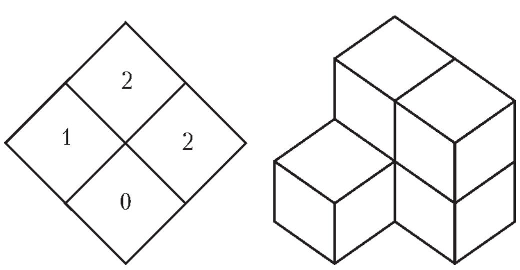


Рис.9. Плоское разбиение и трехмерная диаграмма Юнга

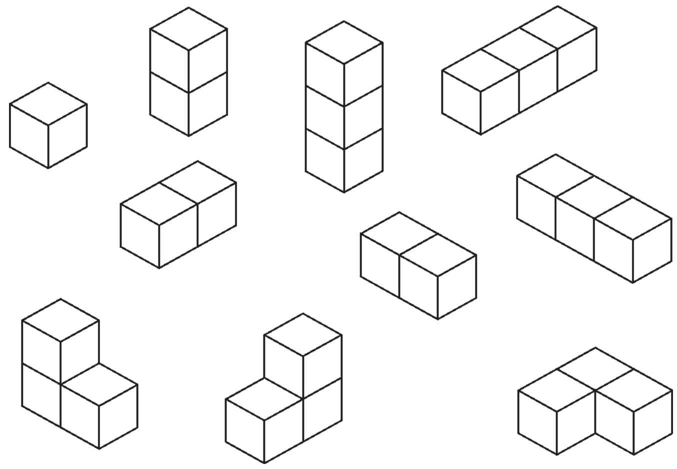


Рис.10. Трехмерные диаграммы Юнга из 1, 2 и 3 кубиков

Упражнение 12. Изобразите все трехмерные диаграммы Юнга из 4 кубиков. Сколько их?

Точно так же, как и в двумерном случае, задачу можно рассматривать в двух постановках. Рассмотрим сначала трехмерные диаграммы Юнга в коробке размера $A \times B \times C$. Иными словами, это те трехмерные диаграммы, которые отвечают плоским разбиениям – таблицам размера $A \times B$, все числа в которых не превышают C. Обозначим множество всех таких диаграмм через $\mathbb{Y}^{3D}(A,B,C)$. Для количества трехмерных диаграмм Юнга в коробке существуют замечательная формула Макмагона, найденная в начале XX века:

$$\left|\mathbb{Y}^{3D}(A,B,C)\right| = \prod_{i=1}^{A}\prod_{j=1}^{B}\prod_{k=1}^{C}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}. \qquad (5)$$

Упражнение 13. Убедитесь в справедливости формулы (5) при $A = B = C = 2$.

Заметим, что если $A = 1$, то трехмерные диаграммы Юнга в коробке $A \times B \times C$ есть в точности обычные диаграммы в прямоугольнике $B \times C$.

Упражнение 14. Убедитесь, что формула (5) при $A = 1$, $B = m$, $C = k$ совпадает с формулой (1).

Доказывать формулу (5) можно очень разными способами. Одно из известных доказательств основано на теории *симметрических полиномов*, в другом задача сводится к вычислению *определителя* некоторой матрицы, составленной из биномиальных коэффициентов. Наконец, есть и непосредственное комбинаторное доказательство «по индукции».

Как нетрудно убедиться, анализируя формулу (5), количество трехмерных диаграмм Юнга даже в коробках небольшого размера чрезвычайно велико. Уже при $A = B = C = 16$ это количество превышает 10^{87}, что больше, чем число частиц в видимой части Вселенной.

А как же выглядит «типичная» случайная трехмерная диаграмма Юнга из множества $\mathbb{Y}^{3D}(A,B,C)$? Ответ на этот вопрос был получен лишь 15 лет назад. Оказывается, здесь снова имеет место закон больших чисел и ступенчатая поверхность, ограничивающая случайную трехмерную диаграмму, стремится к некоторому пределу. Не будем утомлять читателя точной формулой для предельной поверхности (она достаточно сложна), а проиллюстрируем результат изображением трехмерной диаграммы для больших A, B, C на рисунке 11.

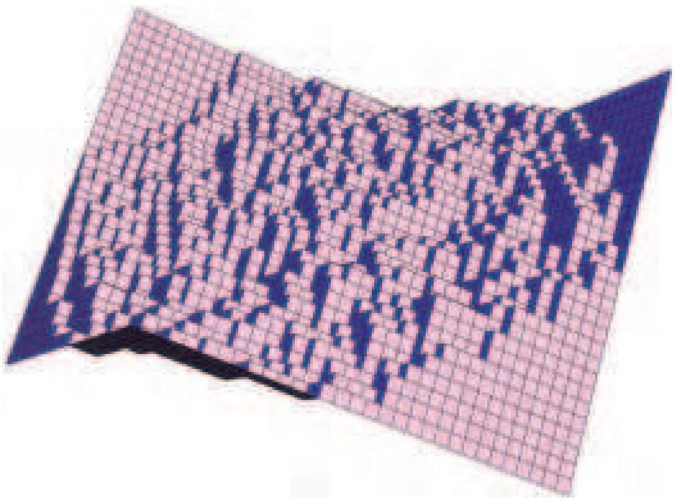


Рис.11. Повернутая трехмерная диаграмма Юнга в коробке 30×30×30 и стенки этой коробки

Наиболее любопытные картинки получаются, если покрасить грани кубиков в 3 различных цвета (в соответствии с их ориентацией), точно так же покрасить объемлющую коробку, после чего все спроецировать на плоскость вдоль вектора (1, 1, 1), см. рисунок 12. При этом объемлющая коробка проецируется в

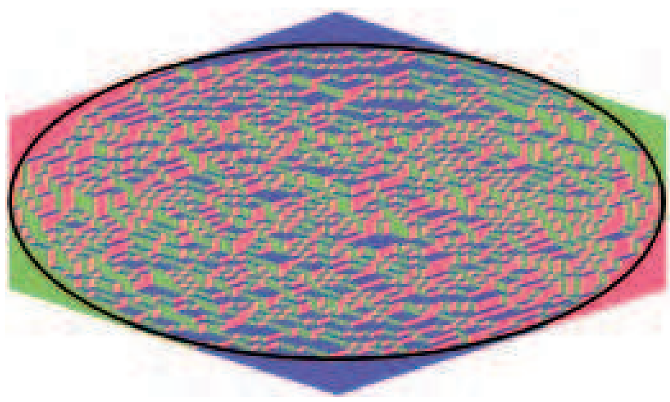


Рис.12. Проекция случайной диаграммы Юнга в коробке 40×50×50

некоторый шестиугольник, а сами грани кубиков проецируются в ромбы трех типов (как на рисунках 9, 10, 12). Таким образом, трехмерная диаграмма Юнга превращается в замощение шестиугольника ромбами трех типов (трех цветов). Нетрудно показать, что это соответствие является биекцией, иными словами, по замощению трехмерная диаграмма восстанавливается однозначно.

Оказывается, можно доказать, что для больших A, B, C повсюду внутри эллипса, вписанного в шестиугольник, картинка остается нетривиальной, в ней встречаются все 3 цвета, тогда как вне эллипса все «замораживается» – от трех цветов остается только один. Этот эффект виден уже на рисунке 12 – в самом деле, вблизи каждой из 6 вершин шестиугольника картинка одноцветна.

Точно так же, как и для случая обычных диаграмм Юнга, давайте теперь откажемся от ограничивающей коробки и рассмотрим множество $\mathbb{Y}_n^{3D}$ всех трехмерных диаграмм Юнга объема n (т.е. состоящих из n кубиков). Для количества таких диаграмм снова не существует явной формулы, но выражение для производящей функции очень похоже на (3) и, так же, как и (5), носит имя Макмагона. А именно,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\mathbb{Y}_n^{3D}\right| z^n = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-z^i\right)^{-i}. \qquad (6)$$

Выпишем несколько первых членов формулы (6):

$$1+z+3z^2+6z^3+13z^4+24z^5+\ldots$$

В частности, заключаем, что $\left|\mathbb{Y}_1^{3D}\right|=1$, $\left|\mathbb{Y}_2^{3D}\right|=3$, $\left|\mathbb{Y}_1^{3D}\right|=6$, и это согласуется с рисунком 10, а тот факт, что $\left|\mathbb{Y}_4^{3D}\right|=13$, был нами проверен в упражнении 12.

Наконец, спросим, как же выглядит большая случайная трехмерная диаграмма из множества $\mathbb{Y}_n^{3D}$? Этот вопрос имеет любопытную бытовую интерпретацию. Возьмите в руки кубик сахара-рафинада и посмотрите, как выглядит угол этого кубика. Он состоит из тысяч маленьких песчинок сахара и имеет закругленную форму. Естественная модель для описания этой формы как раз и связана со случайнми диаграммами: угол куска сахара можно представлять себе как дополнение трехмерной диаграммы Юнга до октанта, составленного из осей координат.

Мы снова не будем приводить точных формул, а лишь покажем на рисунке проекцию «типичной» трехмерной диаграммы Юнга из $\mathbb{Y}_n^{3D}$ при большом n (рис.13). Так же, как и в случае трехмерных диаграмм в коробке, здесь возникают некоторые замороженные области, но их граница (в данном случае это просто линии раздела между границей трехмерной диаграммы и стенками коробки) уже описывается несколько более сложными формулами.

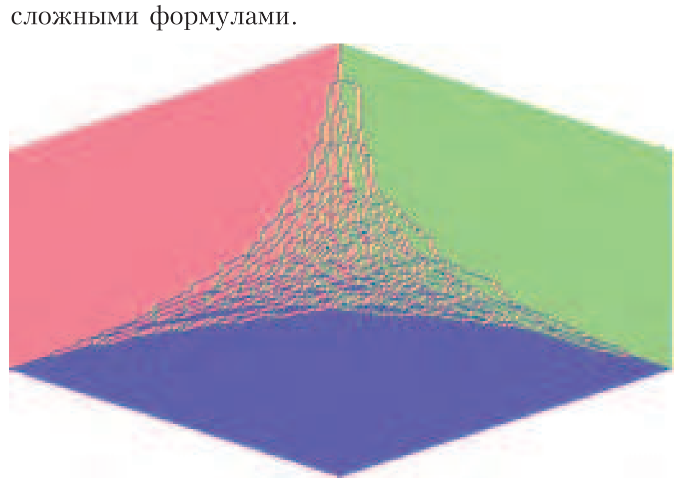


Рис.13. Проекция случайной диаграммы Юнга из множества $\mathbb{Y}_n^{3D}$, $n = 16528$

В заключение хочется отметить, что теоремы, приведенные в этом разделе, весьма сложны, получением их доказательств занимался целый ряд выдающихся математиков, а работы на эту тематику отмечены многими престижными наградами, в частности медалью Филдса в 2006 году.

Что дальше?

Логично было бы спросить, а что же происходит в бо́льших размерностях? Существуют ли там такие же простые и красивые формулы для числа диаграмм и для производящих функций, как и (1), (3), (5), (6)? А как устроена случайная 4-мерная диаграмма Юнга?

К сожалению, несмотря на то что на вопросы о числе и форме двух- и трехмерных диаграмм к настоящему времени получены полные и исчерпывающие ответы, о 4-мерных диаграммах не известно практически ничего. С помощью существующей техники не удается ни посчитать количество 4-мерных диаграмм Юнга, ни доказать (или хотя бы визуально представить!) какие-либо предельные теоремы для случайных диаграмм в больших размерностях. Эти вопросы остаются открытыми, и с ними математикам еще предстоит разобраться в будущем.

Приложение. Схема доказательства теоремы 1

Введем декартову систему координат $(x; y)$, в которой левый нижний угол прямоугольника имеет координаты $(0; k)$, правый верхний – $(m; 0)$ (как на рисунке 7), а диаграмма Юнга прилегает к углу с координатами $(0; 0)$. Пусть λ – диаграмма Юнга, обозначим через $z(\lambda)$ координату (единственного) пересечения границы λ с прямой $x = y$, иными словами, пусть точка $(z(\lambda), z(\lambda))$ лежит на границе диаграммы. Если теперь диаграмма λ случайная, то и точка z – *случайная величина*, принимающая значения от 0 до $\min(m, k)$.

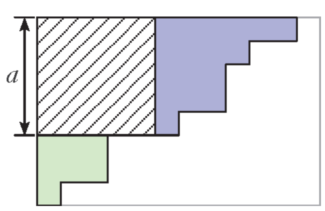


Рис.14. Представление диаграммы из $\mathbb{Y}(m, k)$ в виде квадрата со стороной a и двух меньших диаграмм

Какова вероятность того, что $z(\lambda) = a$? В силу определений она равна отношению количества диаграмм Юнга из $\mathbb{Y}(m, k)$, граница которых проходит через точку $(a; a)$, к общему числу элементов в $\mathbb{Y}(m, k)$. Понятно, что каждая диаграмма, проходящая через $(a; a)$, представляется объединением квадрата $a \times a$, диаграммы Юнга в прямоугольнике $a \times (k-a)$ и диаграммы Юнга в прямоугольнике $(m-a) \times a$ (рис. 14). Значит, искомая вероятность равна

$$\mathbb{P}(a) = \frac{m!}{a!(m-a)!}\frac{k!}{a!(k-a)!}\frac{m!k!}{(m+k)!}. \qquad (7)$$

Вспомним, что $m = \mu N$, $k = \kappa N$, и также положим $a = [\alpha N]$. Для оценки факториалов воспользуемся формулой Стирлинга, которая говорит, что

$$\ln(M!) = M(\ln(M) - 1) + M\delta(M),$$

где функция $\delta(M)$ стремится к нулю при $M \to \infty$ (на самом деле, для функции $\delta(M)$ известно достаточно точное выражение, но мы его не используем). Опуская целые части, получаем

$$\ln(\mathbb{P}(\alpha N)) \approx 2\mu N(\ln(\mu N) - 1) + 2\kappa N(\ln(\kappa N) - 1) -$$
$$- 2\alpha N(\ln(\alpha N) - 1) - (\mu - \alpha)N(\ln((\mu - \alpha)N) - 1) -$$
$$-(\kappa - \alpha)N(\ln((\kappa - \alpha)N) - 1) - (\mu + \kappa)N(\ln((\mu + \kappa)N - 1)) =$$
$$= N(2g(\mu) + 2g(\kappa) - 2g(\alpha) - g(\mu - \alpha) - g(\kappa - \alpha) - g(\mu + \kappa)), \qquad (8)$$

где $g(x) = x\ln(x)$. Посмотрим на полученное выражение как на функцию от α и найдем ее максимум. Для нахождения максимума посчитаем производную по α и приравняем ее нулю. Учитывая, что $g'(x) = \ln(x) - 1$, получаем уравнение на экстремум $\hat{\alpha}$:

$$-2\left(\ln\left(\hat{\alpha}\right) - 1\right) + \left(\ln\left(\mu - \hat{\alpha}\right) - 1\right) + \left(\ln\left(\kappa - \hat{\alpha}\right) - 1\right) = 0.$$

Решая его, находим

$$\ln\left(\frac{\left(\mu - \hat{\alpha}\right)\left(\kappa - \hat{\alpha}\right)}{\hat{\alpha}^2}\right) = 0, \quad \hat{\alpha}^2 = \left(\mu - \hat{\alpha}\right)\left(\kappa - \hat{\alpha}\right),$$
$$\hat{\alpha} = \mu\kappa/(\mu + \kappa).$$

Теперь заметим, что при $\alpha = \hat{\alpha}$ правая часть (8) обращается в ноль.

Упражнение 15. Убедитесь в этом.

Теперь мы можем заключить, что если $\alpha \neq \hat{\alpha}$, то $\frac{\ln \mathbb{P}(\alpha N)}{N} < 0$ при больших N. Другими словами, это означает, что если a далеко от $\hat{\alpha}N$, то при больших N вероятность $\mathbb{P}(a)$ *экспоненциально* (как функция от N) мала.

Упражнения

16. Тот факт, что мы опустили целые части (т.е. заменили $[aN]$ на aN), не влияет на справедливость вывода. Убедитесь в этом.

17. Из наших рассуждений следует, что для любого $\varepsilon > 0$ вероятность того, что координата $z(\lambda)$ пересечения границы λ с прямой $x = y$ отличается от $\hat{\alpha}N$ больше чем на εN, стремится к нулю при $N \to \infty$. Убедитесь в этом.

Остается заметить, что точка $\left(\hat{\alpha}N; \hat{\alpha}N\right)$ в точности лежит на диагонали прямоугольника со сторонами μN, κN. Таким образом, мы доказали, что при больших N точка пересечения границы диаграммы λ и прямой $x = y$ лежит вблизи диагонали прямоугольника.

Упражнение 18 (сложное). Обобщая приведенные рассуждения, дайте полное доказательство теоремы 1. *Указание*. Рассмотрите вместо прямой $x = y$ более общую прямую $x = y + cN$ и докажите для нее аналог результата упражнения 17. Затем убедитесь, что и для конечного набора $c_1, \ldots, c_h$ вероятность того, что точки пересечения границы диаграммы λ с каждой из прямых $x = y + c_iN$ лежат вблизи диагонали прямоугольника, стремится к 1. Отсюда уже выведите теорему 1.

Мариан Смолуховский – всесторонняя личность

М.НЕМЕЦ

В 1906 ГОДУ В НЕМЕЦКОМ НАУЧНОМ ЖУРНАЛЕ «Анналы физики» (Annalen der Physik), самом престижном в то время, вышла статья «Очерк кинетической теории и мутных растворов». Ее автором был Мариан Смолуховский, 34-летний профессор теоретической физики Львовского университета. Эта работа была инициирована статьей Альберта Эйнштейна «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты», опубликованной в том же самом журнале в 1905 году. Как следует из научной переписки Смолуховского со знаменитыми физиками рубежа XIX–XX веков, а также из его ранних работ, данная публикация стала итогом исследований, продолжавшихся с 1900 года. Опубликованные в 1906 году результаты автор имел еще тремя годами раньше. Причиной возникшего промедления была осторожность Смолуховского, ожидавшего более надежных экспериментальных результатов. Взаимодополняющие друг друга работы Эйнштейна и Смолуховского, объяснившие броуновское движение, которое было загадкой с 1827 года, оказались ключевыми для физиков и химиков в споре о реальном существовании атомов. В настоящее время даже не для специалистов очевидно, что микроструктура Вселенной дискретна и состоит из невидимых атомов и молекул. Этот факт и есть фундамент нашего знания о строении вещества, подтверждающийся экспериментально в каждой физической и химической лаборатории. Сегодня мы уже умеем экспериментально изучать даже единичные атомы!

В настоящее время мы знаем, что Эйнштейн интересовался одной из ранних работ Смолуховского, определенное влияние которой на статью Эйнштейна по поводу броуновского движения удалось проследить историкам науки. Дело выглядело так. Мариана Смолуховского попросили, чтобы он написал статью для мемориального тома, посвященного шестидесятилетию со дня рождения Людвига Больцмана. Эта мемориальная книга вместе со знаменитой, смелой работой Смолуховского под названием «О нерегулярностях в распределении частиц газа и их влиянии на энтропию и уравнение состояния» была опубликована в 1904 году. В этой статье доказано, что существуют возможности наблюдения неоднородностей плотности (флуктуаций плотности) в газе. Современные исторические исследования научных работ А.Эйнштейна указывают на видимое влияние статьи М.Смолуховского 1904 года на работу Эйнштейна 1905 года о броуновском движении. Более того, известно, что Эйнштейн рецензировал статьи из упомянутого тома, посвященного Больцману, для журнала «Анналы физики». Отсюда можно заключить, что Эйнштейн читал помещенную там работу Смолуховского, так что влияние статьи польского физика на его работу не составляет загадки. Надо еще раз подчеркнуть вышеуказанные факты, потому что они малоизвестны.

Мариан Смолуховский (1872–1917)

Разрешение проблемы броуновского движения – не единственная заслуга героя нашей статьи для современной науки. Разработанные Смолуховским теории критической опалесценции (оптического явления, заключающегося в резком усилении рассеяния света чистыми жидкостями и газами при достижении критической точки), голубого цвета неба и флуктуаций послужили основой для первых убедительных экспериментальных подтверждений атомного строения вещества. Однако М.Смолуховский и его научные достижения – это не только история физики. Его необыкновенная личность, творческий подход к разным областям жизни, а также разносторонние умения и навыки – альпинизм, лыжный спорт, игра на рояле, акварельная живопись – требуют более близкого знакомства с биографией этого человека.

Мариан Смолуховский родился 28 мая 1872 года в городе Вордербрюль под Веной в польской семье Вильгельма Смолуховского – юриста, высокого чиновника в канцелярии австрийского императора Франца Иосифа, и его жены Теофилы Щепановской. Мариан и его старший брат Тадеуш окончили знаменитую венскую Терезианскую мужскую гимназию, которую посещали дети аристократов и высшего чиновничества Австро-Венгерской монархии. Кроме нормальных учебных предметов, а также изучения иностранных языков (латынь, греческий, английский), в Терезиануме было очень много занятий по физической культуре: плавание, муштра, верховая езда, фехтование. Программа дня гимназии была точно определена и строго соблюдаема (например, позавтракать надо было в течение 8 минут). Все это делалось с целью воспитания и подготовки к систематической и прилежной дальнейшей работе.

В первые годы школьного обучения Мариан увлекался гуманитарными предметами, а потом – астрономией. Благодаря встрече с великолепным учителем физики А.Хёфлером у него возник интерес к физике и вообще к естествознанию. Через много лет Смолуховский шутливо попрекал своего учителя, что по его вине он стал физиком: «Благодаря Тебе я научился почитать физику, математику и философию как наиболее милые предметы». Братское «Ты» в этом высказывании было привилегией для способнейшего и любимого воспитанника.

Кроме школы очень важную роль в развитии Мариана сыграла его семья. Прежде всего мать, которая была культурной и музыкально одаренной женщиной, а также ее сестра Бенигна Вольска. Благодаря этим двум женщинам Мариан начал интересоваться музыкой и изобразительными искусствами. Бенигна Вольска жила недалеко от Флоренции. Почти ежегодно во время каникул Мариан гостил у тети и ее мужа в Италии. Близость великолепного искусства Флоренции, совместные музыкальные занятия (Мариан играл на рояле) развивали артистический талант и эстетическую впечатлительность мальчика и юноши. В Вене ближайшими товарищами по музыкальной деятельности Мариана были прекрасно поющая мать и его друг – молодой музыкант и композитор Гуидо Петерс. Смолуховский с удовольствием и знанием дела принимал участие в музыкальных событиях и стал квалифицированным и полным энтузиазма пианистом. Особенно он ценил музыку Бетховена и Вагнера, а также сочинения Малера и Франка.

Братья Смолуховские каждый школьный год заканчивали с отличием. Обучение в Терезианской гимназии способствовало знакомству Смолуховского с немецкой культурой. С другой стороны, семейный дом обогащал его польскими культурными традициями. Это создавало некую дистанцию от принятых в данной среде взглядов, которой в других условиях трудно было бы добиться, и способствовало выработке самостоятельности и независимости суждений.

Мариан Смолуховский получил аттестат зрелости с отличием в 1890 году после девятилетней учебы. В свои школьные годы он брал частные уроки по дифференциальному и интегральному исчислению, аналитической геометрии и теоретической механике. Это позволило ему поступить на философский факультет Венского университета сразу на третий курс обучения. В качестве основных предметов он выбрал физику и математику. Учителями Смолуховского в Венском университете были известные физики того времени Дж.Стефан и Ф.Экснер. Среди них не было Л.Больцмана, потому что он пребывал в то время еще в Мюнхене и начал работать на кафедре Венского университета только с 1895 года. Однако Больцман сыграл решающую роль в развитии научных физических взглядов Смолуховского благодаря своим научным статьям, переписке и будущим непосредственным встречам. Первая научная работа М.Смолуховского вышла в 1893 году в сборнике трудов Венского университета. Это была экспериментальная статья, посвященная внутреннему трению в жидкостях. Кандидатская диссертация на тему «Акустические исследования упругости мягких материалов» была опубликована в том же самом сборнике в 1894 году. Присуждение ученой степени состоялось в 1895 году, диссертация была удостоена высшей именной награды Императора и перстня с бриллиантом.

Благодаря пособию родителей, а также небольшой стипендии Венского университета Смолуховский проводил много времени в научных командировках. Денег у него было мало, но расчетливость позволила Мариану почти два года вести как экспериментальные, так и теоретические исследования в ведущих лабораториях Европы. Сначала он работал в Париже в лаборатории Нобелевского лауреата по физике Г.Липпмана над проверкой закона Клаузиуса, гласящего о зависимости интенсивности теплового излучения от среды, в которую помещено излучающее тело. Потом на протяжении восьми месяцев Смолуховский вместе с Дж.Битти и лордом Кельвином изучал в лаборатории в Глазго влияние рентгеновских лучей на электропроводность газов. С мая до августа 1897 года Мариан работал в берлинской лаборатории Э.Варбурга, где изучал теплопроводность в разреженных газах. Во всех этих научных центрах Смолуховский оставил о себе память как об исключительно способном экспериментаторе и теоретике. Так, результаты исследований, полученные в лаборатории Варбурга, были в то время одними из чрезвычайно немногих подтверждений правильности кинетической теории газов. Однако в этой работе нет атомистических основ. Автор представляет проблему чисто феноменологически, независимо от кинетической теории, лишь осторожно упоминая о возможности формулировки результатов на атомистическом языке. Кинетическая теория вещества станет позднее главным направлением научной работы Смолуховского.

В 1898 году Смолуховский получил ученую степень доктора наук и стал приват-доцентом Венского университета. Радость молодого доцента разделяла как семья, так и университетская среда. Научные надежды на Смолуховского возлагали не только его университетские учителя, но и сам Людвиг Больцман – великий предшественник кинетической теории газов.

Надо сказать, что Мариан Смолуховский помимо музыки увлекался еще и альпинизмом. Пристрастие к горным экскурсиям он воспринял от своего отца и старшего брата

М.Смолуховский в Ягеллонском университете

Тадеуша. Когда ему было 13 лет, он вместе с Тадеушем перешел Заврат и Польский хребет в Татрах. В 1890–1893 годах Тадеуш и Мариан с товарищами осилили 24 новых скальных маршрута, 16 из которых были первыми пиковыми восхождениями. В 1894 Мариан отправился в Западные Альпы, где покорил несколько известных горных вершин. Однако новые обязанности во Львовском университете и брак с Софией Баранецкой, очаровательной дочерью профессора математики Ягеллонского университета, прервали альпинистские экспедиции. Во время работы во Львове, а потом в Кракове Смолуховский занимался высокогорным лыжным спортом в Татрах и Восточных Карпатах.

В мае 1898 года Смолуховский занял должность приват-доцента в университете Львова, уже на следующий год стал экстраординарным профессором по теоретической физике, а в 1903 году – полным профессором. В то время он был самым молодым профессором Габсбургской монархии. Смолуховский проявил себя как замечательный преподаватель и педагог. Он предложил изменения в системе университетского обучения, в то время в большинстве университетов незнакомых, в виде упражнений к лекциям. Основным достоинством лекций Смолуховского была их прозрачность вместе с исчерпывающим подходом к данному вопросу. Его лекции слушали также студенты других направлений университета.

В научной деятельности Смолуховский жаловался на провинциализм Львова и отсутствие коллег должного уровня, с которыми он мог бы обсуждать свои новые результаты. Он в одиночку поддерживал оживленные научные контакты и сотрудничество с выдающимися учеными Европы. Эти контакты облегчало знание Смолуховским многих иностранных языков. Например, один из датских ученых был приятно удивлен, когда узнал, что Мариан читал его статьи на датском языке. Смолуховский часто ездил в Вену (где работал его ближайший друг и выдающийся физик Ф.Хазенёрль), Гёттинген, Варшаву (которую называл малым Парижем из-за высокого уровня культурной жизни) и британский Кембридж (где девять месяцев сотрудничал с Дж.Дж.Томсоном и Э.Резерфордом – Нобелевскими лауреатами). Он общался также с А.Эйнштейном в связи с теорией броуновского движения, которую они оба и создали. Во Львов специально приезжал проницательный физик из Лейдена П.Эренфест, чтобы обсудить актуальные научные проблемы со Смолуховским. Мариан Смолуховский интересовался также физикой в Российской империи. Об этом, например, свидетельствует письмо 1912 года, которое он направил в Московское физическое общество после смерти профессора Московского университета Петра Лебедева, создателя первой русской физической школы (надо заметить, что научная деятельность Лебедева не была связана с работами Смолуховского).

Смолуховский работал интенсивно, ежегодно публикуя в среднем пять статей в научных журналах на немецком, французском и английском языках. Именно в это время возникли уже упомянутые выше теории флуктуаций плотности, броуновского движения, критической опалесценции, а также вышли из печати статьи, посвященные термодинамике. Кроме того, следует отметить, что Смолуховский публиковал научные работы и в других областях науки, например об атмосфере Земли и планет, о возникновении складчатых гор, о нескольких вопросах в области аэродинамики, о явлении электроосмоса. Эти работы пользовались большим интересом и признанием современников.

В 1913 году Смолуховскому предложили кафедру экспериментальной физики в Ягеллонском университете. Смолуховский был теоретиком, но у него хватало квалификации для управления кафедрой экспериментальной физики. Ранее он был автором или соавтором нескольких блестящих экспериментов, проведенных в известных европейских лабораториях. Краков и Ягеллонский университет были также провинциальными по сравнению с Веной, однако Смолуховский принял предложение, потому что из Кракова было ближе до научных центров Европы. Пребывание в Кракове привело к появлению необычайно важных работ, представляющих взаимосвязь между кинетической теорией и термодинамикой, теорию осаждения частиц в поле силы тяжести, основой которой был вывод уравнения, называемого сегодня уравнением Смолуховского, а также теорию коагуляции коллоидов. Смолуховский чрезвычайно активно занимался также проблемами обучения. В это время написаны основные главы дидактического пособия (которое он готовил несколько лет) под названием «Справочник для самоучек». Вышеуказанное заглавие может ввести в заблуждение будущего читателя. Согласно заметке в «Справочнике», Смолуховский каждого изучающего физику признавал самоучкой. В части, посвященной элементарному обучению, Смолуховский определил такие основные дидактические цели: во-первых, обучение способности наблюдения, во-вторых, самостоятельное логическое умозаключение на основе наблюдений. Он считал, что достижение вышеназванных целей возможно только во время учебы, опирающейся на наблюдения и эксперименты. Смолуховский выступал против усвоения знаний по физике «через посредничество печатной бумаги». Он говорил, что если учитель будет учить «догматично и чисто по книжкам» – то лучше, чтобы он вовсе не учил. Смолуховский был человеком сдержанным, однако в этом случае он писал с возмущением о системе обучения, которая «одурачивает» и «уничтожает врожденные способности». Только на третьем месте перечислил он ознакомление ученика с основными законами природы и мало ценил знания, выученные наизусть. Об этом свидетельствуют такие слова Смолуховского: «Физику не надо знать, но надо знать, где искать». Во время доклада на Съезде польского учительства в мае 1917 года Смолуховский представил достоинства точных наук, подчеркивая, что речь идет не только об их полезности, но и о том, что с древнейших времен они были «противоядием против слепой веры в авторитеты, против раболепия умов… Они ведут борьбу с ложью и фразами-болезнями, которые точат наше общество и деформируют наш литературный язык…» Трудно не заметить в этом анализе теории обучения метких замечаний, актуальных и ныне.

Акварель М.Смолуховского

В 1916 году Смолуховский прочитал три лекции в Гёттингене, которые до сих пор остаются основополагающим введением в проблемы броуновского движения и молекулярных флуктуаций. В том же году он получил предложение переехать в Венский университет. Он согласился после некоторых колебаний, но дело распалось по национальным причинам. Сходное предложение поступило из Варшавы. В такой ситуации Ягеллонский университет предложил Смолуховскому (желая его «остановить») звание ректора. К сожалению, в августе 1917 года Смолуховский заболел дизентерией и 5 сентября 1917 года умер в возрасте чуть более 45 лет. Посмертные воспоминания о Смолуховском написали физики такого уровня, как Альберт Эйнштейн и Арнольд Зоммерфельд. В последующие годы два многолетних научных сотрудника Смолуховского получили Нобелевские премии по химии – Рихард Зигмонди в 1925 году и Теодор Сведберг в 1926 году.

Не только статьи Смолуховского, посвященные разрешению проблемы броуновского движения, сыграли фундаментальную роль в развитии физики. Также ценны его работы, написанные в конце жизни. Особенно актуальное значение имеет так называемый мысленный эксперимент, предложенный Смолуховским в 1912 году. Этот эксперимент, связанный со вторым законом термодинамики, относится к возможности получения «полезной» работы из броуновского движения. Позднее он был популяризирован и расширен Ричардом Фейнманом в его известных лекциях по физике и стал импульсом к развитию модели броуновских двигателей.

Публикация 1914 года об ограничениях второго закона термодинамики, которая основывалась на докладе, сделанном Смолуховским в Гёттингене, повлияла на развитие квантовой механики, конкретно – на теорию измерений фон Неймана. Об этом прекрасно написал в книге «Эволюция понятий квантовой механики» известный американский историк науки Макс Джаммер: «Идея Смолуховского о разуме, постоянно осведомленном о мгновенном состоянии динамической системы и поэтому могущем нарушать второй закон термодинамики, не совершая никакой работы, была, вероятно, самым первым логически неопровержимым умопостроением на тему воздействия разума на материю. Оно, как мы видели, проложило путь к далеко ведущему заключению фон Неймана о том, что невозможно полным и последовательным образом сформулировать законы квантовой механики без обращения к человеческому сознанию».

Уравнения Смолуховского, разработанные им теоретические основы и вычислительные методы стали фундаментом статистической физики и особенно важной сегодня ее отрасли, называемой теорией стохастических процессов, развиваемой как физиками, так и математиками. Применения уравнений Смолуховского простираются от физики (как макроскопических, так и субатомных систем) и химии до биологии и технических наук. Многочисленны и практические применения модели Смолуховского, например – индустриальное очищение воды, коагуляция молока, возникновение гелиевых барьеров, агрегация гранулоцитов, адгезия лейкоцитов, рост нанотрубок и многое другое.

Мариан Смолуховский как гениальный ученый оставил великолепное наследие. Но прежде всего он был всесторонним человеком. В своей короткой 45-летней жизни он нашел также время, чтобы быть счастливым мужем и отцом двоих детей, играть на рояле, писать акварельную живопись, ходить на лыжах, а также принадлежать к числу знаменитых высокогорных альпинистов.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2012» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2261» или «Ф2268». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2262 предлагалась на X Устной олимпиаде по геометрии, задача М2265 – на заключительном этапе IV Олимпиады имени Л.Эйлера, задача М2266 – на международной олимпиаде Romanian Masters of Mathematics 2012.

Задачи М2261–М2268, Ф2268–Ф2274

М2261. Решите в целых числах уравнение

$$\frac{10}{7} = x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}.$$

В.Сендеров

М2262. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно: $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $AB = AE$, $CB = CD$, $AC = 1$. Найдите площадь этого пятиугольника.

Ю.Блинков

М2263. Выпуклый 999-угольник разбили непересекающимися диагоналями на треугольники. После этого k треугольников окрасили в черный цвет, а оставшиеся l – в белый цвет так, что треугольники, граничащие по стороне, окрашены в разные цвета. Какое наибольшее значение может принимать выражение $k - l$?

П.Кожевников

М2264. 2500 королей расставлены в клетках доски 100×100 так, что никакие два короля не бьют друг друга и в каждом ряду (в столбце или строке) находится ровно 25 королей. Найдите количество таких расстановок.

С.Берлов

М2265. Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно?

С.Волченков, С.Берлов, И.Богданов

М2266. Докажите, что существуют бесконечно много натуральных чисел n таких, что $2^{2^n+1}+1$ делится на n, а 2^n+1 не делится на n.

В.Сендеров

М2267. В институте Социальной справедливости им. П.П.Шарикова работают 15 научных сотрудников. Каждый из них изначально получает от 1 до 9 долларов в месяц. Каждый месяц директор института повышает зарплату 11 сотрудникам на 1 доллар в месяц по своему усмотрению. За какое минимальное число месяцев он гарантированно может сделать все зарплаты равными?

А.Белов, А.Ковальджи

М2268*. В треугольнике ABC окружность проходит через вершины B, C и касается вписанной окружности в точке A'. Аналогично определяются точки B', C'. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

А.Бадзян

Ф2268. Пираты стреляют из пушки по защитникам береговой крепости. Рисунок 1 показывает взаимное расположение корабля, пушки, ядра и стены крепости в некий момент времени. Пренебрегая сопротивлением

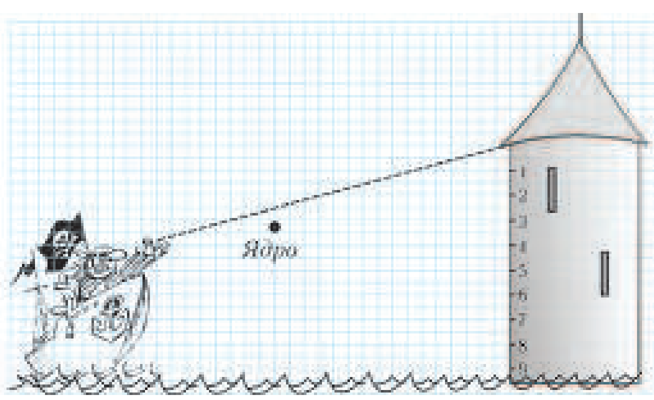


Рис. 1

воздуха, найдите место на стене, в которое попадет ядро. Пунктирная линия показывает ось симметрии закрепленной пушки.

Дж.Сильвер

Ф2269. В цилиндрической жестяной банке находится невязкий жидкий напиток, основное содержимое которого – вода. Банке, заполненной напитком, предоставили возможность скатиться без проскальзывания по наклонной плоскости с нулевой начальной скоростью и замерили время скатывания t_0. Затем в банке сделали два маленьких отверстия, через них половину напитка слили (или выпили), отверстия заклеили скотчем и теперь уже полупустую банку снова отпустили без начальной скорости с того же места на той же наклонной плоскости. На прохождение того же маршрута полупустая банка затратила время $t = 1{,}2t_0$. Какое время потребуется на прохождение того же маршрута при тех же начальных условиях для совсем пустой банки?

Б.Анкин

Ф2270. Школьник Вася узнал, что энергия всегда сохраняется и что работа может превращаться в тепло. Он налил в стакан воду при комнатной температуре и начал ее интенсивно размешивать чайной ложкой. Частота движений ложки была около 5 Гц. После 5 минут работы Вася решил измерить, на сколько поднялась температура воды. Какой должна быть чувствительность термометра, чтобы зафиксировать это изменение температуры? Размеры стакана и ложки выберите сами.

В.Асев

Ф2271. Резиновая оболочка воздушного шарика имеет массу $m = 3$ г. Оболочку заполняют горючим газом – метаном CH_4, который имеет комнатную температуру. При каком диаметре шарик с метаном начнет «всплывать» в воздухе? Разницей давлений внутри шарика и снаружи можно пренебречь.

С.Метанин

Ф2272. В электрической схеме, изображенной на рисунке 2, все батарейки одинаковые, идеальные и имеют ЭДС $\mathscr{E} = 1$ В каждая. Все резисторы тоже одинаковые и имеют сопротивление $R = 10$ Ом каждый. Найдите токи, текущие через каждую батарейку и через каждый резистор (нумерацию элементов введите сами).

С.Хемов

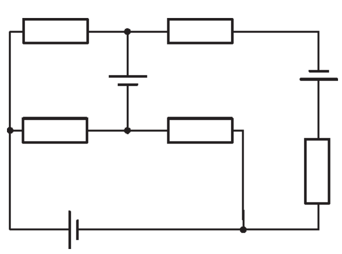


Рис. 2

Ф2273. В камере Вильсона зарегистрированы последствия столкновения α-частицы и покоившегося до удара протона. В однородном магнитном поле перпендикулярно вектору его индукции после удара частицы двигались по окружностям с радиусами R и $0{,}75R$. Каким был радиус R_0 траектории α-частицы до удара?

Ч.Вильсон

Ф2274. Для ионизации атома водорода, находящегося в основном состоянии, требуется энергия $E = 13{,}6$ эВ $\approx$ ≈ 10 эВ. Оцените энергию, которая нужна, чтобы полностью ионизировать один атом урана $_{92}U$.

У.Ранов

Решения задач М2246–М2253, Ф2253–Ф2259

М2246. *Перед нами две чашки, в них кофе с молоком. В первой чашке больше кофе, чем молока, а вместе в двух чашках молока и кофе поровну. Можно ли за несколько переливаний добиться того, чтобы в первой чашке оказалось больше молока, чем кофе?*

Ответ: нет.

Докажем, что в любой момент времени верны два утверждения: 1) в первой чашке доля кофе не меньше половины; 2) во второй чашке доля кофе не больше половины. Конечно, утверждения 1 и 2 эквивалентны, поскольку вместе в двух чашках молока и кофе поровну. Перед началом переливаний эти утверждения верны. Пусть они верны перед очередным переливанием. Тогда достаточно понять, что и после этого переливания они останутся верными.

Если очередное переливание было сделано из первой чашки во вторую, то доля кофе в первой чашке осталась неизменной, значит, утверждение 1 (а следовательно, и 2) остается верным. Аналогично рассуждаем и в том случае, когда очередное переливание было сделано из второй чашки в первую: в этом случае доля кофе во второй чашке осталась неизменной, значит, утверждение 2 (а следовательно, и 1) остается верным.

П.Кожевников

М2247. *При каких $n > 1$ из равенства $x_1^{x_2} = x_2^{x_3} = \ldots$ $\ldots = x_n^{x_1}$ следует $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ ($x_1, \ldots, x_n$ – положительные числа)?*

Ответ: при нечетных n.

При четных $n = 2k$ можно положить $x_1 = x_3 = \ldots$ $\ldots = x_{2k-1} = 2$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2k} = 4$.

Предположим, что при нечетном $n = 2k + 1$ нашлись положительные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, среди которых есть различные, такие что $x_1^{x_2} = x_2^{x_3} = \cdots = x_n^{x_1} = A$.

Если $x_1 = x_2$, то из равенства $x_1^{x_2} = x_2^{x_3}$ имеем $x_2 = x_3$. Из следующего равенства получаем $x_3 = x_4$ и т.д. Значит, $x_1 = \ldots = x_n$ – противоречие.

При $A = 1$ все x_i равны 1 – также имеем противоречие.

Пусть $A > 1$, тогда все x_i больше 1. Пусть $x_1 < x_2$, тогда $x_1^{x_2} = x_2^{x_3} > x_1^{x_3}$, откуда $x_2 > x_3$ (мы воспользовались тем, что $x_1 > 1$). Аналогично, из неравенства $x_2 > x_3$ получаем $x_3 < x_4$, и т.д., наконец, $x_{2k} > x_{2k+1}$, $x_{2k+1} < x_1$, $x_1 > x_2$. Пройдя круг неравенств, приходим к противоречию. Случай $x_1 > x_2$ рассматривается аналогично.

Пусть $A < 1$, тогда все x_i меньше 1. Пусть $x_1 < x_2$, тогда $x_1^{x_2} = x_2^{x_3} > x_1^{x_3}$, откуда $x_2 < x_3$ (мы воспользовались тем, что $x_1 < 1$). Далее, последовательно получаем $x_2 < x_3 < x_4 < \ldots < x_n < x_1$. Противоречие (отметим, что в случае $A < 1$ мы не пользовались нечетностью n).

Замечание. При $A > 1$ можно рассуждать несколько иначе и получить полное описание наборов $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию.

Пусть для определенности $x_1 > 1$ – наименьшее среди всех x_i. Тогда из равенств $x_1^{x_2} = x_i^{x_{i+1}}$, $i = 2, \ldots, n$ (здесь полагаем $x_{n+1} = x_1$), следует, что x_2 – наибольшее среди всех x_i. Затем из равенств $x_2^{x_3} = x_i^{x_{i+1}}$, $i = 3, \ldots, n, 1$, следует, что так как x_2 – наибольшее, то x_3 – наименьшее среди всех x_i, и т.д. Пройдя так полный круг, для нечетного n, как и выше, получаем $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, что невозможно по условию. При четном n имеем $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2n-1} = a$, $x_2 = x_4 = \ldots \ldots = x_{2n} = b$, где $a^b = b^a$. Последнее равенство в случае $a \neq b$ означает, что $(a, b) = \left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$, где $t > 0$, $t \neq 1$. При этом a и b натуральны, в точности если $(a, b) = (2, 4)$ или $(a, b) = (4, 2)$.

В.Сендеров

М2248. *а) В вершинах 33-угольника записали в некотором порядке целые числа от 1 до 33. Затем на каждой стороне написали сумму чисел в ее концах. Могут ли на сторонах оказаться 33 последовательных целых числа (в каком-нибудь порядке)?*
б) Тот же вопрос для 32-угольника.

Ответ: а) могут; б) нет.

а) Пусть числа в вершинах идут в таком порядке: 1, 18, 2, 19, 3, 20, …, 16, 33, 17. Нетрудно убедиться, что суммы двух соседних будут возрастать по порядку от 19 до 50. А сумма первого и последнего равна 18.

б) Предположим, что такое возможно и числа, написанные на сторонах 32-угольника, оказались равными числам $n + 1$, $n + 2$, …, $n + 32$. Так как каждое число на стороне получается суммированием двух чисел, стоящих в ее концах, то сумма всех чисел на сторонах равна удвоенной сумме всех чисел в вершинах. Тогда имеем $(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \ldots + (n + 32) = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 32)$, откуда $32n = 1 + 2 + 3 + \ldots \ldots + 32$. Но $1 + 2 + 3 + \ldots + 32 = 16 \cdot 33$ – не делится на 32. Противоречие.

Н.Авилов, П.Кожевников

М2249. *На плоскости даны 10 прямых общего положения (нет параллельных и никакие три не проходят через одну точку). При каждой точке пересечения выбирается наименьший угол, образованный проходящими через нее прямыми. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих углов.*

Ответ: $2250°$.

Через $\angle(l, m)$ обозначим (наименьший) угол между прямыми l и m, а через $\measuredangle(l, m)$ – *направленный угол* от l до m, т.е. минимальный угол поворота против часовой стрелки, на который нужно повернуть прямую l, чтобы она совместилась с прямой m. Из определений ясно, что всегда $\angle(l, m) \le 90°$, а $\measuredangle(l, m) + \measuredangle(m, l) = 180°$, при этом меньший из углов $\measuredangle(l, m)$ и $\measuredangle(m, l)$ равен углу $\angle(l, m)$ (рис.1).

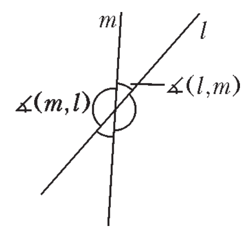


Рис. 1

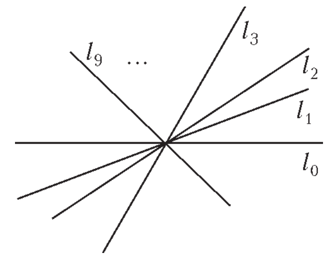


Рис. 2

Можно считать, что все данные в задаче прямые проходят через одну точку. Обозначим одну из прямых через l_0, а остальные занумеруем $l_1, \ldots, l_9$ так, что $\measuredangle(l_0, l_1) < \measuredangle(l_0, l_2) < \ldots < \measuredangle(l_0, l_9)$ (рис.2).

Имеем

$$s_1 = \angle(l_0, l_1) + \angle(l_1, l_2) + \angle(l_2, l_3) + \ldots + \angle(l_9, l_0) \le$$
$$\le \measuredangle(l_0, l_1) + \measuredangle(l_1, l_2) + \measuredangle(l_2, l_3) + \ldots + \measuredangle(l_9, l_0) = 180°,$$
$$s_2 = \angle(l_0, l_2) + \angle(l_1, l_3) + \angle(l_2, l_4) + \ldots + \angle(l_9, l_1) \le$$
$$\le \measuredangle(l_0, l_2) + \measuredangle(l_1, l_3) + \measuredangle(l_2, l_4) + \ldots + \measuredangle(l_9, l_1) =$$
$$= \left(\measuredangle(l_0, l_1) + \measuredangle(l_1, l_2)\right) + \left(\measuredangle(l_1, l_2) + \measuredangle(l_2, l_3)\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\measuredangle(l_9, l_0) + \measuredangle(l_0, l_1)\right) =$$
$$= 2\left(\measuredangle(l_0, l_1) + \measuredangle(l_1, l_2) + \measuredangle(l_2, l_3) + \ldots + \measuredangle(l_9, l_0)\right) =$$
$$= 2 \cdot 180°.$$

Таким же образом получаем, что

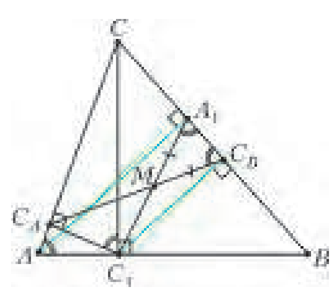
$$s_3 = \angle(l_0, l_3) + \angle(l_1, l_4) + \angle(l_2, l_5) + \ldots + \angle(l_9, l_2) \le$$
$$\le 3 \cdot 180°,$$
$$s_4 = \angle(l_0, l_4) + \angle(l_1, l_5) + \angle(l_2, l_6) + \ldots + \angle(l_9, l_3) \le$$
$$\le 4 \cdot 180°.$$

Складывая полученные оценки с неравенствами $\angle(l_i, l_{i+5}) \le 90°$, где $i = 0, 1, 2, 3, 4$, получаем, что сумма углов, о которой идет речь в задаче, не превосходит $(1 + 2 + 3 + 4) \cdot 180° + 5 \cdot 90° = 25 \cdot 90° = 2250°$.

С другой стороны, эта оценка достигается. Например, в случае когда углы между соседними прямыми равны между собой (т.е. $\measuredangle(l_0, l_1) = \measuredangle(l_1, l_2) = \measuredangle(l_2, l_3) = \ldots = \measuredangle(l_9, l_0) = 18°$), все неравенства, которые были использованы в оценке, обращаются в равенства.

П.Кожевников

М2250. *В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 – основания высот из вершин A, B, C, точки C_A и C_B – проекции C_1 на AC и BC соответственно. Докажите, что прямая C_AC_B делит пополам отрезки C_1A_1 и C_1B_1.*



Рассмотрим случай остроугольного треугольника. Пусть отрезки C_AC_B и C_1A_1 пересекаются в точке M (см. рисунок). Точки C_A и C_B лежат на окружности с диаметром CC_1. Поэтому

$$\angle C_AC_BC = \angle C_AC_1C = 90° - \angle C_ACC_1 = \angle A.$$

Точки C_1 и A_1 лежат на окружности с диаметром AC, значит, $\angle C_1A_1B = 180° - \angle CA_1C_1 = \angle A$. Следовательно, треугольник A_1MC_B равнобедренный, и $A_1M = C_BM$. Углы $A_1C_1C_B$ и C_1C_BM дополняют равные углы $C_1A_1C_B$ и A_1C_BM до $90°$, значит, треугольник C_1MC_B тоже равнобедренный, и $C_1M = C_BM = A_1M$.

Так же доказывается, что прямая C_AC_B делит пополам и отрезок C_1B_1.

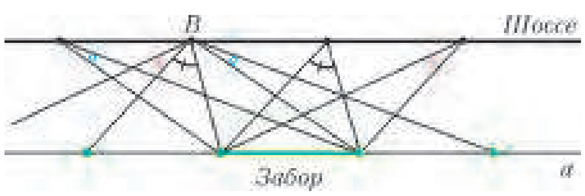
В случаях, когда один из углов треугольника тупой, углы вычисляются аналогично.

Л.Медников, А.Шаповалов

М2251. *По прямому шоссе со скоростью 60 км/ч едет машина. Недалеко от дороги стоит 100-метровый забор, параллельный дороге. Каждую секунду пассажир автомобиля измеряет угол, под которым виден забор. Докажите, что сумма всех измеренных им углов меньше 1100 градусов.*

За 6 секунд машина проезжает 100 м. Разобьем вершины измеренных углов на 6 групп: в одну группу объединим вершины с интервалом 100 м между соседними (6 секунд по времени). Рассмотрим одну из групп.

Параллельно перенесем все углы с вершинами в этой группе так, чтобы их вершины попали в одну точку B (см. рисунок). Пусть забор лежит на прямой a. Каждый перенесенный угол высекает на ней 100-метровый участок, полученный сдвигом забора. Эти участки прямой a не перекрываются, значит, перенесенные углы не перекрываются. Так как эти углы помещаются в развернутом угле с вершиной B, их сумма не превосходит $180°$. Итак, сумма углов с вершинами в одной группе не превосходит $180°$. Значит, сумма всех измеренных углов не превосходит $6 \cdot 180° = 1080° < 1100°$.



Л.Медников, А.Шаповалов

М2252. *Докажите, что при $n > 1$ число $1^1 + 3^3 + 5^5 + 7^7 + 9^9 + \ldots + (2^n - 1)^{2^n - 1}$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.*

Вначале докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. $k^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$ *для каждого нечетного числа k.*

Доказательство.

$$k^{2^n} - 1 = (k-1)(k+1)(k^2+1)(k^4+1)\ldots(k^{2^{n-1}}+1)$$

– произведение $n + 1$ четных множителей. Вдобавок один из первых двух множителей делится на 4.

Лемма 2. $(k+2^n)^k \equiv k^k(1+2^n) \pmod{2^{n+2}}$ *при $n > 1$.*

Доказательство.

$$(k+2^n)^k = k^k + k \cdot k^{k-1} \cdot 2^n + C_k^2 k^{k-2} \cdot 2^{2n} + \ldots,$$

а все слагаемые, кроме двух первых, делятся на 2^{n+2}.

Вернемся к решению задачи. Обозначим сумму из условия через S_n, а разность $S_{n+1} - S_n$ через R_n. Будем вести индукцию по n. *База* ($n = 2$) очевидна. *Шаг индукции*. $S_{n+1} = S_n + R_n$. Здесь R_n – сумма 2^{n-1} слагаемых вида m^m, где $m = 2^n + k$, k – нечетное число, меньшее 2^n. По лемме 1 имеем $m^m = m^{2^n} \cdot m^k \equiv m^k \pmod{2^{n+2}}$. Поэтому

$$R_n \equiv (1+2^n) + (3+2^n)^3 + (5+2^n)^5 + \ldots \pmod{2^{n+2}}.$$

По лемме 2,

$$R_n \equiv S_n(1+2^n) \pmod{2^{n+2}}.$$

Значит,

$$S_{n+1} \equiv 2S_n(1+2^{n-1}) \pmod{2^{n+2}}.$$

По предположению индукции S_n делится на 2^n (значит, S_{n+1} делится на 2^{n+1}) и не делится на 2^{n+1} (значит, S_{n+1} не делится на 2^{n+2}).

Л.Медников, А.Шаповалов

М2253. *100 красных точек разделили синюю окружность на 100 дуг, длины которых являются всеми натуральными числами от 1 до 100 в произвольном порядке. Докажите, что существуют две перпендикулярные хорды с красными концами.*

Если найдутся две диаметрально противоположные красные точки K и K', то для любой другой красной точки L угол KLK' равен $90°$, т.е. хорды KL и LK' – искомые. Пусть диаметрально противоположных красных точек нет.

Далее буквы без штрихов обозначают только красные точки, те же буквы со штрихом – диаметрально противоположные (синие). Если не оговорено противное, то рассматриваются только дуги с красными концами. $|AB|$ обозначает длину кратчайшей дуги между точками A и B, h – длину полуокружности (это целое число, так как общая длина окружности четна). Дугу без внутренних красных точек назовем *простой*.

Назовем *длинной* дугу длины $h - k$, где $1 \le k \le 100$. Она составлена из простых дуг, в том числе двух *крайних* – примыкающих к концам длинной дуги. Докажем, что если длины обеих крайних не равны k, то искомые хорды найдутся.

Рассмотрим, где может находиться простая дуга длины k. Она не может примыкать к длинной снаружи (иначе объединение дуг образует полуокружность и есть диаметрально противоположные красные точки). Значит, концы дуг – четыре разные точки. Возможны два варианта взаимного расположения.

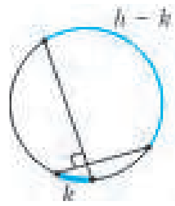


Рис. 1

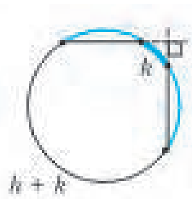


Рис. 2

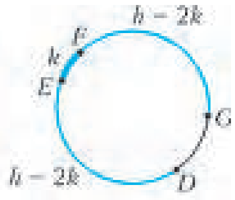


Рис. 3

1) Простая дуга лежит вне длинной (рис.1). Проведем две пересекающиеся хорды от концов длинной дуги к концам простой. Угол между хордами измеряется полусуммой угловых мер дуг, поэтому он прямой.
2) Простая дуга лежит на длинной (рис.2). Проведем две непересекающиеся хорды от концов длинной дуги к концам простой. Угол между хордами измеряется полуразностью угловых мер дуги, дополнительной к длинной, и простой дуги, поэтому он прямой.
Осталось доказать, что найдется длинная дуга, для которой дополняющая ее до h простая дуга – не крайняя.
Назовем *сверхдлинной* дугу длины $h-k$, где $1 \le k \le 50$. Для каждой точки A выберем сверхдлинную дугу с концом в этой точке: если A' лежит на простой дуге BC и $k = |A'B| \le |A'C|$, то $k \le 50$; в этом случае выбираем $|AB| = h-k$ (при равенстве $|A'B| = |A'C|$ выбираем обе: AB и AC). Тем самым выбрано не менее 50 сверхдлинных дуг. Докажем, что среди выбранных есть две дуги одинаковой длины. Если нет длины $h-50$, то длин меньше, чем дуг, и равные дуги найдутся по принципу Дирихле. Если длина $h-50$ есть, она возникла при попадании A' в середину дуги BC длины 100, значит, есть две дуги длины $h-50$. Обе дуги длины $h-k$ могут иметь крайнюю дугу длины k, только если они пересекаются по этой дуге. Итак, пусть $|DF| = |EG| = h-k$, и они пересекаются по простой дуге EF длины k (рис.3). Но тогда DE и FG – непересекающиеся длинные дуги длины $h-2k$, и хотя бы на одной из них не лежит простая дуга длины $2k$.

Л.Медников, А.Шаповалов

Ф2253. *В Москве 08 февраля 2011 года, в середине временно́го промежутка от зимнего солнцестояния до весеннего равноденствия, было принято решение об отмене перехода на сезонное время. На сколько градусов в полдень этого дня Солнце отклонялось от зенита? Насколько точно для этого дня выражение «в полдень Солнце висит над головой и печет ее»?*

Из справочника находим: широта Москвы $\alpha = 55{,}83°$, наклон оси вращения Земли к плоскости ее орбиты $\beta = 23{,}44°$, долгота Москвы $\gamma = 37{,}62° \pm 0{,}31°$. Положение Солнца в астрономический полдень этого дня, т.е. в момент, когда Солнце находится на максимальной угловой высоте над горизонтом, в Москве определяется выражением

$$90° - \alpha - \beta\cos 45° \approx 17{,}6°.$$

Таким образом, Солнце отклонилось от зенита в полдень этого дня на $72{,}4°$. Вряд ли при таком положении Солнце могло сильно напечь голову.

Д.Медведев

Ф2254. *На тело, которое в начальный момент имело скорость $\vec{v}$, начинает действовать постоянная сила $\vec{F}$. Спустя время τ величина скорости тела стала равной $v/2$. За следующий такой же интервал времени модуль скорости уменьшился еще в два раза. Определите, в какой момент времени t_1 вектор скорости тела будет перпендикулярен вектору начальной скорости. Чему будет равна по величине скорость тела спустя интервал времени 3τ с начала действия силы? Через какое время t_2 с момента начала действия силы скорость тела по модулю снова будет равна v? Чему равна масса M тела?*

Обозначим отношение величины изменения скорости за время τ к величине скорости v через x, а величину косинуса угла между начальной скоростью $\vec{v}$ и направлением силы $\vec{F}$ – через y. Из условия прежде всего следуют такие два уравнения:

$$1 + 2xy + x^2 = \frac{1}{4} \text{ и } 1 + 4xy + 4x^2 = \frac{1}{16}.$$

Этим уравнениям соответствуют значения

$$x = \frac{3}{4\sqrt{2}} \text{ и } y = -\frac{11\sqrt{2}}{16}.$$

В момент времени t_1, когда новая скорость перпендикулярна начальной скорости, выполняется соотношение

$$1 + \frac{xyt_1}{\tau} = 0,$$

откуда следует

$$t_1 = \frac{64}{33}\tau.$$

Отношение квадрата скорости z^2 в момент времени 3τ к величине v^2 равно

$$\frac{z^2}{v^2} = 1 + 6xy + 9x^2.$$

Отсюда находим величину скорости тела в момент времени 3τ:

$$z = \frac{\sqrt{7}}{4}v.$$

Для нахождения момента времени t_2, когда величина скорости снова примет значение v, нужно решить такое уравнение:

$$1 + \frac{2xyt_2}{\tau} + \left(\frac{t_2 x}{\tau}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение имеет два решения, одно из которых $t_2 = 0$ соответствует начальному моменту времени, а второе решение – это то время, которое нас интересует:

$$t_2 = \frac{11}{3}\tau.$$

Изменение скорости тела за время τ под действие силы F равно $\frac{3}{4\sqrt{2}}v$, следовательно, масса тела равна

$$M = \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{F\tau}{v}.$$

С.Варламов

Ф2255. *С каким ускорением движется узелок на невесомой и нерастяжимой нити в механической системе, изображенной на рисунке 1? Массы грузов m и M известны, трения в блоках нет, блоки невесомы, а свободные участки нити вертикальны.*

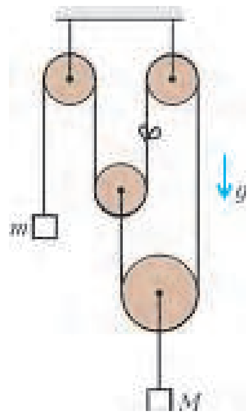


Рис. 1

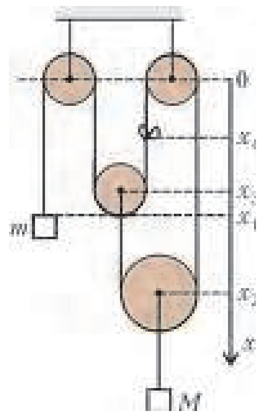


Рис. 2

Введем ось координат, направленную вертикально вниз, а начало отсчета выберем на линии расположения осей неподвижных блоков (рис.2). Поскольку нить нерастяжима, сохраняются ее длина:

$$x_1 + x_3 + 2x_2 = \text{const}$$

и длина участка нити между узелком и одним из ее концов:

$$x_1 + 2x_3 - x_4 = \text{const}.$$

Из этого следуют такие кинематические связи для ускорений:

$$a_1 + a_3 + 2a_2 = 0 \quad \text{и} \quad a_1 + 2a_3 - a_4 = 0.$$

Рассмотрим натяжение нити на разных участках. Поскольку блок, ось которого имеет координату x_3, невесом и невесома нить, охватывающая шкив этого блока, то нить имеет одинаковые силы натяжения T по обе стороны этого блока. Натяжение вертикального участка нити, конец которого прикреплен к оси этого блока, тоже равно T. Тогда из второго закона Ньютона $0 \cdot a_3 = T - 2T$ следует, что нить не натянута, т.е. $T = 0$. Это означает, что оба груза падают с одинаковыми ускорениями a_1 и a_2, равными g. Из уравнений для кинематических связей следует ответ:

$$a_4 = -5g.$$

С.Варламов

Ф2256. *Расстояние от Солнца С до Венеры В составляет примерно 0,7 а.е., где 1 а.е. – это расстояние от Земли З до Солнца С. Орбиты планет можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости. При каком значении угла φ, составленного отрезками ЗС (соединяющего центры Земли и Солнца) и СВ (соединяющего центры Солнца и Венеры), Венера кажется наиболее яркой?*

Углу φ между отрезками ЗС и СВ однозначно соответствует угол между отрезками ЗВ и ЗС. Обозначим его через α. Этот угол равен

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{0{,}7\sin\varphi}{1 - 0{,}7\cos\varphi}.$$

С Земли видна часть поверхности Венеры, освещенная Солнцем. Площадь этой освещенной части диска Венеры равна

$$\frac{S\left(1 - \cos(\alpha + \varphi)\right)}{2},$$

где S – полная площадь диска Венеры, включающая освещенную и неосвещенную части. Расстояние от Земли до Венеры равно

$$L = \sqrt{(0{,}7\sin\varphi)^2 + (1 - 0{,}7\cos\varphi)^2}\ \text{а.е.}$$

Яркость Венеры определяется выражением:

$$\frac{W\left(1 - \cos(\alpha + \varphi)\right)}{L^2},$$

где W – некая константа. Следовательно, Венера будет казаться наиболее яркой, когда угол φ принимает такое значение, при котором выражение

$$\frac{1 - \cos(\alpha + \varphi)}{(0{,}7\sin\varphi)^2 + (1 - 0{,}7\cos\varphi)^2}$$

имеет максимальное значение. С помощью компьютера (а он есть почти у каждого нынешнего старшеклассника) можно найти искомое значение угла:

$$\varphi \approx 24{,}8^\circ.$$

При этом $\alpha \approx 38{,}85^\circ$.

С.Варламов

Ф2257. *Невесомый жесткий шкив блока имеет внешний радиус R и радиус отверстия r. Этот шкив насажен на закрепленную горизонтальную жесткую ось с диаметром, немного меньшим, чем 2r. Через шкив блока перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами m и M (рис.1). Свободные участки нити, не лежащие на шкиве блока, вертикальны. Между шкивом и осью имеется трение, характеризующееся коэффициентом μ. С какими ускорениями движутся грузы? Рассмотрите разные начальные условия.*

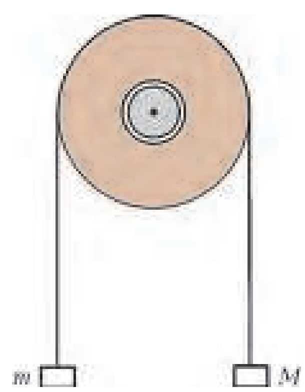


Рис. 1

Направим ось координат x вниз, а ось y – горизонтально. Различные начальные условия соответствуют тому, что шкив блока может в начальный момент либо вращаться против часовой стрелки, либо вращаться по часовой стрелке, либо иметь нулевую начальную угловую скорость. Независимо от того, движутся грузы или не движутся, сумма сил, действующих на невесомый шкив, равна нулю, а также равна нулю сумма моментов сил, действующих на шкив. В силу нерастяжимости нити, в любой момент времени сумма проекций скоростей грузов на ось x равна нулю и сумма проекций ускорений грузов на ось x тоже равна нулю. Обозначим

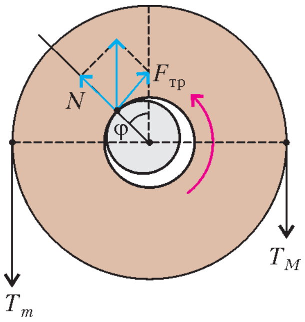


Рис. 2

ускорение груза массой m через a. Если грузы движутся, то их ускорения зависят от знаков проекций скоростей грузов или от того, в каком направлении в данный момент вращается шкив блока. На рисунке 2 показаны силы, действующие на шкив блока, вращающийся против часовой стрелки. Сила, действующая на шкив со стороны оси, направлена вертикально, а ее проекции на направление, перпендикулярное к касательной поверхности в месте контакта шкива и оси, и на направление самой касательной к этой поверхности связаны соотношением $F_{тр}/N = \mu$. Обозначим через φ угол между отрезком, соединяющим центр симметрии оси и место контакта, и вертикалью, а силы натяжения участков нити – через T_m и T_M. Так как суммарный момент сил, действующих на шкив, равен нулю, выполняется соотношение

$$(T_m + T_M)\sin\varphi \cdot r + T_M \cdot R = T_m \cdot R .$$

Поскольку имеет место проскальзывание, выполняется условие

$$(T_m + T_M)\cos\varphi = N, \quad T_{тр} = (T_M + T_m)\sin\varphi .$$

Отсюда следует

$$\mathrm{tg}\varphi = \mu.$$

В результате получается такая связь между силами натяжения нити:

$$T_M = T_m \frac{R - r\mu/\sqrt{1+\mu^2}}{R + r\mu/\sqrt{1+\mu^2}} = T_m\alpha .$$

Теперь запишем уравнения движения (второй закон Ньютона) для каждого груза:

$$ma = mg - T_m , \quad -Ma = Mg - T_M$$

и получим значение ускорения груза для случая вращения шкива против часовой стрелки:

$$a = g\frac{m\alpha - M}{m\alpha + M} .$$

Если это выражение положительно, то скорость груза массой m будет увеличиваться, а если это выражение равно нулю, то его скорость меняться не будет. Если же это выражение отрицательно, то скорость груза массой m сначала постепенно уменьшается, в некий момент груз останавливается, и дальнейшее поведение системы определяется уже иным соотношением.

Рассмотрим теперь другой случай, когда в начальный момент груз массой m двигался вверх, т.е. шкив вращался по часовой стрелке. Аналогично предыдущему случаю (вращение шкива против часовой стрелки), значение ускорения груза будет иметь вид

$$a = -g\frac{M\alpha - m}{M\alpha + m} .$$

Если полученное выражение отрицательно, то скорости грузов системы будут увеличиваться по модулю. Если полученное выражение равно нулю, то скорости движения грузов меняться со временем не будут. Если же это выражение положительно, то движение грузов будет замедляться и в некоторый момент они приобретут нулевые скорости.

Осталось найти условия, при которых система будет не ускоряться, а замедляться и в конце концов остановиться или будет оставаться в покое, если вначале грузы были неподвижны. Это случится при одновременном выполнении двух соотношений:

$$m\alpha < M \text{ и } M\alpha < m .$$

С.Варламов

Ф2258. *Шприц емкостью $V_0 = 12$ см^3 подготовлен для «газового» эксперимента. Шприц заполнен воздухом при атмосферном давлении p_0, и отверстие, к которому прикрепляется игла, герметизировано резиновым колпачком. Поршень шприца перемещается вдоль стен корпуса с трением, и можно считать, что сила трения не зависит от направления перемещения поршня относительно стенок. Шприц поместили в сосуд и создали в этом сосуде давление, избыточное по сравнению с атмосферным. При этом минимальный объем заключенного внутри шприца воздуха был $V_1 = 2{,}5$ см^3. Затем давление в сосуде вновь вернули к атмосферному, а объем воздуха, запертого внутри шприца, стал $V_2 = 10$ см^3. На сколько максимальное давление в сосуде было больше по сравнению с атмосферным давлением? Считайте температуру неизменной.*

Условие равновесия поршня шприца – это равенство нулю суммы всех сил, действующих на поршень. В начале эксперимента давления воздуха внутри и снаружи шприца были одинаковыми, поэтому сила трения между поршнем и корпусом была равна нулю. При максимальном сжатии воздуха выполняется такое соотношение:

$$\frac{p_0V_0}{V_1} + \frac{F_{тр1}}{S} = p_0 + \Delta p .$$

Здесь S – это площадь поршня, Δp – искомое избыточное давление. При восстановлении давления воздуха в сосуде до величины p_0 выполняется иное условие равновесия поршня:

$$\frac{p_0V_0}{V_2} - \frac{F_{тр2}}{S} = p_0 .$$

Из этих двух уравнений можно исключить силу трения, величина которой по условию не зависит от направления перемещения поршня относительно корпуса. В результате получим

$$\Delta p = p_0\left(\frac{V_0}{V_2} + \frac{V_0}{V_1} - 2\right) = 4p_0 .$$

С.Дмитриев

Ф2259. *У идеального трансформатора есть две обмотки с нулевыми сопротивлениями, которые имеют N и 3N витков. Если выводы обмотки с большим числом витков подключить к источнику переменного напряжения $u = U_0\cos\omega t$, то амплитуда тока холостого хода, когда к выводам второй обмотки ничего не

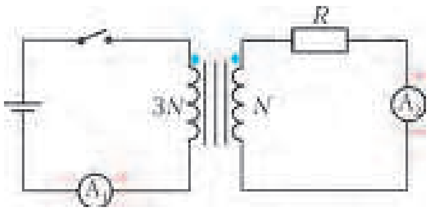


Рис. 1

подключают, равна I_0. Этот трансформатор включили в схему, изображенную на рисунке 1. ЭДС идеальной батарейки как раз равна U_0. Сопротивление резистора равно R. Ключ замыкают на время τ, а затем размыкают. Как зависят показания идеальных амперметров A_1 и A_2 от времени? Постройте графики этих зависимостей.

До момента замыкания ключа токов в обмотках трансформатора не было, поэтому магнитный поток в сердечнике был равен нулю. Рассмотрим, как связаны между собой токи, протекающие по обмоткам идеального трансформатора, и как связаны напряжения на выводах его обмоток. «Идеальность» трансформатора означает, что сопротивления проводов, из которых сделаны обмотки, равны нулю и что весь магнитный поток, созданный током в каждом витке, проходит целиком через любой другой виток как первичной, так и вторичной обмотки. Каждый виток первичной обмотки создает в сердечнике трансформатора магнитный поток, пропорциональный протекающему через этот виток току. Обозначим коэффициент пропорциональности через f. Каждый виток вторичной обмотки также создает в сердечнике поток, причем коэффициент пропорциональности по модулю такой же, как и для первичной обмотки, но имеет противоположный знак (это связано с выбором знаков клемм амперметров и меток на обмотках трансформатора на рисунке 1). Пусть через первичную и вторичную обмотки протекают токи $I_1(t)$ и $I_2(t)$ соответственно. Тогда поток магнитного поля через сердечник равен

$$\Phi(t) = 3NfI_1(t) - NfI_2(t) = Nf\left(3I_1(t) - I_2(t)\right).$$

Если суммарный поток меняется со временем, то в каждом витке обеих обмоток трансформатора возникает ЭДС индукции $e = -d\Phi(t)/dt$. Общее значение ЭДС на каждой из обмоток пропорционально количеству витков в обмотке:

$$\mathcal{E}_1(t) = -3N\frac{d\Phi(t)}{dt}, \qquad (1)$$

$$\mathcal{E}_2(t) = -N\frac{d\Phi(t)}{dt}. \qquad (2)$$

Так как омического сопротивления у обмоток нет, то это и есть напряжения на входе и на выходе трансформатора.

Обратим внимание на то, что отношение напряжений на выходе и на входе трансформатора всегда постоянно, а сами эти напряжения зависят только от скорости изменения суммарного потока, создаваемого токами в обмотках. Если разомкнуть вторичную обмотку, то напряжение на первичной обмотке будет равно

$$\mathcal{E}_1(t) = -9N^2f\frac{dI_1(t)}{dt},$$

т.е. оставшаяся включенной первичная обмотка ведет себя, как катушка с индуктивностью $L_1 = 9N^2f$. Величину L_1 мы можем найти из соотношения между амплитудой напряжения и амплитудой силы тока при подключении трансформатора в режиме холостого хода к генератору переменного синусоидального напряжения:

$$L_1 = \frac{U_0}{\omega I_0}.$$

Теперь вернемся к условию задачи и посмотрим, что будет происходить в цепи после того, как ключ замкнули. Пока ключ замкнут, напряжение на входе (на первичной обмотке трансформатора) равно U_0. Значит, напряжение на выходе трансформатора тоже постоянно и равно $U_0/3$. Соответственно, ток в правой части цепи тоже постоянен и равен

$$I_2(t) = \frac{U_0}{3R}.$$

Посмотрим, как меняется магнитный поток через сердечник трансформатора. Для этого можно воспользоваться любым из уравнений (1) или (2). Например, уравнением (1):

$$\mathcal{E}_1(t) = -U_0 = -3N\frac{d\Phi(t)}{dt},$$

откуда

$$\Phi(t) = \frac{U_0}{3N}t + \Phi(0) = \frac{U_0}{3N}t.$$

Мы использовали тот факт, что непосредственно перед замыканием ключа ($t = 0$) токи в системе не текли, следовательно, магнитный поток в сердечнике трансформатора был равен нулю. Зная зависимость магнитного потока от времени, мы можем найти зависимость тока в левой части цепи от времени:

$$\Phi(t) = \frac{U_0}{3N}t = Nf\left(3I_1(t) - I_2(t)\right) = Nf\left(3I_1(t) - \frac{U_0}{3R}\right),$$

откуда

$$I_1(t) = \frac{U_0}{9R} + \frac{U_0}{9N^2f}t.$$

Несмотря на то что токи в обеих обмотках трансформатора при замыкании ключа изменились скачкообразно, линейная комбинация этих токов $I_1(t) - 3I_2(t)$, а вместе с ней и магнитный поток через сердечник трансформатора менялись непрерывно.

Итак, через время τ после замыкания ключа (т.е. непосредственно перед размыканием) токи в обмотках трансформатора таковы:

$$I_1 = \frac{U_0}{9R} + \frac{U_0\tau}{9N^2f} = I_{10} + \Delta I,$$

$$I_2 = \frac{U_0}{3R} = 3I_{10}.$$

А магнитный поток через сердечник в этот момент равен

$$\Phi(\tau) = \frac{U_0\tau}{3N}.$$

Что же произойдет, если теперь ключ разомкнуть? Ток в левой части цепи скачком упадет до нуля. Ток в правой части найдем из условия сохранения магнитного потока в течение короткого времени размыкания ключа (поток не может мгновенно измениться):

$$I_2(\tau+0) = -\frac{U_0\tau}{3N^2 f} = -3\Delta I .$$

Осталось подставить в полученное выражение значение величины $N^2 f = L_1/9 = U_0/(9\omega I_0)$ и получить ответ для тока во вторичной обмотке сразу после размыкания ключа:

$$I_2(\tau+0) = -3\tau\omega I_0 .$$

После размыкания ключа энергия в сердечнике трансформатора, накопленная в виде энергии магнитного поля, постепенно уменьшается за счет того, что через резистор течет ток и в нем выделяется тепловая энергия. Индуктивность вторичной обмотки трансформатора при разомкнутой первичной обмотке равна

$$L_2 = \frac{L_1}{9} = \frac{U_0}{81\omega I_0} .$$

Закон изменения тока I_2 со временем после размыкания ключа найдем из уравнения

$$I_2 R = -L_2 \frac{dI_2}{dt} .$$

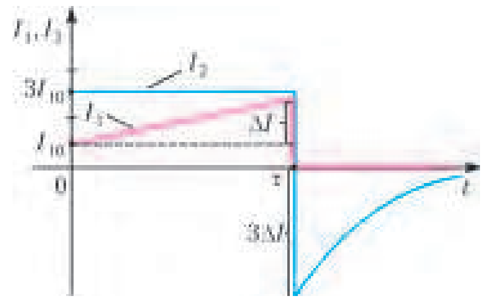


Рис. 2

Отсюда следует

$$I_2(t>\tau) = -\frac{U_0\tau}{3N^2 f}\cdot \exp\left(\frac{-R(t-\tau)}{L_2}\right),$$

т.е. ток I_2 убывает со временем по экспоненциальному закону с характерным временем

$$T = \frac{L_2}{R} = \frac{U_0}{81R\omega I_0} .$$

Графики зависимостей токов в обмотках от времени приведены на рисунке 2.

А.Коршков

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

«Колыбелька» Ньютона

(Начало см. на 4-й странице обложки)

…Движение одинаковых шаров в «колыбельке» Ньютона легко объяснить, когда они не соприкасаются между собой (рис.1). В этом случае удар крайнего шара по цепочке

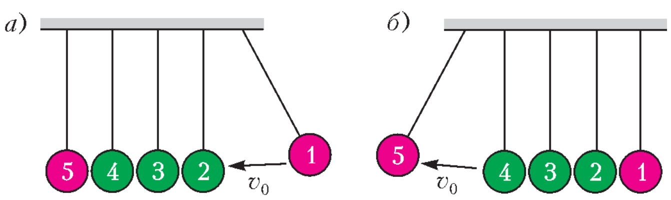


Рис. 1

остальных шаров можно разбить на последовательность соударений между соседними шарами. Считая удары абсолютно упругими, легко заключить, что шар 1 после столкновения с шаром 2 остановится, а шар 2 будет двигаться со скоростью v_0. Затем шар 2 столкнется с шаром 3, и произойдет то же самое. И так далее. В результате весь процесс закончится тем, что шар 5 со скоростью v_0 отлетит влево.

Пусть теперь шары соприкасаются (рис.2). Допустим, что

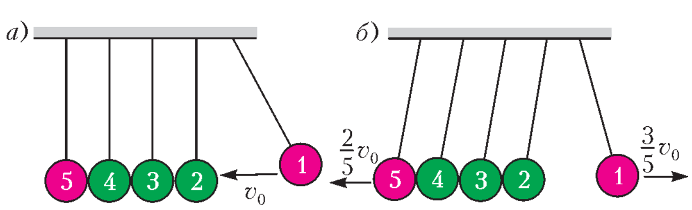


Рис. 2

шары 2, 3, 4 и 5 можно заменить одним телом массой в 4 раза больше, чем у шара 1. Тогда, применяя законы сохранения импульса и энергии к столкновению шара 1 с остальными, получим, что шар 1 после столкновения будет двигаться в противоположную сторону со скоростью $3v_0/5$, а все остальные будут двигаться влево со скоростью $2v_0/5$. Таким образом, выбранная нами модель столкновения оказалась неудачной, так как неверно предсказывает движение шаров.

Чтобы выбрать адекватную модель столкновения одинаковых шаров в «колыбельке» Ньютона, рассмотрим подробнее процесс соударения шара 1 с шаром 2 (рис.3,*а*). Столкнове-

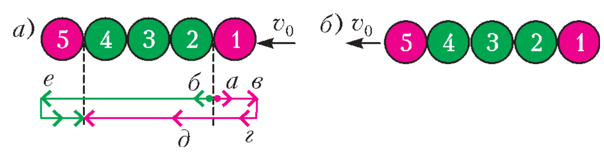


Рис. 3

ние левого края шара 1 с правым краем шара 2 вызывает локальную деформацию сжатия обоих шаров. Эта деформация сразу начинает распространяться со скоростью звука c в виде *двух* волн сжатия – направо по шару 1 и налево по шару 2. Нижняя часть рисунка 3,*а* иллюстрирует распространение этих волн в обе стороны от пунктирной линии, обозначая волны красной (*а*) и зеленой (*б*) стрелками соответственно. «Красная» волна сжатия через интервал времени D/c, где D – диаметр шара, доходит до правого края шара 1 (*в*). В этот момент шар 1 максимально сжат, после чего начинается его расслабление, происходящее справа налево. Таким образом, «красная» волна сжатия отражается от правого края шара 1 и превращается в волну расслабления (*г*). То же происходит и с «зеленой» волной, которая, двигаясь справа

(Продолжение см. на с. 44)

Задачи

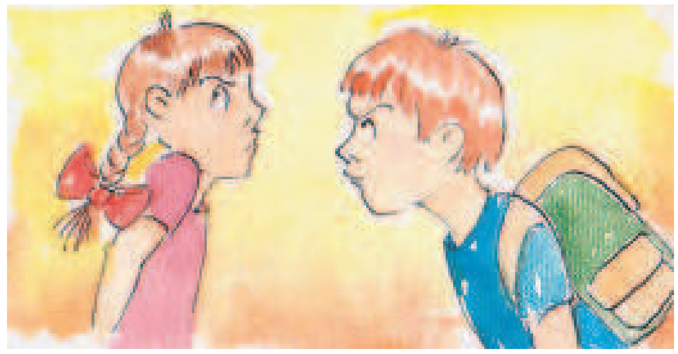
1. Астролог считает год счастливым, если в его записи используются четыре последовательные цифры. Например, следующий, 2013-й год будет именно таким. А когда, по мнению этого астролога, был предыдущий счастливый год?

Н.Нетрусова

2. В отряде богатырей все весят по-разному. Богатыри делятся на наивных, которые всегда говорят правду, и тертых, которые князю правды никогда не говорят. Несколько богатырей стали в круг. На вопрос князя «У тебя есть тертый сосед легче тебя?» все ответили «Нет». После разминки они стали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос князя «У тебя есть наивный сосед легче тебя?» кто-нибудь ответит «Нет».

А.Шаповалов

3. Однажды утром каждый ученик дал одному своему другу рубль. Причем мальчики – девочкам, а девочки – мальчикам. После этого оказалось, что все, кроме двоих, остались «при своих».

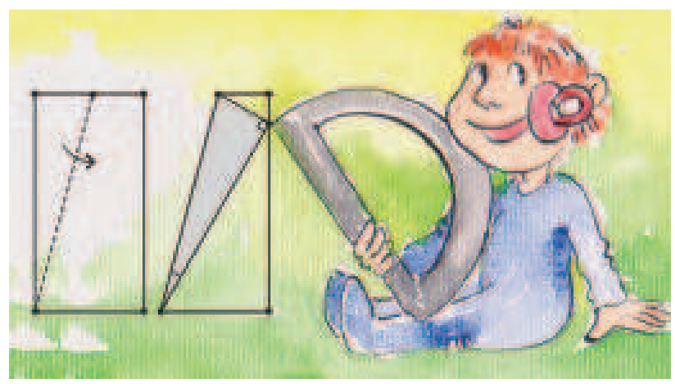


а) Верно ли, что эти двое – мальчик и девочка?
б) Верно ли, что эти двое – мальчик и девочка, если известно, что в школе 2011 школьников?

Д.Калинин

4. Квадратный лист бумаги сложили вдвое, а затем так, как показано на рисунке. Чему равен отмеченный угол?

Д.Шноль



5. Большая свеча сгорает за 1 час и стоит 60 рублей, а маленькая сгорает за 11 минут и стоит 11 рублей. Можно ли отмерить минуту, затратив не более а) 200 рублей; б) 150 рублей?

Л.Медников, А.Шаповалов

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задачи 1, 2, 4 и 5 предлагались на XVIII Летнем турнире имени А.П.Савина, а задача 3 – на турнире «Кострома-open 6–7» в 2010 году.

Иллюстрации Д.Гришуковой

Салфетки «Кванта» и теорема Пифагора

М.ПЕТКОВА

В разное время в «Задачнике «Кванта» предлагались задачи о покрытиях квадратного стола бумажными салфетками в несколько слоев. Салфетки можно перегибать, но нельзя разрывать на части (это требование будет сохраняться на протяжении всей статьи). Мы обсудим способ, который позволяет решить эти задачи, а заодно исследовать и другие подобные покрытия.

Начнем с известной (почти) каждому теоремы Пифагора. По-видимому, о ней – одной из важнейших теорем планиметрии – знали еще во втором тысячелетии до новой эры. Неудивительно, что сейчас известно несколько сотен различных ее доказательств. Есть и весьма экзотические: например, английскому математику первой половины XX века Г.Х. Харди приписывают доказательство, использующее дифференциальные уравнения. К счастью, нам оно не понадобится. Итак…

Теорема Пифагора. *Квадрат гипотенузы с прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов a и b:*

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

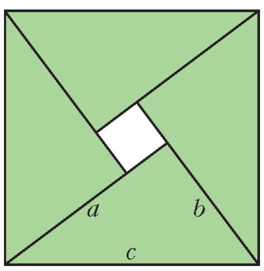


Рис. 1

Доказательство. Сложим четыре копии прямоугольного треугольника с катетами $a > b$ и гипотенузой c, как на рисунке 1, чтобы получился квадрат со стороной c. Тогда в центре останется квадратная дырка со сторонами $a - b$. Осталось посчитать площади:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2 .$$

Если треугольник равнобедренный, то дырки не получится, но на подсчет это не влияет. Теорема доказана.

Но расставаться с рисунком 1 рано: он даст нам ключ к решению задач о салфетках. Отразим каждый из зеленых треугольников относительно его гипотенузы. Получится квадрат со стороной $a + b$, в который вписан квадрат со стороной c. На рисунке 2 отраженные треугольники покрашены желтым, а вся картинка повернута для удобства. Сумма площадей желтых треугольников равна сумме площадей зеленых – ведь при отражении площадь фигуры не меняется. Но тогда *удвоенная площадь вписанного квадрата равна сумме площадей большого квадрата и белого квадратика.*

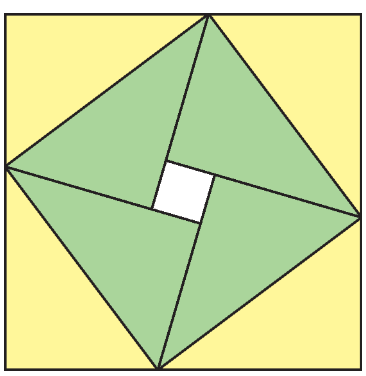


Рис. 2

Упражнение 1. Докажите этот факт алгебраически.

Теперь посмотрим, как сделанные наблюдения помогают решить задачи про покрытия.

Задача М1755* (В.Произволов). *Имеется 10 квадратных салфеток, площадь каждой из которых равна 1, и квадратный стол, площадь которого равна 5. Докажите, что стол можно покрыть салфетками в два слоя.*

Решение. Укладываем 9 салфеток в виде (желтого) квадрата размером 3×3 (рис.3). В этот квадрат вписываем (зеленый) стол площади 5 и загибаем четыре желтых треугольника. Площадь центрального (голубого) квадрата равна $2 \cdot 5 - 9$, т.е. равна 1. Стол, кроме центрального квадрата, уже покрыт в два слоя. Осталось покрыть центральный квадрат десятой салфеткой.

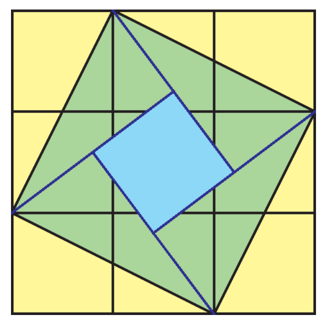


Рис. 3

В.Произволов решал эту задачу несколько иначе: он расположил пять салфеток, как на рисунке 4 (голубым цветом показаны лицевые стороны салфеток, зеленым – изнанки), а другие пять – как на рисунке 5, полученном из рисунка 4 симметрией относительно пунктирной линии (проведенной через середины сторон квадрата площади 5). Если совместить на одном столе эти два расположения салфеток, получится искомое покрытие.

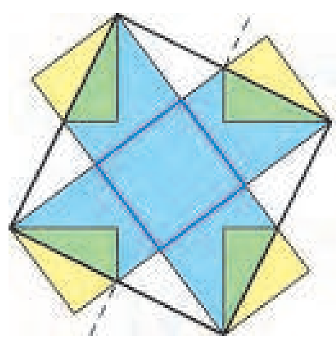


Рис. 4

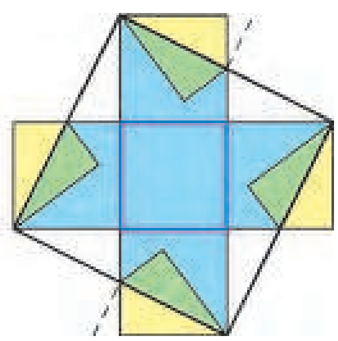


Рис. 5

Упражнение 2 (задача М1905, В.Произволов)**.** Покройте квадратный стол размером 5×5 в два слоя 50 квадратными салфетками 1×1 так, чтобы никакой отрезок края любой салфетки не лежал на краю стола.

Задача М1944 (В.Произволов). *Квадратный стол площади 5 можно покрыть в четыре слоя пятью квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 4. Как это сделать?*

Решение. Укладываем 4 салфетки в виде квадрата размером 4×4 (рис.6), вписываем в него квадрат площади 10 и загибаем четыре треугольника. Площадь центрального квадратика равна $2\cdot10-16$, т.е. 4. На его место кладем

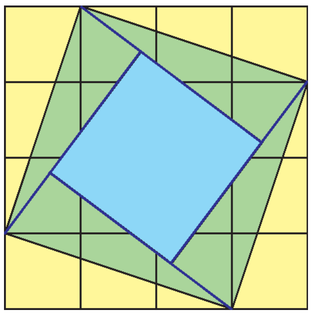


Рис. 6

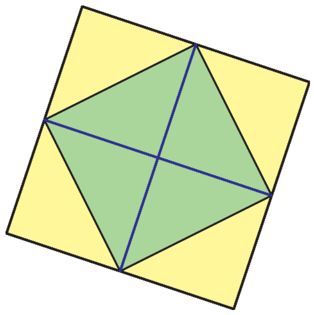


Рис. 7

пятую салфетку и получаем квадрат площади 10, покрытый в два слоя. Если соединить середины сторон этого квадрата (на рисунке 7 он окрашен желтым), образуется квадрат площади 5 (он окрашен зеленым). Загнем у него желтые уголки и получим искомое покрытие в четыре слоя.

Упражнение 3. Решите задачу М1944 при помощи рисунка 4.

Указание. Перегните систему салфеток сначала относительно одной средней линии квадрата, а затем относительно другой (пунктирной линии рисунка 4). Площадь квадрата до перегибаний равнялась 5. После двух перегибаний она уменьшится вчетверо, так что получится квадратный стол площади $\frac{5}{4}$, покрытый в четыре слоя салфетками размера 1×1. Осталось увеличить вдвое стороны салфеток и стола!

Цель достигнута – все перечисленные задачи решены нашим способом. Но мы пойдем немного дальше.

Общий вопрос. *При каких натуральных n квадратный стол площади n можно покрыть в два слоя 2n квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 1?*

Ответ. При n, которые можно записать в виде a^2+b^2, где a и b – целые.

Доказательство. Любое допустимое покрытие стола можно представлять как оклеивание такими же салфетками с двух сторон тонкого картонного квадратного листа (размером, естественно, с крышку стола). Удобнее рассуждать именно с этой точки зрения.

Сначала проверим, что если квадратный лист площади n удалось оклеить с двух сторон $2n$ салфетками площади 1, то n является суммой квадратов целых чисел. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Нанесем краску на границы квадратиков-салфеток, наклеенных на картонный лист. Положим лист на плоскость и будем «перекатывать» его, поворачивая вокруг сторон квадрата. Когда лист ложится на плоскость, краска отпечатывается в тех местах, где к плоскости прилегают границы единичных квадратиков. При этом отпечатки границ перегибающихся салфеток тоже будут составлять целые единичные квадратики. Если «перекатывать» квадрат сколько угодно раз во все стороны, получится рисунок – примыкающие друг к другу единичные квадратики, покрывающие всю плоскость. Будем называть такое покрытие *паркетом*.

Шаг 2. Периодом паркета называется любой сдвиг (в каком-то направлении и на какое-то расстояние), который переводит паркет в себя. По построению, получившийся у нас паркет имеет два периода. Это сдвиги вдоль сторон исходного квадрата на расстояние, в 2 раза больше, чем длина стороны квадрата, т.е. сдвиги в двух взаимно перпендикулярных направлениях, каждый – на расстояние $2\sqrt{n}$.

Шаг 3. Но у любого паркета, состоящего из единичных квадратиков, есть период длины 1. В самом деле, если два квадратика примыкают по части стороны, как, например, на рисунке 8, то дальше прямые углы заполняются однозначно и получаются две горизонтальные полоски (рис.9). Рассматривая, как квадратики примыкают к этим полоскам сверху и снизу, получаем, что там тоже будут полоски, и т.д. Значит, весь паркет состоит из горизонтальных полосок и поэтому имеет период – горизонтальный сдвиг на 1.

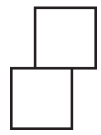


Рис. 8

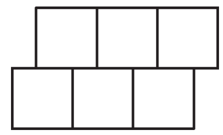


Рис. 9

Если нет пары квадратиков, которые примыкают по части стороны, получается обычный клетчатый паркет, у которого даже два периода единичной длины.

Шаг 4. Введем систему координат так, чтобы все полоски, полученные на предыдущем шаге, были горизонтальными, а начало координат совпадало с вершиной одного из квадратиков паркета. Тогда любая вершина любого квадратика паркета имеет целую ординату. Представим один из периодов, найденных на шаге 2, как сдвиг на s вправо и на t вверх. Тогда второй период – сдвиг на то же расстояние, но в перпендикулярном направлении, – будет сдвигом на t вправо и на s вниз (или на t влево и на s вверх). Так как при этих сдвигах начало координат должно переходить в вершину квадратика, смещение по вертикали должно быть на целое число, откуда оба числа s и t – целые.

По теореме Пифагора, $s^2+t^2=\left(2\sqrt{n}\right)^2=4n$. Из этого равенства следует, что s и t четные: $s=2a$, $t=2b$, а значит, число n представимо в виде a^2+b^2, где a и b – целые, что и требовалось доказать.

Осталось проверить, что если $n=a^2+b^2$, где a и b – целые, то квадратный лист площади n можно оклеить с двух сторон $2n$ квадратиками площади 1. Пример такой оклейки строится по приведенному доказательству. Рассмотрим обычный паркет, составленный из единичных квадратиков. Если $n=a^2+b^2$, то на этот паркет можно положить квадратный лист площади n так, чтобы его вершины попали в вершины паркета. Тогда одна сторона листа покрывается той частью паркета, которую он занимает, а противоположная сторона покрывается отраженной частью паркета.

История с коромыслом

С.ДВОРЯНИНОВ

О том, что такое коромысло и для чего оно нужно, современные дети могут узнать, пожалуй, только из сказок. Давайте вспомним Емелю: «*Бросил он щуку в воду и кричит: По щучьему веленью, по моему прошенью – ступайте, ведра, домой сами и поставьтесь на место. Да смотрите у меня, чтобы капли не пролилось. И только успел он крикнуть, как пошли ведра – да и с коромыслом – сами домой. По бережку да в горку, – и подгонять не надо. А Емеля сзади идет, посвистывает*».

Коромысло – это деревянная дуга с крючками на концах, на которые подвешивают, например, ведра с водой, когда несут воду из колодца в дом. А само коромысло кладется на плечи и верхнюю часть спины или на одно плечо.

Минувшим летом мы с моим другом увидели такое коромысло в деревне. До того стояло оно себе спокойно в углу. Мы его взяли, осмотрели со всех сторон, примерили даже, а потом повесили на стену на гвоздь. И надо было случиться, что повесили не за крюк, а за середину дуги. Так что закачалось наше коромысло на этом гвозде, как маятник у настенных ходиков. День был жаркий, выходить из прохладного сарая на солнцепек совсем не хотелось. От нечего делать стали мы за качающимся коромыслом наблюдать. Покачалось оно покачалось и, ясное дело, остановилось в равновесии. Из-за трения остановилось. Запасенная коромыслом энергия вся ушла на преодоление силы трения между коромыслом и гвоздем, т.е. на работу против этой силы трения. А в конечном счете – на нагревание гвоздя вследствие трения.

К.Маковский. «Девушка с коромыслом»

Мы вновь отклонили коромысло от положения равновесия, и оно снова закачалось.

– Интересно, а с каким периодом совершаются эти колебания коромысла? – задал вопрос мой друг.

– Сейчас это несложно определить. Мобильный телефон у тебя в кармане, а там есть секундомер. Ты его запусти и останови через минуту. Я же в это время буду наблюдать за коромыслом и считать, сколько качаний туда-сюда, т.е. колебаний, оно совершит. Разделим 60 секунд на это число и узнаем период колебаний.

– А если наблюдать за колебаниями две минуты, то период мы определим, пожалуй, еще точнее.

– Да, но только если за это время коромысло не остановится!

– Это практически. А как теоретически? Я помню, есть формула для периода колебаний маятника, но учебника или справочника сейчас нет под рукой.

– А мобильный интернет есть?

В общем, через пять минут формула

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

была у нас в руках, точнее – на дисплее мобильника.

– Да, именно по этой формуле у нас была лабораторная работа. Мы подвешивали на нитях разной длины тяжелые гайки и наблюдали за колебаниями. Помнишь, одна нить была в четыре раза длиннее другой, и пока первый маятник совершал одно колебание, второй, с короткой нитью, совершил два колебания.

– В таком случае говорят, что частота колебаний второго маятника в 2 раза больше частоты колебаний первого. Частота – это величина, обратная периоду. Интересно еще, что период колебаний не зависит от массы качающегося на нити груза – в формулу для периода входят лишь длина маятника l, ускорение свободного падения g и еще вездесущее число π.

– Хорошо. А как применить эту формулу к коромыслу?

– Давай рассмотрим невесомый стержень длиной $2l$, который согнули посередине под углом 2α и повесили местом сгиба на тонкий гвоздь, вбитый в стену. Чем тебе не коромысло? Конечно, невесомый стержень не будет качаться, ибо сила тяжести на него не действует, но мы к концам стержня прикрепим одинаковые грузы массой m каждый. Модель готова.

– Но у нас две массы, а у математического маятника она одна.

– Не проблема, про центр тяжести помнишь? Для нашей системы грузов центр тяжести лежит ровно посередине между грузами.

– Осталось найти длину нашего маятника. Это просто: рассмотрим равнобедренный треугольник, в котором длины боковых сторон равны l, а угол при вершине равен 2α. Тогда высота треугольника, проведенная к основанию (она же и медиана, и биссектриса), равна $l\cos a$. Это и есть длина рассматриваемого нами маятника. В итоге получаем такую формулу для периода колебаний коромысла:

$$T_{\text{кор}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}\,.$$

– Теперь надо бы как-то проверить полученный результат.

– Пожалуйста. Рассмотрим какой-нибудь частный случай. Пусть, например, $\alpha = 0$. Это означает, что наше коромысло превращается в обычный маятник. Так как $\cos 0 = 1$, то формула для $T_{\text{кор}}$ превращается в формулу для периода колебаний обычного математического маятника. Все в порядке!

– А если рассмотреть другой частный или предельный случай? Пусть теперь угол α увеличивается и неограниченно приближается к $\pi/2$ радианам. При этом значение $\cos\alpha$ уменьшается и неограниченно приближается к нулю. Отсюда следует, что период колебаний нашего коромысла неограниченно уменьшается, а частота колебаний, соответственно, неограниченно растет. На практике это означает, что коромысло, отклоненное от положения равновесия, должно возвращаться в положение равновесия очень быстро. Но мы этого не наблюдаем. Наоборот: наше коромысло, у которого угол α близок к 90°, возвращается в положение равновесия медленно, можно даже сказать как-то нехотя. Наша формула явно противоречит опыту.

В чем же дело? Где допущена ошибка?

Оказывается, все дело в том, что движение двух одинаковых масс при колебаниях нашего коромысла мы заменили движением их центра масс. Поступать так в динамических задачах нельзя. Центр тяжести хорош и помогает при решении задач статики, но может подвести в задах динамики. Вот простой пример.

Пусть два тела одинаковой массы m движутся по прямой в одном направлении со скоростями v и $2v$. Их суммарная кинетическая энергия равна

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(2v)^2 = \frac{5}{2}mv^2 .$$

Очевидно, что центр тяжести двух масс движется со скоростью $\frac{3}{2}v$. Теперь вычислим по обычной формуле кинетическую энергию движения центра масс и получим

$$\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{3}{2}v\right)^2 = \frac{9}{4}mv^2 .$$

Эта величина не равна истинной кинетической энергии нашей системы.

Другой пример. При вращении невесомого стержня с двумя одинаковыми массами, закрепленными на его концах, вокруг середины стержня центр масс системы вообще неподвижен, и его кинетическая энергия оказывается равной нулю.

При рассмотрении коромысла мы заменили колебания двух масс «колебанием» их центра тяжести. А такая замена недопустима. Как же тогда рассчитать период колебаний коромысла? Об этом подробно рассказано в статье А.Черноуцана «Определение периода колебаний: динамический и энергетический подходы», опубликованной в «Кванте» № 4 за 2011 год. Здесь же мы лишь приведем верную формулу для периода малых колебаний коромысла:

$$T_{\text{кор}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}} ,$$

которая явно отличается от полученной нами ранее.

Как Студент капельный излучатель изобрел

А.СТАСЕНКО

Как-то на лекции узнал Студент, что коэффициент полезного действия любой тепловой машины ограничен сверху значением

$$\eta = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}},$$

где $T_{\max}$ и $T_{\min}$, вполне понятно, являются температурами нагревателя и холодильника. Это фундаментальное утверждение еще во времена Пушкина (1824 г.) сформулировал французский физик Сади Карно. Отсюда следует, что для увеличения КПД нужно как можно выше поднимать температуру нагревателя и как можно ниже опускать температуру холодильника, но все-таки не удастся полностью превратить тепло в механическую работу.

И тут в голове Студента сверкнула первая мысль: а космос!? Он читал у фантастов, что в космосе существует страшный космический холод, т.е. $T_{\min} \to 0$. А значит, $\eta \to 1$!? Но тут пришла вторая мысль: увы, в вакууме нет ни теплопроводности, ни конвекции, а единственный способ теплоотвода – излучение. При этом плотность потока излучения q тем больше, чем выше температура T излучающего тела:

$$q = \sigma T^4 .$$

Эта сильно нелинейная температурная зависимость называется законом Стефана–Больцмана, а коэффициент σ – постоянной Стефана–Больцмана. Выходит, что для эффективного отвода тепла от тепловой машины температуру холодного конца ее цикла нужно повышать!?

Заметим, что постоянная Стефана–Больцмана σ является размерной комбинацией фундаментальных физических констант, непосредственно относящихся к делу (иными словами, к описанию теплового излучения): постоянной Больцмана $k = 1{,}4\cdot10^{-23}$ Дж/К (конечно, в комплексе $(kT)^4$), постоянной Планка $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с (поскольку излучение квантовано) и скорости света в вакууме $c_0 = 3\cdot10^8$ м/с (ведь это излучение!). Так что

$$\sigma = \frac{1{,}62\cdot k^4}{\pi^2\left(h/(2\pi)\right)^3 c_0^2} = 5{,}67\cdot10^{-8}\ \text{Дж}/\left(\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{К}^4\right)$$

(как легко запомнить – последовательность 5, 6, 7, 8).

Из формулы Карно видно, что лучше всего взять бы $T_{\max} \to \infty$ или $T_{\min} \to 0$. Но ведь $T_{\max}$ ограничена сверху, скажем температурой плавления источника энергии или допустимым значением давления насыщенных паров рабочего тела, а $T_{\min}$ ограничена снизу температурой окружающей среды, куда нужно выбросить отработанное тепло. Например, в случае паровоза (который исправно служит человечеству почти два столетия) эта борьба инженеров за повышение КПД позволила достичь его значения 10–12%. Но в космосе нет никакой «температуры окружающей среды» и единственным способом отвода «лишнего» тепла является излучение. И тут возникает противоречие – чтобы интенсивно излучать, нужно увеличивать температуру холодного конца термодинамического цикла (согласно закону Стефана-Больцмана), а чтобы повышать КПД, нужно эту температуру уменьшать. А кому нужна тепловая машина с низким КПД!?

И что же получается: если нам для серьезных космических полетов нужна мощность, скажем, $W = 10^{10}$ Вт, то в случае приемлемого значения КПД $\eta = 0{,}1 = 10\%$ (хотя бы как у паровоза) бóльшую часть энергии придется сбросить в виде излучения? Для этого потребовалась бы площадь излучателя

$$S = \frac{(1-\eta)W}{\sigma T_{\min}^4}.$$

Если, например, $T_{\max}$ = 2000 К, то при η = 0,1 $T_{\min}$ = = 1800 К. Тогда

$$S = \frac{0{,}9\cdot 10^{10}}{5{,}67\cdot 10^{-8}(1800)^4}\ \text{м}^2 = 1{,}5\cdot 10^4\ \text{м}^2$$

– полтора гектара! Но где взять такую площадь излучения?

И тут Студента осенила третья мысль! Если уж температура нагревателя должна быть такой высокой, то можно выбрать некое вещество с меньшей температурой плавления: $T_{\text{пл}} < T_{\max}$, распылить его на капли, выбросить их в космос и, дав им охладиться почти до температуры отвердевания $T_{\text{отв}}$, затем собрать и снова запустить их в термодинамический цикл. В свободном полете каждая капля радиусом r будет излучать со своей сферической поверхности мощность $\sigma T^4\cdot 4\pi r^2$, а ее внутренняя энергия cmT будет уменьшаться по закону

$$\frac{d(cmT)}{dt} = -\sigma T^4\cdot 4\pi r^2.$$

Понятно, что здесь c – удельная теплоемкость материала капли, а $m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$ – ее масса (ρ – плотность материала жидкой капли). Считая все величины, кроме температуры, не зависящими от времени, запишем последнее уравнение в виде

$$\frac{d(T/T_{\text{пл}})}{d(t/\tau)} = -\left(\frac{T}{T_{\text{пл}}}\right)^4,$$

где $T_{\text{пл}}$ – введенная выше начальная температура капли, равная температуре плавления, а $\tau = r\frac{\rho c}{3\sigma T_{\text{пл}}^3}$ – характерное время процесса остывания (проверьте размерность). Это простенькое дифференциальное уравнение студенты (и абитуриенты) Физтеха решают в уме:

$$\frac{T}{T_{\text{пл}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+3t/\tau)}}.$$

Отсюда легко оценить время $t_{1/2}$, за которое капля охладится, например, вдвое $\left(\frac{T}{T_{\text{пл}}} = \frac{1}{2}\right)$:

$$t_{1/2} = \frac{7}{3}\tau.$$

Сделаем численные оценки для «типичного» (гипотетического, но правдоподобного) металла с такими параметрами: с плотностью $\rho = 10^4$ кг/м^3 и удельной теплоемкостью $c = 500$ Дж/(кг·К). Если его распылить на капли радиусом $r = 10^{-3}$ м = 1 мм, получим

$$t_{1/2} = \frac{7}{3}\cdot 10^{-3}\frac{10^4\cdot 5\cdot 10^2}{3\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 1{,}8^3\, 10^9}\ \text{с} \approx 10\ \text{с}.$$

Значит, при скорости выброса капель 10 м/с их приемник нужно расположить на расстоянии порядка сотни метров от источника – вполне разумный размер для серьезного межпланетного корабля.

А каковы при этом будут потоки массы Q_m [кг/с] и число частиц Q_n [1/с]? Ясно, что если теплосодержание одной частицы (выбрасываемое в виде излучения) изменяется на $cm(T_{\text{пл}} - T_{\text{пл}}/2)$, то

$$Q_n = \frac{(1-\eta)W}{cm(T_{\text{пл}}/2)} \sim 5\cdot 10^8\ 1/\text{с},$$

$$\text{а}\quad Q_m = mQ_n = 2\cdot 10^4\ \text{кг/с} = 20\ \text{т/с!}$$

И тут четвертая мысль пришла к Студенту: ведь любое вещество должно испаряться! При данной температуре T существует давление насыщенных паров $p_{\text{п}}(T)$, которые будут безвозвратно уходить в космическое пространство. Их плотность легко найти из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$\rho_{\text{п}} = \frac{p_{\text{п}}(T)\mathrm{M}}{RT}$$

(здесь R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса паров). Средняя тепловая скорость паров равна

$$v_{\text{т}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mathrm{M}}}.$$

Значит, масса каждой капли будет убывать со скоростью

$$\frac{dm}{dt} \sim -\rho_{\text{п}} v_{\text{т}}\cdot 4\pi r^2$$

(точный коэффициент в правой части равен $1/4$, но это не меняет сути дела). Конечно, хотелось бы подыскать вещество с наименьшим давлением насыщенных паров – чтобы масса капли в каждом цикле уменьшалась как можно меньше. Но если такой радиатор должен работать месяцы, годы?..

Тут свежие мысли перестали посещать Студента, и он начал рыться в справочниках физических величин, чтобы найти необходимое оптимальное вещество.

Расстояния на прямой и не только

А.БЛИНКОВ

На одинаковом расстоянии

Начнем с очень простого практического вопроса: где надо вырыть колодец, чтобы расстояние до него от двух домов было одинаковым? Естественный ответ: в середине отрезка, соединяющего эти дома. Формально этот ответ не совсем точен, так как *геометрическим местом точек на плоскости, равноудаленных от двух данных, является серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки*. Но с точки зрения здравого смысла из всех таких точек разумно выбрать ту, для которой требуемые расстояния не только равны, но являются и наименьшими из возможных. Действительно, если K – произвольная точка серединного перпендикуляра к отрезку AB, а C – середина этого отрезка, то $KA > CA$, так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета (рис.1).

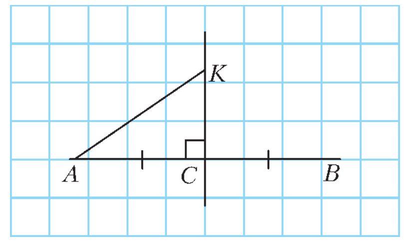


Рис. 1

Эта несложная задача дает «ключ» к решению некоторых урав-

Статья адресована прежде всего школьникам 7–8 классов.

нений, содержащих модуль числа. Напомним, что *модулем числа x называется расстояние на координатной прямой от точки с координатой x до нуля*. Напомним также, что *если на координатной прямой отмечены точки $A(a)$ и $B(b)$, то расстояние между ними вычисляется по формуле*

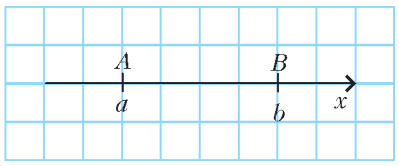


Рис. 2

$$|AB| = |a - b|$$

(рис.2). Доказать эту формулу можно, рассмотрев различные случаи расположения этих точек по отношению к друг другу и точке $O(0)$.

Пусть, например, требуется решить уравнение

$$|x - 2| = |x - 4|.$$

Это означает, что надо найти на координатной прямой точку, которая равноудалена от точек $A(2)$ и $B(4)$. Понятно, что это середина отрезка AB, т.е. $C(3)$. Следовательно, решением уравнения является $x = 3$ (рис.3).

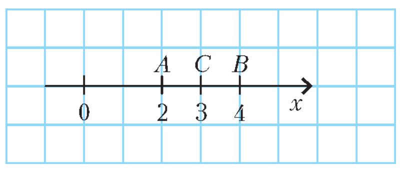


Рис. 3

Более того, с той же легкостью можно решать и некоторые неравенства, например

$$|x+1| \geq |7-x|.$$

Действительно, из определения модуля следует, что *модули противоположных чисел равны*, а для того чтобы использовать формулу расстояния между точками, под знаком модуля должна стоять разность координат. Поэтому данное неравенство удобно переписать в таком виде:

$$|x-(-1)| \geq |x-7|.$$

Тогда его решением будут все точки координатной прямой, для которых расстояние до $A(-1)$ не меньше, чем расстояние до $B(7)$. Понятно, что этим свойством обладает точка $C(3)$ – середина отрезка AB, а также все точки, лежащие правее точки C (рис.4). Таким образом, решением неравенства являются все числа, большие или равные трем, т.е. $x \geq 3$, которые обычно записывают в виде промежутка $[3; +\infty)$.

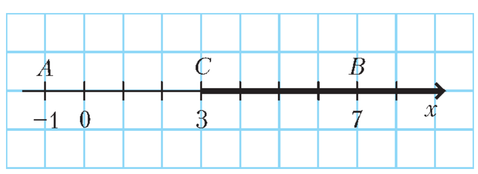


Рис. 4

Упражнение 1. Решите уравнение или неравенство:

а) $|x| = |x-3|$; б) $|5+x| \leq |5-x|$.

Наименьшая сумма расстояний

Переформулируем исходную задачу. Пусть колодец требуется вырыть так, чтобы сумма расстояний от него до двух домов была наименьшей. Интуиция подсказывает, что колодец надо строить на отрезке, соединяющем эти дома. Но в какой точке? Оказывается, в любой точке этого отрезка!

Действительно, *какую бы точку M на отрезке AB мы ни выбрали, сумма расстояний от нее до концов отрезка одна и та же и она равна длине отрезка AB.*

Если же выбрать произвольную точку N на прямой AB вне отрезка, то сумма расстояний от нее до точек A и B, очевидно, будет больше, чем длина AB (рис.5). Аналогично, если точка K не лежит на прямой AB, то $KA + KB > AB$ по неравенству треугольника.

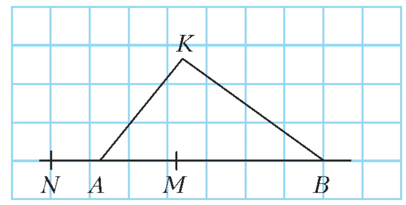


Рис. 5

Полученный факт позволяет решать простейшие задачи о сумме двух модулей. Пусть, например, надо найти наименьшее значение выражения

$$|x + 4| + |x - 2|.$$

Рассмотрим на координатной прямой точки $A(-4)$ и $B(2)$ и найдем такие точки, сумма расстояний от которых до точек A и B наименьшая. Эти точки, как было доказано, лежат на отрезке AB, а искомая сумма равна длине отрезка AB, т.е. равна 6 (рис. 6).

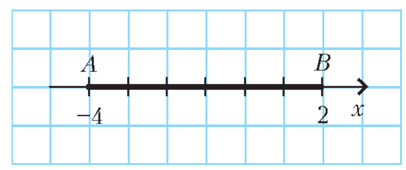


Рис. 6

Если же требуется решить уравнение, например,

$$|x + 4| + |x - 2| = 10,$$

то это означает, что на координатной прямой надо искать точки, сумма расстояний от которых до точек $A(-4)$ и $B(2)$ равна 10. Понятно, что на отрезке AB они лежать не могут, иначе эта сумма была бы равна 6, значит, они лежат вне этого отрезка. Искать их можно, например, так: заметим, что для любой точки N, лежащей на координатной прямой вне отрезка, сумма $NA + NB = 2NC$, где $C(-1)$ – середина отрезка AB (подумайте, почему). Таким образом, искомые точки удалены от точки $C(-1)$ на расстояние 5. Получим, что решением уравнения являются два числа: 4 и –6 (рис.7).

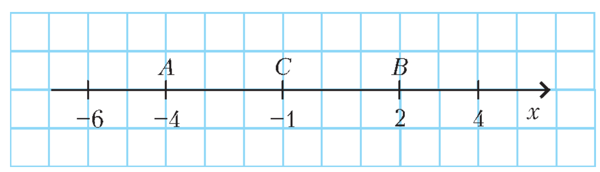


Рис. 7

Аналогично можно решать и неравенства. В частности, из предыдущих рассуждений следует, что решением неравенства

$$|x + 4| + |x - 2| > 10$$

является объединение двух промежутков: $(-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$.

Упражнения

2. Найдите наименьшее значение выражения $|a - 100| + |100 + a|$.

3. Решите уравнения или неравенства:

а) $|x-1| + |x-2| = 3$; б) $|x-1| + |x-2| < 3$;

в) $|x| + |1+x| = 1$; г) $|x| + |1+x| \geq 1$; д) $|6+x| + |6-x| = 8$.

А если домов больше?

Усложним задачу. Пусть теперь вдоль прямой дороги стоят семь домов, причем расстояния между соседними домами не обязательно одинаковы. В какой точке дороги надо вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

(Продолжение см. на с. 34)

мой прибор... представляет собой собрание некоторого количества хороших проводников разного рода, расположенных в известном порядке. Его образуют 30, 40, 60 и более кусков меди (или лучше серебра)...

Алессандро Вольта

...гальванометром следует пользоваться при всех опытах с электрическими токами, чтобы видеть в каждый момент, существует ли ток и какова его энергия.

Андре Ампер

...поскольку полученные на этом пути результаты отчетливо дают закон проводимости, я думаю, что не будет чрезмерным подробное описание моего прибора.

Георг Ом

...такие сложные устройства, как транзисторы или радиолампы,... часто действуют так, что связь между токами и напряжениями отнюдь не линейна.

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знаком вам закон Ома (электрические приборы)?

Надеемся, что уже предыдущий выпуск «Калейдоскопа», посвященный закону Ома, продемонстрировал вам его обманчивую простоту. Мало того, оказывается, что зависимость между силой тока и напряжением перестает быть линейной даже в хорошо знакомой нам лампочке накаливания. Что уж говорить об электровакуумных лампах и полупроводниковых приборах – диодах, транзисторах и т.п. Но в том-то и дело, что если бы закон Ома соблюдался всегда, то мы оказались бы без большинства электро- и радиотехнических устройств. Более того, в них специально вводят неоднородные, нелинейные элементы, чтобы выйти за рамки действия закона Ома и обеспечить более широкий спектр возможностей, которыми одарил нас компьютерный век.

История прогресса электрических приборов – необъятна и увлекательна. Даже если мы ограничим себя рассмотрением только известных по школьной лаборатории реостатов и лампочек, выключателей и батареек, вольтметров и амперметров и не будем выходить за границы применимости закона Ома в линейной форме, то обнаружим немало ситуаций, где есть чему подивиться. А это – залог вашего интереса и успехов в освоении экспериментальной физики.

Вопросы и задачи

1. Какими приборами необходимо располагать, чтобы экспериментально осуществить проверку закона Ома для однородного участка цепи, т.е. показать, что сила тока прямо пропорциональна разности потенциалов?

2. Можно ли точно измерить ЭДС источника напряжения? Что для этого нужно?

3. При каких условиях напряжение на зажимах батареи выше ее ЭДС?

4. Каково направление электрического тока внутри гальванического элемента или аккумулятора, питающего электрическую цепь?

5. Чему равна разность потенциалов между клеммами источника при его коротком замыкании?

6. Как будет изменяться напряжение на зажимах источника электрической энергии при увеличении тока в цепи?

7. Определите разность потенциалов между любыми точками цепи, изображенной на рисунке 1. ЭДС и внутренние сопротивления каждого элемента одинаковы; сопротивлением проводов пренебречь.

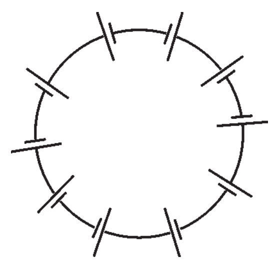


Рис. 1

8. Когда два разных аккумулятора соединили параллельно и замкнули на лампочку, она горела слабо. Но когда в ту же цепь последовательно с каждым аккумулятором включили некоторое сопротивление, лампочка стала гореть ярче. Почему?

9. Идеальный источник тока должен давать один и тот же ток при любой нагрузке, а идеальный источник напряжения должен давать одну и ту же разность потенциалов на любой нагрузке. Какими внутренними сопротивлениями должны обладать идеальные источники тока и напряжения?

10. Как измерить сопротивление данного амперметра, если имеется другой амперметр, сопротивление которого известно?

11. Что произойдет с показаниями амперметров, если в схеме на рисунке 2 разомкнуть ключ K?

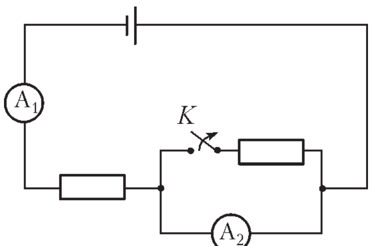


Рис. 2

12. При сборке цепи, изображенной на рисунке 3, ученик по ошибке включил

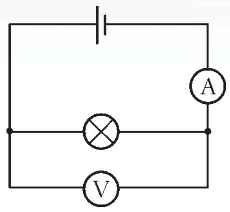


Рис. 3

вольтметр вместо амперметра, а амперметр вместо вольтметра. Что произойдет при этом с измерительными приборами?

13. Шесть одинаковых вольтметров включены в ребра правильного тетраэдра, подключенного к источнику постоянного напряжения двумя вершинами. Один из вольтметров показывает напряжение 10 В. Что показывают остальные вольтметры?

14. В схеме на рисунке 4 все вольтметры одинаковы. ЭДС батареи равна 5 В, ее внутреннее сопротивление

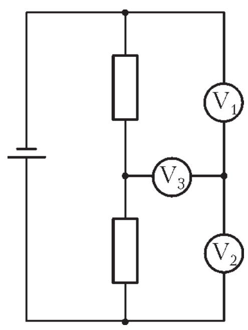


Рис. 4

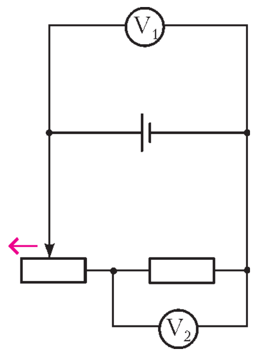


Рис. 5

мало. Вольтметр V_1 показывает 2 В. Каковы показания остальных вольтметров?

15. Как будут изменяться показания вольтметров в схеме на рисунке 5 при перемещении ползунка реостата влево?

Микроопыт

Предположим, вам необходимо освещать коридор одной лампочкой, подвешенной в его середине, но так, чтобы ее можно было включать и выключать в любом конце коридора. Как это сделать?

Любопытно, что…

…в экспериментах 1792 года Луиджи Гальвани вызывал вздрагивание лапок лягушки при помощи скобки, сделанной из двух различных металлов. Это был первый гальванический элемент, в котором лапка была одновременно электролитом и индикатором тока. Алессандро Вольта, повторивший опыты Гальвани, пришел к выводу, что лягушка – измерительный прибор, «в десятки раз более чувствительный, чем даже… электрометр с золотыми листочками».

…гальванометром Андре Ампер назвал прибор, действие которого основано на отклонении магнитной стрелки протекающим током. Георг Ом, взявший за характеристику тока не тепловое, а магнитное его действие, использовал фактически тот же принцип, однако в основу своего измерительного прибора положил конструкцию крутильных весов Шарля Кулона. Первый же стрелочный гальванометр со шкалой появился в 1838 году.

…высокая чувствительность требовалась приборам Ома потому, что ему пришлось отказаться от быстро «садящихся» вольтовых батарей и взять в качестве источника тока термоэлектрический элемент, более стабильный, но дающий значительно меньший ток. Разность потенциалов такого элемента составляла всего 0,0045 В.

…проявивший себя как блестящий экспериментатор, Ом заложил и основы теории электрических измерений. Эти его заслуги были отмечены, в том числе и тем, что в 1849 году указом короля Баварии он был назначен хранителем Государственного собрания физико-математических приборов. А на Международном конгрессе электриков в 1881 году именем Ома была названа единица электрического сопротивления.

…прикладывая к полупроводнику постоянное напряжение, можно добиться получения переменного тока. Такое «отличие» от закона Ома положено в основу большинства современных генераторов сверхвысоких частот. Эти приборы используются, например, для определения скорости движения транспортных средств и для связи через искусственные спутники Земли.

…на величину электрического сопротивления металлов влияют их сжатия или растяжения. Эта зависимость реализована на практике в так называемых тензометрах сопротивления, изменения которого позволяют измерить механические напряжения.

…закон Ома иногда обретал совершенно новый смысл. Так, разность потенциалов, приложенная к проводнику, находящемуся в магнитном поле, вызывает электрический ток в цепи, связанной с поперечными электродами. Это явление, названное эффектом Холла, при использовании в вакуумном промежутке может сделать его идеальным изолятором – даже если в вакууме найдется какое-то количество электронов, они будут уводиться магнитным полем вбок, на стенки установки.

…искусственно полученный недавно графен, представляющий собой тончайший слой углерода толщиной всего в один атом, проводит электрический ток при комнатной температуре лучше любых проводников. На его основе собираются изготавливать сенсорные экраны, светодиоды и солнечные батареи. Графен может стать идеальным материалом для транзисторов, функционирующих, в отличие от традиционных кремниевых, на частотах, в сотни раз больших – до 1000 гигагерц.

Что читать в «Кванте» о законе Ома

(публикации последних лет)

1. «Калейдоскоп «Кванта» – 2005, №1, с.32; 2009, №1, с.32; 2012, №1, с. 32;
2. «Электрические машины и выбор режима» – 2006, №5, с.29;
3. «Электрические узоры» – 2009, №2, с.2;
4. «Неравенство Коши в задачах по физике» – 2010, №3, с.50;
5. «Электричество из фруктов» – 2010, №6, с.38;
6. «Разрезания металлического прямоугольника» – 2011, №3, с.10;
7. «И снова задачи на сопротивления» – 2011, №3, с.43;
8. «Две дюжины задач на закон Ома» – 2012, №2, с.51.

Публикацию подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 30)

Обозначим дома по порядку точками $A_1, A_2, \ldots, A_6, A_7$ на прямой (рис.8), а искомую точку – через X. Для того чтобы сумма $XA_1 + XA_7$ была наименьшей, точка X должна находится на отрезке A_1A_7. Сумма $XA_2 + XA_6$ наименьшая, если

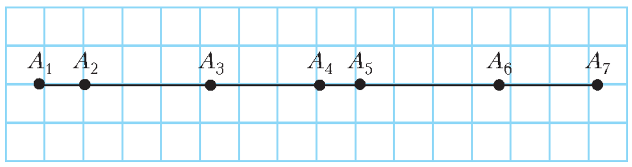


Рис. 8

точка X лежит на отрезке A_2A_6, а сумма $XA_3 + XA_5$ наименьшая, если X лежит на отрезке A_3A_5. Следовательно, сумма $XA_1 + XA_2 + XA_3 + XA_5 + XA_6 + XA_7$ наименьшая, если точка X принадлежит всем трем отрезкам, т.е. лежит на отрезке A_3A_5. Осталось сделать наименьшим расстояние от X до A_4. Понятно, что это произойдет в том случае, если эти точки совпадают. Таким образом, колодец надо строить около четвертого дома, причем полученный результат никак не зависит от расстояний между соседними домами!

Упражнения

4. Ответьте на вопрос предыдущей задачи, если вдоль дороги расположены 10 домов.

5. Найдите наименьшее возможное значение суммы:

а) $|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-11|$;

б) $|a| + |a+1| + |a+2| + \ldots + |a+100|$.

Где проводить турнир?

Следующая задача взята из замечательной книжки Р.Хонсбергера «Математические изюминки» (Библиотечка «Квант», выпуск 83):

«В Нью-Йорке шахматных мастеров больше, чем на всей остальной территории США. Планируется провести шахматный турнир с участием всех мастеров. Решено, что турнир будет проведен в таком месте, чтобы сумма расстояний всех переездов была наименьшей. Нью-Йоркские мастера считают, что этому критерию удовлетворяет их город, а мастера с Западного побережья настаивают на том, что турнир надо проводить в городе, который является «центром тяжести» всей совокупности мест, в которых живут шахматисты. Кто из них прав?»

Оказывается, правы мастера из Нью-Йорка! Докажем это. Рассмотрим всех мастеров, живущих не в Нью-Йорке, и каждому из них дадим в пару какого-то из шахматистов Нью-Йорка. Для каждой такой пары сумма переездов будет наименьшей, если турнир проводить в городе, лежащем в любой точке отрезка MN, где M – место жительства выбранного шахматиста, а N – Нью-Йорк. Значит, искомая сумма расстояний не меньше, чем сумма длин всех таких отрезков. Эти отрезки имеют единственное пересечение – точку N, поэтому для всех уже рассмотренных шахматистов искомая сумма наименьшая, если турнир проводить в N. Остались не рассмотренными только те мастера из Нью-Йорка, которым не хватило пары, но для них проведение турнира в Нью-Йорке также оптимально.

Упражнения

6. Расстояние между деревнями A и B равно 3 км. В деревне A живут 300 школьников, а в деревне B – 200 школьников. В каком месте надо построить школу, чтобы сумма всех расстояний, пройденных школьниками по дороге в школу, была наименьшей?

7. Найдите наименьшее значение выражений:

а) $3|x-2| + 2|x-5|$; б) $|8x+40| + |5x+40|$.

А если время – наименьшее?

В заключение – еще одна задача (Московская математическая олимпиада, 1986 год, 7 класс):

«Три гнома живут в разных домах на плоскости и ходят со скоростями 1 км/ч, 2 км/ч и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч им надо выбрать, чтобы сумма времен, необходимых каждому из гномов на путь от своего дома до этого места (по прямой), была наименьшей?»

Авторское решение опирается на составление систем неравенств с несколькими переменными. Мы же поступим иначе. Заметим, что на любой путь s по прямой один гном, идущий со скоростью v, затратит столько же времени, сколько в сумме затратят n гномов, идущих со скоростями в n раз больше (так как $t = \frac{s}{v} = n \cdot \frac{s}{nv}$). Поэтому можно переформулировать задачу следующим образом: пусть скорости всех гномов одинаковы и равны 6 км/ч, но в первом доме живут 6 гномов, во втором – 3, а в третьем – 2. При постоянной скорости пройденное расстояние пропорционально затраченному времени, поэтому ответ в задаче не изменится, если искать точку, для которой *сумма расстояний*, пройденных всеми гномами, будет наименьшей. Тогда так как $6 > 3 + 2$, то задача становится аналогичной задаче о шахматистах, и мы получим, что встречаться надо в доме первого гнома!

Задачи для самостоятельного решения

1 (А.Анджанс). На плане изображено шоссе, от которого отходят несколько дорог к селам (рис.9). Где на шоссе нужно расположить автобусную остановку, чтобы суммарное расстояние от нее до всех сел (по дорогам и шоссе) было наименьшим?

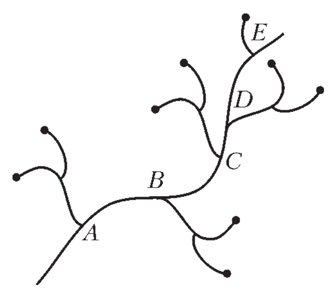


Рис. 9

2 (А.Блинков, И. Раскина. XV Турнир математических боев имени А.П.Савина). Три сталкера дошли до Каменной аномалии. Оттуда к кладу ведет прямая тропа длиной 100 метров. Сталкеры знают, что первый пошедший по тропе окаменеет в произвольном месте и такая же участь ждет второго. Они оба оживут в тот момент, когда по тропе будет идти третий и суммарное расстояние от него до двух окаменевших спутников будет в точности равно 100 метров. Смогут ли все сталкеры добраться до клада без риска окаменеть навсегда?

3 (Р.Хонсбергер). У лифта на нулевом этаже семнадцатиэтажного дома собрались 17 школьников, которым нужно подняться вверх, причем на разные этажи. Лифтер же согласен сделать только один рейс на любой этаж, а дальше школьники должны идти пешком. Лифт способен вместить всех школьников. Известно, что все школьники с одинаковым неудовольствием спускаются на один этаж и с двойным неудовольствием поднимаются пешком на один этаж. Какой этаж нужно выбрать, чтобы суммарное неудовольствие было наименьшим?

Когда орбита – эллипс

В.ДРОЗДОВ

Поскольку при эллиптическом движении тела – например, планеты или ее спутника – его ускорение переменно и по модулю и по направлению, математическое описание этого движения весьма сложно. Однако большую помощь здесь могут оказать законы сохранения энергии и момента импульса, а также законы Кеплера.

Геометрия эллипса

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек – фокусов F_1 и F_2 – есть величина постоянная: $r_1 + r_2 = 2a$ (рис.1).

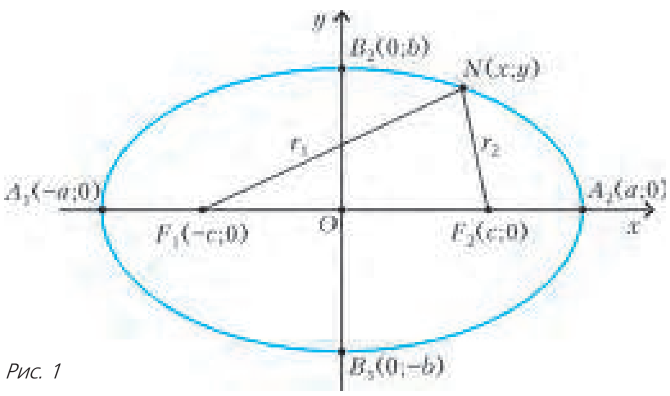


Рис. 1

Уравнение эллипса в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } b^2 = a^2 - c^2 .$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса. При $b = a$ оно преобразуется к уравнению окружности $x^2 + y^2 = a^2$ радиусом a с центром в начале координат. Осями эллипса называются его оси симметрии. Центр эллипса – это его центр симметрии O, т.е. точка пересечения осей симметрии. Вершинами эллипса называются точки A_1, A_2, B_1, B_2, в которых эллипс пересекает свои оси. Длина большой оси эллипса $A_1A_2 = 2a$, длина большой полуоси $A_1O = A_2O = a$. Длина малой оси эллипса $B_1B_2 = 2b$, длина малой полуоси $B_1O = B_2O = b$. Площадь эллипса $S = \pi ab$. Длины отрезков $F_1N = r_1$ и $F_2N = r_2$ называются фокальными радиусами точки N. Эксцентриситет эллипса – это отношение расстояния между его фокусами к длине большой оси:

$$e = \frac{F_1F_2}{A_1A_2} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} .$$

Поскольку $c^2 = a^2 - b^2$, то

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} .$$

Очевидно, что эксцентриситет окружности равен нулю.

Законы сохранения энергии и момента импульса

Рассмотрим спутник массой m, движущийся по эллиптической орбите (рис.2) вокруг своей планеты массой M ($M \gg m$). Полная механическая энергия спутника равна

$$W = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} ,$$

где v – скорость спутника, r – расстояние между спутником и планетой, G – гравитационная постоянная. В силу закона сохранения энергии величина W постоянна во времени, т.е. сохраняется неизменной:

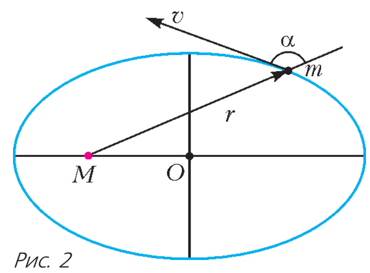


Рис. 2

$$W = \text{const} .$$

Момент импульса спутника равен векторному произведению его радиуса-вектора $\vec{r}$ на импульс $m\vec{v}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} .$$

При этом вектор $\vec{L}$ перпендикулярен и вектору $\vec{r}$, и вектору $m\vec{v}$, а модуль момента импульса равен

$$L = mvr\sin\alpha .$$

По закону сохранения момента импульса величина $\vec{L}$ постоянна во времени, т.е. сохраняется:

$$\vec{L} = \text{const} .$$

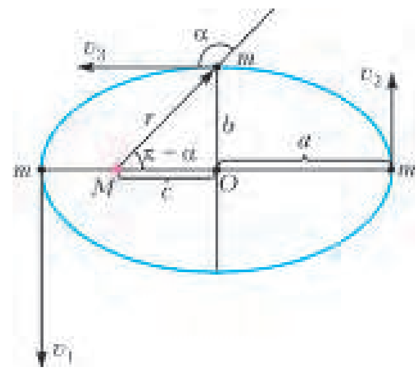


Рис. 3

Определим величины W и L для эллиптического движения – это пригодится при последующем решении задач. По закону сохранения энергии имеем (рис.3)

$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{Mm}{a-c} = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{Mm}{a+c} ,$$

откуда получаем

$$v_1^2 - v_2^2 = \frac{4GMc}{a^2 - c^2} = \frac{4GMc}{b^2} .$$

Из закона сохранения момента импульса следует, что

$$v_1(a-c) = v_2(a+c) = v_3 r\sin\alpha .$$

Но $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{b}{r}$. Тогда

$$v_1 = \frac{bv_3}{a-c} \text{ и } v_2 = \frac{bv_3}{a+c} .$$

Следовательно,

$$v_1^2 - v_2^2 = \frac{4acb^2v_3^2}{\left(a^2 - c^2\right)^2} = \frac{4acv_3^2}{b^2} .$$

Сравнивая два выражения для $v_1^2 - v_2^2$, получаем

$$v_3^2 = \frac{GM}{a}$$

и находим искомую энергию:

$$W = \frac{mv_3^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2a}.$$

Для определения модуля момента импульса спутника запишем очевидную систему уравнений:

$$L = mv_3 b,$$

$$v_3^2 = \frac{GM}{a},$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Исключая из нее сначала v_3, а затем b, легко придем к такому результату:

$$L = m\sqrt{GMa\left(1 - e^2\right)}.$$

Законы Кеплера

Иоганн Кеплер (1571–1639), немецкий астроном и математик с мировым именем, обобщил наблюдательные данные и установил такие законы движения планет:

1) каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце;

2) радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади;

3) квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Решенные задачи

Переходим к рассмотрению конкретных задач. Такого рода задачи могут предлагаться на олимпиадах и дополнительных экзаменах в вузы с повышенными требованиями по физике.

Задача 1. *Спутник массой m движется вокруг звезды массой $M \gg m$ по эллиптической орбите с большой полуосью a и эксцентриситетом e. Определите скорость спутника v в тот момент, когда он находится на расстоянии r от центра звезды. Чему равны максимальная v_{max} и минимальная v_{min} скорости спутника?*

Решение. В силу закона сохранения энергии имеем уравнение

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2a},$$

из которого сразу получаем искомую скорость:

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}.$$

Очевидно, что максимальная скорость достигается при минимальном r, т.е. в перицентре, когда $r = a - c = a(1 - e)$. Вычисления дают

$$v_{max} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}.$$

Ясно также, что минимальная скорость достигается при максимальном r, т.е. в апоцентре, когда $r = a + c = a(1 + e)$:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}.$$

Задача 2. *Спутник движется вокруг планеты массой M по эллипсу с большой и малой полуосями a и b соответственно. Найдите период обращения спутника T. Определите площадь S, которую радиус-вектор, проведенный из центра планеты к спутнику, «заметает» в единицу времени.*

Решение. Из третьего закона Кеплера вытекает, что искомый период обращения T совпадает с периодом обращения спутника, движущегося по круговой орбите радиусом a. Величину T найдем, разделив длину окружности $2\pi a$ на первую космическую скорость, равную $\sqrt{\frac{GM}{a}}$:

$$T = \frac{2\pi a}{\sqrt{\frac{GM}{a}}} = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}.$$

Так как за время T радиус-вектор равномерно «заметает» площадь эллипса, равную πab, то за единицу времени он «заметает» площадь

$$S = \frac{\pi ab}{T} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}.$$

Задача 3. *Найдите отношение времен прохождения кометой участков эллиптической орбиты, разграничиваемых малой полуосью эллипса с эксцентриситетом e.*

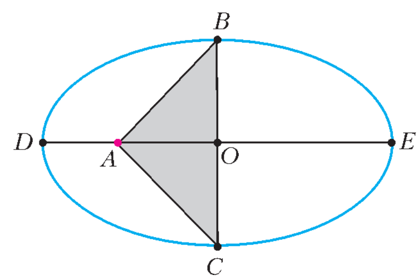


Рис. 4

Решение. Пусть t_1 – время движения кометы по дуге BDC, а t_2 – время движения кометы по дуге CEB (рис.4). Тогда по второму закону Кеплера искомое отношение времен равно

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{S_2}{S_1}, \text{ где } S_1 = \frac{\pi ab}{2} - S_{\Delta ABC} \text{ и } S_2 = \frac{\pi ab}{2} + S_{\Delta ABC}$$

– площади соответствующих частей эллипса. Очевидно, что

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AO = bc = abe.$$

Поэтому окончательно получаем

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{(ab(\pi + 2e))/2}{(ab(\pi - 2e))/2} = \frac{\pi + 2e}{\pi - 2e}.$$

Задача 4. *На какое максимальное расстояние r_2 от Солнца удаляется комета Галлея? Период ее обращения вокруг Солнца T = 76 лет, минимальное расстояние от Солнца $r_1 = 1,8 \cdot 10^8$ км. Радиус орбиты Земли $R = 1,5 \cdot 10^8$ км.*

Решение. Сравним, используя третий закон Кеплера, параметры движений кометы и Земли вокруг Солнца (рис.5):

$$\frac{T^2}{T_3^2} = \frac{\left((r_1 + r_2)/2\right)^3}{R^3},$$

где T_3 – продолжительность земного года. Отсюда находим

$$r_2 = 2R\left(\frac{T}{T_3}\right)^{2/3} - r_1 = 5,2 \cdot 10^9 \text{ км}.$$

Задача 5. *Период обращения тела по круговой орбите вокруг центра тяготения равен T. Вычислите время t падения тела с орбиты на центр тяготения, если бы скорость тела мгновенно обратилась в ноль.*

Решение. Проведем мысленный эксперимент. Пусть тело движется вокруг центра тяготения по очень вытянутому эллипсу с эксцентриситетом, бесконечно мало отличающимся от единицы (рис.6). Тогда длина такого эллипса с

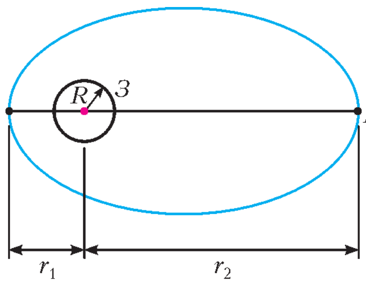


Рис. 5

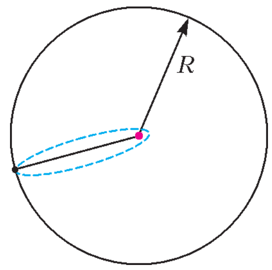


Рис. 6

огромной точностью равна $2R$, где R – радиус круговой орбиты. По соображениям симметрии время приближения спутника к центру тяготения равно времени удаления от него. Применяя третий закон Кеплера для обоих тел, получаем уравнение

$$\frac{(2t)^2}{T^2} = \frac{(R/2)^3}{R^3},$$

из которого находим

$$t = \frac{\sqrt{2}}{8}T.$$

Задача 6. *Орбита космического корабля «Восток» имела следующие параметры: высота в перигее h = 181 км, высота в апогее H = 327 км. Вычислите период обращения T космического корабля «Восток», если радиус Земли R = 6371 км.*

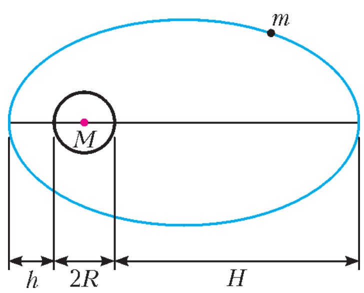


Рис. 7

Решение. Сначала определим период обращения низколетящего по круговой орбите искусственного спутника Земли:

$$T_0 = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Большая полуось эллиптической орбиты космического корабля «Восток», очевидно, равна $R + (h+H)/2$ (рис.7). Осталось применить третий закон Кеплера:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{\left(R + (h+H)/2\right)^3}{R^3},$$

откуда найдем

$$T = T_0\left(1 + \frac{h+H}{2R}\right)^{3/2} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1 + \frac{h+H}{2R}\right)^{3/2} = 89{,}4 \text{ мин}.$$

Задача 7. *С полюса Земли запускают две ракеты: одну вертикально вверх, другую горизонтально. Начальные скорости обеих ракет равны v_0, причем $\sqrt{Rg} < v_0 < \sqrt{2Rg}$. Какая из ракет удалится дальше от центра Земли и во сколько раз?*

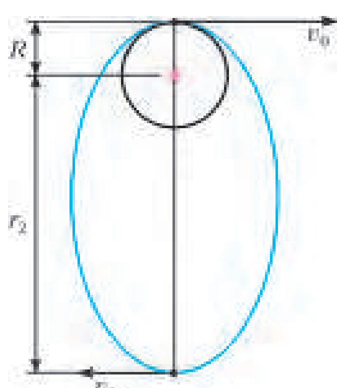


Рис. 8

Решение. Очевидно, что первая ракета упадет на место старта, а вторая будет двигаться по эллипсу (рис.8). Пусть первая ракета удалится от центра Земли на максимальное расстояние r_1. По закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{r_1},$$

откуда находим

$$r_1 = \frac{2GMR}{2GM - v_0^2 R}.$$

Пусть вторая ракета удалится от центра Земли на максимальное расстояние r_2. В силу закона сохранения энергии имеем

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{2a}, \text{ где } 2a = r_2 + R.$$

Отсюда получаем

$$r_2 = \frac{R^2 v_0^2}{2GM - Rv_0^2}.$$

Таким образом,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2Rg}{v_0^2} > 1,$$

т.е. первая ракета удалится от центра Земли дальше, чем вторая.

Задача 8. *Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом 3R (рис.9), где R – радиус Земли. В результате кратковременного действия тормозного двигателя скорость спутника уменьшилась так, что он перешел на эллиптическую орбиту, касающуюся поверхности Земли. Через какое время t после торможения спутник приземлится?*

Решение. Пусть в точке A происходит торможение спутника, а в точке B – его приземление. Таким образом, спутник проходит половину эллиптической орбиты с большой полуосью $2R$. Это движение займет половину периода обращения T по эллипсу:

$$t = \frac{T}{2}.$$

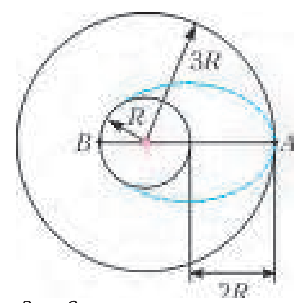


Рис. 9

Используя третий закон Кеплера, сравним движения двух спутников – нашего эллиптического и низколетящего кругового:

$$\frac{T^2}{\left(2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\right)^2} = \frac{(2R)^3}{R^3}.$$

Отсюда найдем

$$T = 4\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}, \text{ и } t = 2\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 119 \text{ мин}.$$

Задача 9. *Телу на поверхности Земли сообщили начальную скорость, равную первой космической скорости $v_0 = \sqrt{Rg}$, где R – радиус Земли, и направленную под углом α к горизонту. Найдите максимальную высоту подъема тела H над поверхностью Земли и дальность полета s по дуге большого круга.*

Решение. Из рисунка 10 ясны обозначения и равенства углов в силу симметрии относительно оси OB. Тело движется по части ABC эллипса. Применим к положениям тела в точках A и B законы сохранения энергии и момента импульса:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{R+H},$$

$$mv_0 R\sin(90° - \alpha) = mv(R+H).$$

Из первого уравнения, с учетом того, что $v_0^2 = Rg$, легко находим

$$v = \sqrt{Rg\left(\frac{R-H}{R+H}\right)}.$$

Подставим это значение во второе уравнение:

$$\sqrt{Rg}R\cos\alpha = \sqrt{Rg(R+H)(R-H)},$$

откуда получим

$$H = R\sin\alpha.$$

Искомая длина дуги равна $s = R\beta$. Из прямоугольного треугольника OAD видно, что $\frac{\beta}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\beta = \pi - 2\alpha$, и

$$s = R(\pi - 2\alpha).$$

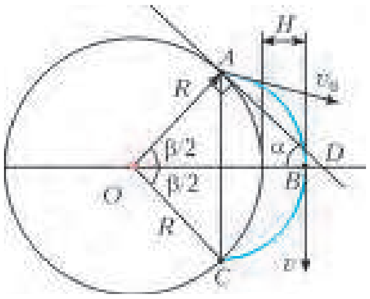


Рис. 10

Задача 10. *Тело падает на Землю с высоты, равной ее радиусу R, без начальной скорости. Найдите время t падения тела.*

Решение. Чтобы избежать применения интегрального исчисления, проведем мысленный эксперимент. Пусть телу на высоте R сообщена сколь угодно малая горизонтальная скорость $\vec{v}_0$ (рис.11). Тогда в силу первого закона Кеплера тело будет двигаться по дуге эллипса с большой полуосью, равной R, бесконечно мало отличающейся от отрезка прямой. Значит, времена криволинейного и прямолинейного движений тела будут равны. По третьему закону Кеплера период обращения тела по эллипсу T равен периоду обращения низкого кругового искусственного спутника Земли:

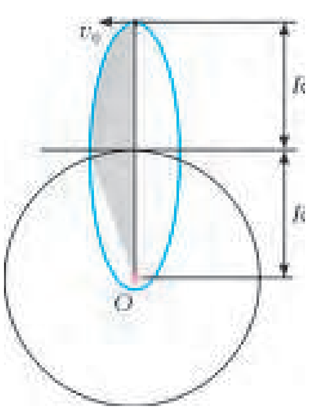


Рис. 11

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Согласно второму закону Кеплера,

$$\frac{t}{T} = \frac{S}{\pi Rb},$$

где S – закрашенная на рисунке 11 площадь, «заметаемая» радиусом-вектором тела, проведенным из центра Земли, совпадающим с фокусом эллипса. Легко видеть, что, с достаточной степенью точности,

$$S = \frac{\pi Rb}{4} + \frac{Rb}{2}.$$

Тогда

$$t = T\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 34 \text{ мин}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите разность времен прохождения участков эллиптической орбиты Земли, разграничиваемых малой полуосью эллипса. Эксцентриситет земной орбиты $e = 0{,}017$.

2. Вычислите массу Земли, используя известные параметры орбиты искусственного спутника Земли «Космос-380»: период обращения 102,2 мин, высота в перигее 6588 км, высота в апогее 7926 км.

3. Каковы максимальная и минимальная скорости кометы Галлея, если наибольшее расстояние от кометы до Солнца равно 35,4 а.е., а наименьшее – 0,6 а.е. Масса Солнца $2\cdot10^{30}$ кг.

4. Последнее прохождение кометы Галлея вблизи Солнца наблюдалось в 1986 году. Используя данные предыдущей задачи, определите, в каком году произошло ее предыдущее прохождение?

5. Два спутника Земли, которые движутся по одной орбите, имеют период обращения 4 ч каждый. Расстояние между спутниками изменяется от 2 км до 5 км. Определите высоту апогея и высоту перигея общей орбиты спутников.

6. Плутон имеет орбиту с большой полуосью 40 а.е. и эксцентриситетом 0,25. Найдите период обращения и максимальную скорость Плутона.

7. Скорость спутника в перигее равна v при расстоянии до центра Земли, равном r. Какова скорость спутника в апогее? Каково расстояние от него до центра Земли в апогее? Масса Земли равна M.

8. С Южного и Северного полюсов Земли одновременно стартуют две ракеты с одинаковыми начальными скоростями, направленными горизонтально. Через 3 ч 20 мин ракеты оказались на максимальном удалении друг от друга. Определите максимальное расстояние между ракетами.

9. Два искусственных спутника Земли движутся по одной и той же эллиптической орбите. Расстояние между ними настолько мало, что дугу эллипса между спутниками можно считать отрезком прямой. Расстояние между спутниками было равно a, когда середина соединяющего их отрезка находилась в перигее. На каком расстоянии будут находиться спутники, когда середина отрезка будет переходить через апогей? Высота перигея орбиты h, высота апогея H, радиус Земли R.

10. Космический корабль движется по круговой орбите на расстоянии 400 км от поверхности Земли. На сколько нужно увеличить скорость корабля для перевода его на эллиптическую орбиту с расстоянием 400 км от поверхности Земли в перигее и 40000 км в апогее? Каким будет новый период обращения корабля?

Геометрия кардиоиды

А.АКОПЯН

Определения и основные свойства

Изображенная на рисунке 1 кривая называется *кардиоидой*. Название происходит от греческого καρδια , что переводится как «сердце». Эта фигура обладает множеством интересных свойств и поэтому часто встречается в математике. В полярных координатах уравнение кардиоиды записывается так:

$$r = 1 - \cos\varphi . \qquad (*)$$

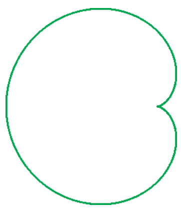


Рис. 1

Упражнение 1. Напишите уравнение кардиоиды в декартовых координатах.

В этой статье речь пойдет о геометрических свойствах кардиоиды, поэтому дадим геометрическое описание.

Пусть по неподвижной окружности диаметра 1 катится другая окружность такого же диаметра. Тогда траекторией фиксированной точки катящейся окружности будет кардиоида (рис.2).

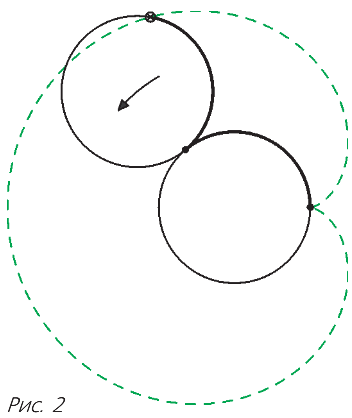


Рис. 2

Определение с катящимися окружностями не очень удобно для исследования кардиоиды (но оно нам еще пригодится), поэтому мы сформулируем его следующим образом. Пусть дана окружность ω с центром O, точка A на ней и точка P, двигающаяся по ω (рис.3). Пусть O' – это точка, симметричная O относительно P. А точка B выбирается так, что $\angle BO'P = \angle POA$ и $O'B = OA$ (точнее, B симметрична A относительно серединного перпендикуляра к отрезку OO'). Тогда, если точка P пройдет окружность ω, точка B опишет кардиоиду.

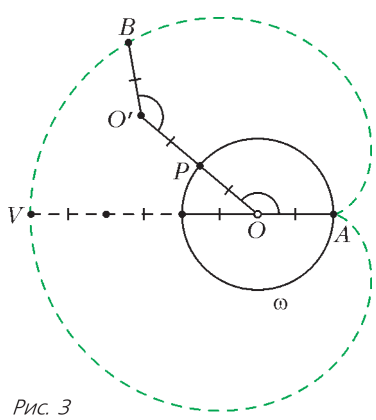


Рис. 3

Точка A называется *каспом* кардиоиды, а точка V кардиоиды, лежащая на луче AO, называется ее *вершиной*.

Упражнение 2. Пусть окружность диаметра 1 катится по внутренности окружности диаметра 2. Какова будет траектория фиксированной точки катящейся окружности?

Поскольку треугольник AOP равнобедренный, а AB параллельна OP, получаем следующее полезное утверждение.

Лемма 1. *AP является биссектрисой угла OAB.*

Обозначим через Q повторную точку пересечения BA и ω (рис.4). Тогда четырехугольник $BO'OQ$ будет параллелограммом (две его стороны равны, а другие две параллельны, и это не трапеция), и, следовательно, BQ равно $O'O$, или, что то же самое, диаметру окружности ω.

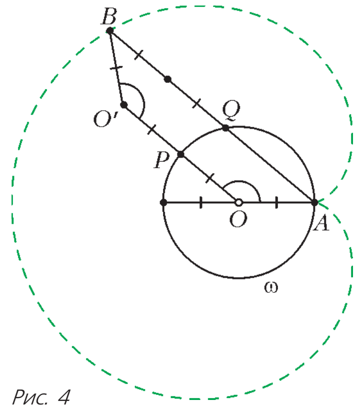


Рис. 4

Поэтому можно определить кардиоиду следующим наглядным образом. Пусть дана окружность ω диаметра 1 и точка A на ней. Пусть точка Q движется по ω и на прямой AQ выбрана точка B так, что BQ равно диаметру окружности ω (рис.5). Тогда B будет двигаться по кардиоиде. Точку B, конечно, можно выбрать двумя способами (по разные стороны от точки Q), обе получившиеся точки будут лежать на кардиоиде (докажите!). Из данной конструкции хорошо видно, что получающаяся кривая задается уравнением (*) с началом координат в точке A (проверьте это!), так что все данные нами определения равносильны.

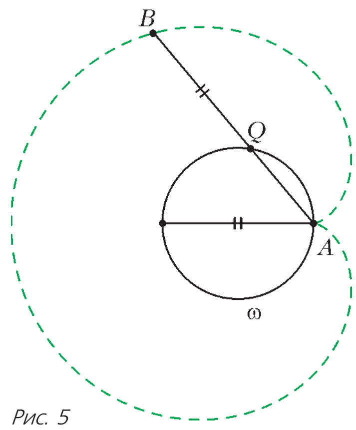


Рис. 5

Упражнение 3. Пусть окружность диаметра 2 катится вокруг окружности диаметра 1, содержащейся внутри нее. Какова будет траектория фиксированной точки катящейся окружности?

Касательные к кардиоиде и ее инверсный образ

Как построить касательную к кардиоиде?

Порассуждаем несколько неформально и вернемся к самому первому определению кардиоиды. Пусть окружность ω′ катится по окружности ω и в некоторый момент времени эти две окружности касаются друг друга в точке P (рис.6). Как при этом направлена мгновенная скорость точки B? Вспомним школьные уроки физики. Заметим, что скорость точки P (на окружности ω′) равна нулю, т.е. эта точка покоится. Вектор скорости точки B должен быть перпендикулярен отрезку BP, поскольку расстояние BP не изменяется. Тем самым, мы получили следующее утверждение.

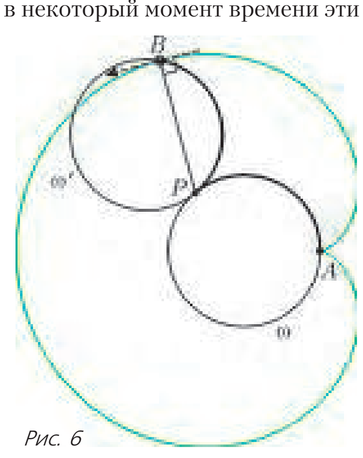


Рис. 6

Лемма 2. *Касательная к кардиоиде в точке B перпендикулярна BP.*

Таким образом, кардиоида касается всех окружностей с центрами P на окружности ω и радиуса $PB = PA$. Говоря

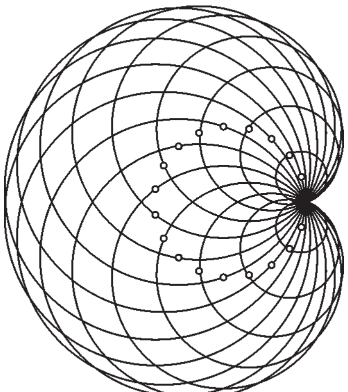


Рис. 7

научным языком, кардиоида будет огибающей этого семейства окружностей (рис.7).

Что случится со всеми этими окружностями, если сделать инверсию [1] с центром в точке A и радиусом, равным диаметру окружности ω? Окружность ω перейдет в прямую l – серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему касп и вершину кардиоиды. Рассмотрим любую окружность нашего семейства с центром в некой точке I. Пусть она пересекает луч AI в точке Y. Тогда образом окружности будет прямая, проходящая через образ точки Y и перпендикулярная лучу AI. Но образом точки I (так как она лежит на ω) будет точка X пересечения луча AI с прямой l. Поскольку Y в два раза дальше от A, чем I, то образ точки Y будет в два раза ближе к A, чем точка X. Тем самым, мы доказали, что все окружности нашего семейства перейдут в прямые – серединные перпендикуляры к отрезкам AX, где X – точка, движущаяся по прямой l (рис.8).

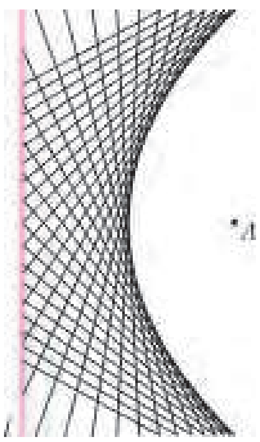


Рис. 8

Как известно, все такие прямые касаются параболы с фокусом в A и директрисой l. Таким образом, наша кардиоида – это инверсный образ параболы.

Тут надо дать некоторое пояснение. *Параболой* называется множество точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки (называемой *фокусом*) и некоторой прямой (*директрисы*). Хорошо известно *фокальное свойство* параболы: луч света, пущенный из фокуса параболы, отразившись от ее поверхности, дальше идет по прямой, перпендикулярной директрисе. Геометрически это означает, что если X – точка на параболе, Y – проекция X на директрису, а A – фокус параболы, то касательная к параболе в точке X будет биссектрисой угла YXA (рис.9). Подробнее о параболе можно почитать в [2].

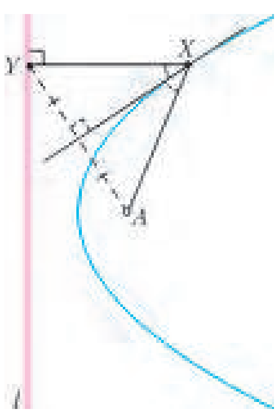


Рис. 9

Сформулируем утверждение о том, что парабола и кардиоида инверсны, в виде теоремы и дадим ей строгое доказательство.

Теорема. *Пусть κ – кардиоида с каспом в точке A и вершиной в точке V, а l – серединный перпендикуляр к AV. Тогда после инверсии с центром в A и радиусом $\frac{AV}{2}$ кардиоида κ переходит в параболу с фокусом в A и директрисой l.*

Доказательство. Мы явно покажем, почему точка кардиоиды при инверсии перейдет в точку на параболе. При этом способ доказательства явно следует из вышеописанных конструкций.

Обозначим середину AV через M, пересечение AP с l через P' (рис.10). Пусть B' – инверсный образ точки B. Тогда из свойств инверсии следует, что четырехугольник $P'PB'B$ вписанный, ведь точки P и P' тоже инверсны.

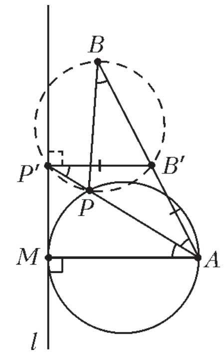


Рис. 10

Заметим, что выполнено следующее равенство углов:

$$\angle B'P'P = \angle B'BP = \angle PAB = \angle MAP = 90^\circ - \angle MP'A .$$

Таким образом, угол $MP'B'$ прямой, а треугольник $AB'P'$ равнобедренный. Это как раз и означает, что точка B' равноудалена от прямой l и от точки A, т.е. лежит на параболе из условия теоремы.

Поскольку касающиеся кривые при инверсии переходят в касающиеся, утверждение леммы 2 тоже можно считать доказанным.

Несколько свойств кардиоиды

Если вернуться к обозначениям рисунка 4, то из леммы 1 легко видеть, что угол между BP и BA равен половине угла OAB. Поскольку касательная в точке B к кардиоиде перпендикулярна BP, элементарный подсчет углов дает нам следующую лемму.

Лемма 3. *Ориентированный угол между касательной в точке B к кардиоиде и прямой AV равен $90^\circ - \frac{3}{2}\angle BAV$, где A – касп кардиоиды, а V – ее вершина.*

Под ориентированным углом мы понимаем угол, на который надо повернуть касательную по часовой стрелке, чтобы она стала параллельна AV (если угол отрицательный, то поворачиваем против часовой стрелки).

Таким образом, при движении точки B угол наклона касательной в ней меняется в полтора раза быстрее, чем угол наклона BA. Вот два симпатичных следствия из этого наблюдения.

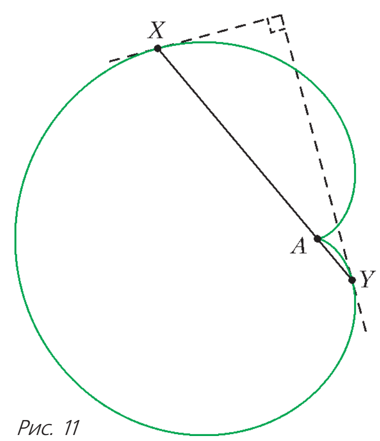


Рис. 11

Следствие 1. *Пусть X и Y – две точки на кардиоиде такие, что отрезок XY содержит касп. Тогда касательные в точках X и Y пересекаются под прямым углом (рис.11).*

Следствие 2. *Пусть на кардиоиде с каспом A выбраны такие три точки X, Y и Z, что*

$$\angle XAY = \angle YAZ = \angle ZAX = 120^\circ .$$

Тогда касательные в точках X, Y и Z параллельны (рис.12).

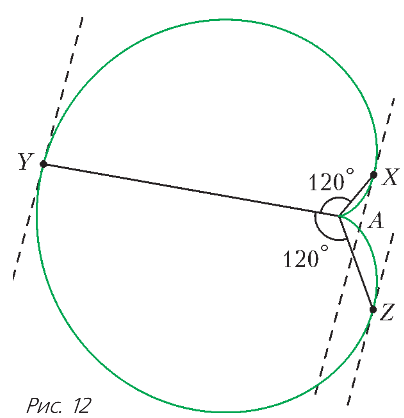


Рис. 12

Продолжим изучать конструкцию, изображенную на рисунке 4. Обозначим повторное

[1] Узнать об инверсии можно, например, из книги [1].

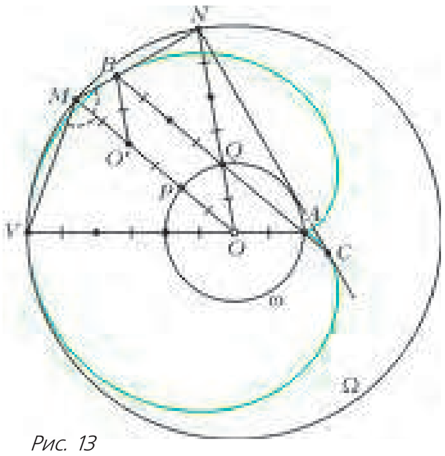


Рис. 13

пересечение прямой AB с кардиоидой через C, окружность с центром в O и радиусом OV обозначим через Ω. Пересечение лучей OP и OQ с Ω обозначим через M и N соответственно (рис.13).

Из построения кардиоиды мы знаем, что Q – середина BC. Поэтому QN равна половине BC, следовательно, угол BNC прямой. Покажем, что BN и NC будут касательными к кардиоиде. Как мы знаем, $\angle PBQ = \frac{1}{2}\angle QAO$. С другой стороны, треугольник BQN равнобедренный, следовательно, $\angle QBN = 90° - \frac{1}{2}\angle BQN = 90° - \frac{1}{2}\angle QAO$. Значит, угол PBN прямой, а следовательно, BN будет касательной (аналогично для CN). Тем самым, мы показали, *что касательные в следствии 1 не только перпендикулярны, но и пересекаются на окружности* Ω.

Кроме того, углы POV и POQ равны друг другу (так как оба равны углу QAO), откуда $\angle VMO = \angle OMN = 90° - \frac{1}{2}\angle QAO$. Таким образом, *луч, выходящий из V, отразившись от внутренней поверхности Ω, идет по касательной к кардиоиде* (рис.14). Другими словами, кардиоида является *каустикой* окружности с источником света, расположенным на окружности, так что ее можно часто встретить в природе (рис.15). Вы можете провести такой эксперимент дома, взяв металлическую кастрюлю и расположив фонарик у ее края. Лучи света, отразившись от стенок, нарисуют на дне кардиоиду. Подробнее о каустиках см., например, [3].

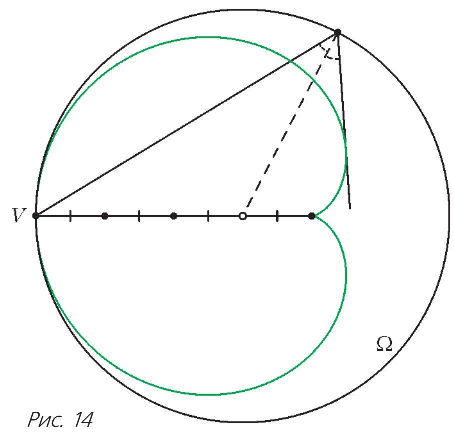


Рис. 14

Упомянем еще один примечательный факт про кардиоиду. Она является центральной частью хорошо известного *множества Мандельброта* (рис.16). Подробнее об этом можно почитать, например, в [4].


Рис. 15. Фото Gerard Janot

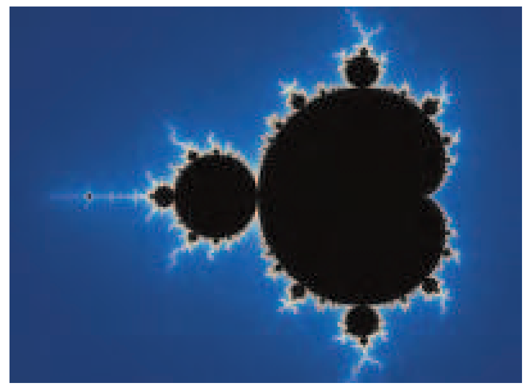


Рис. 16

В статье В.Горина «Что можно сложить из кубиков?» в этом номере журнала шла речь о том, как выглядит «типичное замощение» центрально симметричного шестиугольника с углами 120° ромбами, или, что то же самое, как выглядит типичная трехмерная диаграмма Юнга в коробке. Оказывается, что, как правило, вблизи углов ромбы будут иметь одинаковый вид, и тем самым у типичного замощения вырисовывается вполне конкретная граница – эллипс, вписанный в этот шестиугольник (см. рис. 12 статьи В.Горина).

Сравнительно недавно А.Окуньков и Р.Кеньён показали, что если рассматривать правильный шестиугольник с вырезанным у угла ромбом (со стороной, в два раза меньшей стороны шестиугольника; рис.17), то границей его типичного замощения будет кардиоида!

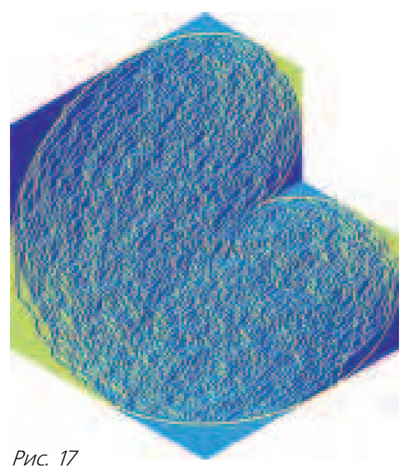


Рис. 17

Список литературы

1. А.А.Заславский. *Геометрические преобразования.* – М.: МЦМНО, 2004.

2. А.В.Акопян, А.А.Заславский. *Геометрические свойства кривых второго порядка.* – М.: МЦНМО, 2007.

3. А.Андреев, А.Панов. *Каустики на плоскости и в пространстве.* – «Квант»№3 за 2010 год.

4. Х.О.Пайтген, П.Х.Рихтер. *Красота фракталов.* – М.: Мир, 1993.

«ДЖОКОНДА» КАК ГРАФИК ФУНКЦИИ,

или Построение функции со всюду плотным графиком

Л.ШТЕЙНГАРЦ

В МАТЕМАТИКЕ ДАВНО ИЗВЕСТНЫ ФУНКЦИИ С УДИвительным свойством: их график *всюду плотен* на плоскости. Такие функции часто называют «странными», «экзотическими», «дикими» и т.п. Они хорошо известны специалистам-математикам, но почти не знакомы «широкой публике», например школьникам. Ведь те построения, которые приводятся в литературе (см., например, список в конце статьи), обычно громоздки и требуют серьезной математической подготовки.

Может быть, Джоконда так таинственно улыбается, скрывая график функции...

Мне удалось найти совершенно элементарное доказательство существования таких функций, с которым я хочу вас познакомить.

Напомню вначале, что множество на плоскости называется *всюду плотным*, если в любом круге (даже очень маленьком) обязательно найдется хотя бы одна точка из этого множества. Например, множество всех точек плоскости, у которых обе координаты рациональны, – это множество обозначается $\mathbb{Q}^2$ – как нетрудно понять, является всюду плотным. Но это множество не является графиком функции. Ведь для функции необходимо, чтобы каждому значению переменной x соответствовало *единственное* значение переменной y.

Автор статьи – доктор педагогики из Иерусалима (Израиль).

Обещанное доказательство довольно абстрактно, и, чтобы оно было более прозрачным для читателей, рассмотрим сначала такую картинку (рис.1).

Рис. 1

Перед нами самая известная картина великого Леонардо да Винчи – «Джоконда». Правда, изображенная при помощи старой вычислительной машины. Такие картинки было очень модно изготавливать в конце прошлого века. Впрочем, и сейчас любая картинка на компьютере примерно так и составляется – из точек.

В середине прошлого века компьютер (раньше его называли вычислительной машиной) занимал иногда несколько комнат

Портрет Джоконды состоит из громадного количества точек. Сколько этих точек – мы не знаем. Может, миллион. Может, намного больше. Не важно. Главное, что их *конечное количество.* Рассмотрим множество всех этих точек как некую геометрическую фигуру. Вспомните школьное определение, что геометрическая фигура – это *любое* множество точек. И зададим следующий вопрос:

является ли эта фигура графиком некоторой (однозначной) функции?

Разумеется, мы предполагаем, что точки тут математические – они не имеют размера (в отличие от компьютерных пикселей, которые имеют хоть и очень маленький, но все же ненулевой размер).

Для начала ответьте на другой вопрос (ответ не такой уж тривиальный):

является ли полуокружность графиком функции?

А это – как посмотреть! Если так, как показано на рисунке 2, то это график функции (почему?).

А если так, как изображено на рисунке 3, то нет (опять-таки, почему?).

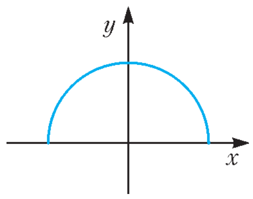


Рис. 2

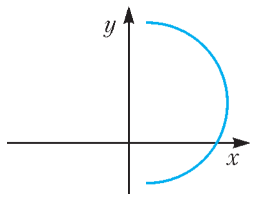


Рис. 3

И снова я задаю свой предыдущий вопрос:

является ли «Джоконда» графиком некоторой функции?

Отвечаю. Оказывается, можно так подобрать систему координат (т.е. так выбрать оси x и y), что множество всех точек, образующих портрет Джоконды, окажется *графиком некоторой функции*. Докажем это.

Обозначим наше множество буквой G – в честь Джоконды. Будем считать, что оно расположено на некоторой числовой плоскости с числовыми осями x и y.

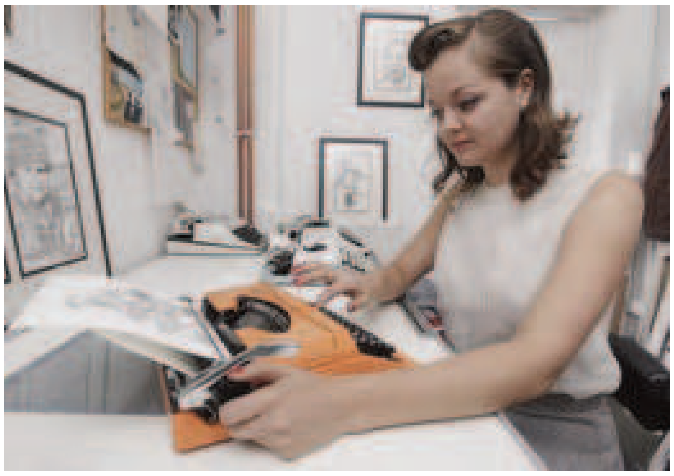
Проведем все прямые, соединяющие попарно все точки нашего множества G. Обозначим множество всех полученных прямых через $\overline{G}$.Так как множество G конечно, то ясно, что и множество $\overline{G}$ также конечно (объясните, почему).

Каждая прямая из этого множества будет образовывать некоторый угол с осью x (для определенности, можно брать меньший угол, хотя это и не принципиально). Таких углов будет тоже конечное множество. Следовательно, на плоскости непременно найдется некоторая прямая, которая не будет совпадать ни с одной из прямых множества $\overline{G}$ и не будет параллельна ни одной из этих прямых (почему?).

Примем эту прямую за новую ось ординат. А любую прямую, ей перпендикулярную, за новую ось абсцисс. Можно сказать и так: посмотрим на портрет Джоконды *под другим углом*. Но не под каким угодно углом, а так, как было выбрано. Или, что то же самое, просто повернем картинку на нужный угол. Мы увидим примерно то, что изображено на рисунке 4.

При этом на каждой прямой, которая параллельна новой оси ординат, будет лежать не более одной точки из множе-


Рис. 4


Если не было компьютера, то умудрялись рисовать Джоконду и другие картинки при помощи печатной машинки

ства G, т.е. не более одной точки из портрета Джоконды. А это и означает, что множество точек, образующих портрет Джоконды, превратилось в график некоторой (однозначной!) функции. Ведь каждому значению x (из соответствующей области определения) соответствует *единственное* значение y. Это следует из нашего построения. И хотя мы не можем указать, какому числу что именно соответствует, это все же не мешает тому, что будет получен график функции.

Впрочем, при необходимости можно найти формулу даже *непрерывной* функции, график которой проходит через все точки, принадлежащие портрету Джоконды. Для этого достаточно воспользоваться формулой Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Здесь $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, … – это и есть точки «Джоконды», занумерованные в каком-то порядке. Несмотря на довольно пугающий вид, понять эту формулу совсем несложно (попробуйте!). Но об этом как-нибудь в другой раз. Тем более что, нарисовав график такой функции, мы уже вряд ли разглядим в нем Джоконду. Слишком много будет «лишних» линий, соединяющих точки Джоконды в непрерывный график. Так что обойдемся лучше без непрерывных функций и двинемся дальше.

Я надеюсь, что портрет Джоконды поможет более четко представить построение функции, график которой всюду плотен на плоскости. Ведь при этом работает практически та же идея.

Итак, построим теперь нашу «странную» функцию.

Первый способ. Проведем какую-нибудь прямую вида $y = mx + n$, которая образует с положительным направлением оси абсцисс угол величиной $60°$. Тогда $m = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. Докажем, что на такой прямой может лежать не более одной точки с рациональными координатами.

Действительно, предположим, что этой прямой принадлежат две различные точки с рациональными координатами:

$$A = (x_1, y_1) \text{ и } B = (x_2, y_2).$$

Тогда

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n, \\ y_2 = mx_2 + n. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение из первого, получим

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$$

Значит (учитывая, что $x_1 \neq x_2$),

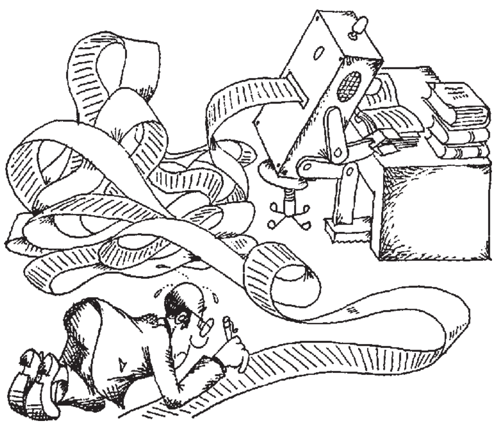
$$m = \sqrt{3} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Но это невозможно, так как $\sqrt{3}$ – число иррациональное. Поэтому на каждой прямой вида $y = x\sqrt{3} + n$ лежит *не более одной* точки с рациональными координатами.

А теперь – *главная идея* (взгляд «с другой стороны»). Оставим множество $\mathbb{Q}^2$ «неподвижным» и повернем оси x и y вокруг начала координат на 60° (например, против часовой стрелки). Тогда рассматриваемое нами множество $\mathbb{Q}^2$, как по волшебству, тут же превратится в график некоторой функции.

Если мы хотим, чтобы полученная нами функция была определена для всех действительных чисел, достаточно для остальных точек принять ее значение равным, например, нулю.

Таким образом, получим функцию, определенную на всей числовой прямой, график которой, очевидно, *всюду плотен на плоскости.*



Эта шуточная картинка недалека от реальности: раньше приходилось (да иногда и сейчас приходится) вручную проверять результаты, полученные компьютерной программой. Поэтому все же, главное — творческий подход

Второй способ. Этот способ еще короче. Но он будет понятен лишь тем, кто знаком с начальными понятиями теории множеств. Он доступен, например, математикам-первокурсникам или ученикам математических классов.

Рассмотрим снова множество $\mathbb{Q}^2$ всех точек плоскости, у которых обе координаты рациональны. Проведем *все прямые*, которые соединяют попарно точки множества $\mathbb{Q}^2$. Как известно, множество $\mathbb{Q}^2$ (как и множество $\mathbb{Q}$) является счетным. Поэтому и множество P всех таких прямых также будет счетным (как счетное объединение счетных множеств). Но так как множество вообще всех прямых является несчетным (рассмотрите хотя бы все прямые вида $y = mx$, где m – действительное число), то существует прямая, не параллельная и не совпадающая ни с одной прямой из множества P. Примем эту прямую за новую ось ординат, а любую прямую, ей перпендикулярную, – за ось абсцисс. Дальнейшее почти очевидно.

В заключение предлагаем решить головоломку, которую я придумал для младших школьников, но которая, как мне кажется, хорошо иллюстрирует главную идею изложенного построения «странной» функции.

Головоломка с двумя бокалами. Перед вами два бокала, построенные при помощи спичек (рис.5). Переставьте две спички так, чтобы у полученной конфигурации была ось симметрии. Найдите два различных способа решения.

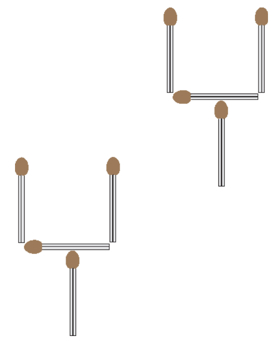


Рис. 5

Литература

1. А.Лопшиц *Функциональные уравнения.* – «Квант» № 1 за 1975 год.
2. Б.Гелбаум, Дж.Олмстед. *Котрпримеры в анализе.* – М.: Мир, 1967.
3. В.М. Шибинский. *Примеры и котрпримеры в математическом анализе.* – http://vladimir.shibinsky.ru/pages/article12/

«Колыбелька» Ньютона

(Начало см. на 4-й странице обложки)

налево, доходит до левого края шара 5 (*е*), отражается и превращается в волну расслабления. Все это время система из пяти шаров не обладает кинетической энергией, поскольку вся первоначальная кинетическая энергия шара 1 перешла в кочующую потенциальную энергию деформированных шаров, которой они обмениваются между собой. Легко понять, что «красная» и «зеленая» волны встретятся в месте контакта шаров 4 и 5. При этом расширяющийся шар 5 оттолкнется от шара 4, и вся потенциальная энергия деформации системы шаров перейдет в кинетическую энергию шара 5 (рис.3,*б*).

Аналогичным образом можно разгадать и другие загадки «колыбельки» Ньютона для одинаковых шаров, которые показаны на рисунке 4. Попробуйте сделать это сами.

К.Богданов

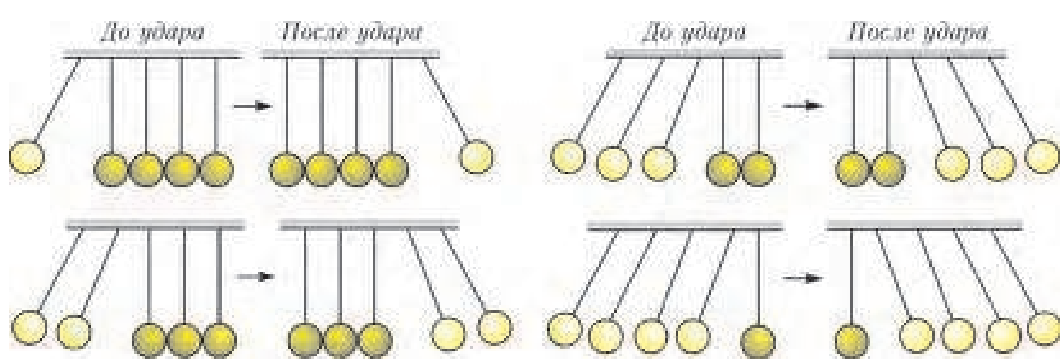


Рис. 4

Задачи с поршнями и перегородками

А.ЧЕРНОУЦАН

Поршни и перегородки встречаются в задачах механики (гидростатики), молекулярной физики, термодинамики. Если речь идет о подвижной перегородке, перекрывающей цилиндрический сосуд, то ее можно смело называть поршнем. Термин «перегородка» уместен в случае открытого сосуда (задача 1) или в случае неподвижной стенки, пропускающей тепло или молекулы определенного типа (полупроницаемая перегородка). Поршень может быть невесомым или массивным (что важно только в случае вертикального цилиндра), проводящим тепло или теплонепроницаемым, двигаться свободно или с трением.

Рассмотрим конкретные примеры.

Гидростатика

Задача 1. *Глубокий бассейн площадью $S = 15$ м^2 заполнен водой до глубины $h = 1$ м и перегорожен пополам вертикальной перегородкой. Какую работу совершают, медленно перемещая перегородку так, чтобы она разделила бассейн в отношении 1:3? Вода через перегородку не проникает.*

Решение. Решение «в лоб»: рассчитать силы давления, действующие на перегородку, в зависимости от ее смещения и вычислить работу через среднюю силу. Однако можно обойти вычисление сил давления, рассчитав работу через изменение потенциальной энергии воды. Принимая за уровень отсчета высоты дно бассейна, запишем

$$E_{\text{нач}} = mg\frac{h}{2},\quad E_{\text{кон}} = \frac{m}{2}g\frac{h_1}{2} + \frac{m}{2}g\frac{h_2}{2},$$

где $m = \rho Sh$ – общая масса воды, h_1 и h_2 – конечные уровни воды в отсеках. Эти уровни находятся из условия сохранения объема воды:

$$h\frac{S}{2} = h_1\frac{S}{4} = h_2\frac{3S}{4}.$$

После вычислений получаем

$$A = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = \frac{\rho g S h^2}{6} = 25 \text{ кДж}.$$

Задача 2. *Вертикальная труба с легким поршнем, плотно прилегающим к ее внутренним стенкам, опущена нижним концом в воду. Вначале поршень находится в самом нижнем положении, на уровне воды, а затем его медленно поднимают на высоту $H = 20$ м. Пренебрегая трением и давлением паров воды, найдите совершенную при этом работу. Площадь поршня $S = 100$ см^2. Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.*

Решение. При подъеме поршня на высоту h давление воды на поршень равно

$$p = p_0 - \rho g h,$$

а сила, с которой надо удерживать поршень, равна равнодействующей сил давления:

$$F = p_0 S - pS = \rho g h S,$$

т.е. весу воды, поднявшейся вместе с поршнем. Эта сила линейно зависит от высоты. На высоте

$$h_0 = \frac{p_0}{\rho g} = 10 \text{ м}$$

давление воды на поршень обращается в ноль, между водой и поршнем появляется пустой промежуток, и сила перестает изменяться:

$$F = p_0 S.$$

Таким образом, работа внешней силы равна

$$A = \frac{0 + p_0 S}{2}h_0 + p_0 S(H - h_0) = p_0 S\left(H - \frac{h_0}{2}\right) = 15 \text{ кДж}.$$

В последующих задачах мы будем иметь дело с идеальным газом. Разобьем задачи на две группы: задачи на газовые законы и задачи на термодинамику идеального газа.

Уравнение состояния идеального газа

Задача 3. *Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре $t_1 = 7$ °C равно $p_1 = 150$ кПа. До какой температуры t_2 (по шкале Цельсия) надо нагреть бутылку, чтобы из нее вылетела пробка, если известно, что для вытаскивания пробки без нагревания бутылки требуется минимальная сила $F = 45$ Н? Площадь поперечного сечения пробки $S = 4$ см^2.*

Решение. Условие вылетания пробки при нагревании газа состоит в том, что дополнительное давление должно создать такую же силу F, которая потребовалась для начала скольжения пробки в горлышке бутылки:

$$(p_2 - p_1)S = F.$$

Из этого уравнения мы определим p_2 и, применив уравнение состояния идеального газа при постоянном объеме (закон Шарля)

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1},$$

найдем искомую температуру:

$$T_2 = \left(\frac{F}{Sp_1} + 1\right)T_1 = 490 \text{ К},\quad t_2 = 217 \text{ °C}.$$

Задача 4 (ЕГЭ). *В цилиндр объемом $V = 0{,}5$ м^3 насосом закачивается воздух со скоростью $\mu = 0{,}002$ кг/с. В верхнем торце цилиндра есть отверстие, закрытое предохранительным клапаном. Клапан удерживается в закрытом состоянии стержнем, который может свободно поворачиваться вокруг оси в точке A (рис.1). К свободному концу стержня подвешен груз массой $m = 2$ кг. Клапан открывается через $t = 580$ с работы насоса, если в начальный момент времени давление воздуха в цилиндре было равно атмосферному. Площадь закрытого клапаном отверстия $S = 5 \cdot 10^{-4}$ м^2, расстояние AB равно $l = 0{,}1$ м. Температура воздуха в цилиндре и снаружи не меняется и равна $T = 300$ К. Определите длину стержня L, считая его невесомым.*

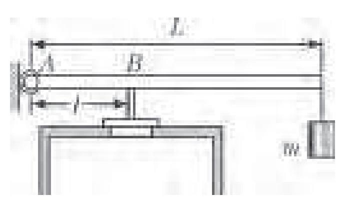


Рис. 1

Решение. Сила, действующая на клапан, определяется дополнительным давлением $\Delta p = p - p_0$, создаваемым закачанным в цилиндр воздухом. Условие равновесия рычага в момент, когда клапан перестает давить на стенки, имеет вид

$$\Delta pSl - mgL = 0 .$$

Связь Δp с дополнительной массой воздуха $\Delta m_{\text{в}} = \mu t$ определяется уравнением Менделеева – Клапейрона:

$$\Delta pV = \frac{\Delta m_{\text{в}}}{\mathrm{M}} RT ,$$

где $\mathrm{M} = 29$ кг/кмоль – молярная масса воздуха. Проведя вычисления, получим

$$L = \frac{\mu tRTSl}{\mathrm{M}Vmg} = 0{,}5 \text{ м} .$$

В следующей задаче нам все-таки придется вычислить силу давления жидкости на вертикальную перегородку, чего удалось избежать в задаче 1.

Задача 5 (НГУ, 2009). *Замкнутый сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда длиной 2L, шириной b и высотой h перекрыт посередине тонким поршнем, который может перемещаться без трения (рис.2). В правую половину сосуда через отверстие вверху медленно наливают жидкость плотностью* ρ. *Какой объем жидкости можно налить, если атмосферное давление равно* p_0, *а температура постоянна?*

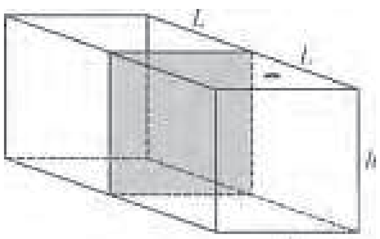


Рис. 2

Решение. Условие равновесия поршня состоит в том, что давление сжатого газа на поршень (слева) должно быть равно среднему давлению жидкости (справа), которое в случае прямоугольной площадки равно давлению на половине высоты:

$$p = p_0 + \rho g\frac{h}{2} .$$

Из уравнения состояния идеального газа при постоянной температуре (закон Бойля–Мариотта)

$$p_0V_0 = \left(p_0 + \rho g\frac{h}{2}\right)\left(2V_0 - V\right) ,$$

где $V_0 = bhL$, V – искомый объем жидкости, получим

$$V = V_0\frac{p_0 + \rho gh}{p_0 + (\rho gh/2)} = bhL\frac{p_0 + \rho gh}{p_0 + (\rho gh/2)} .$$

Если справа и слева от вертикального поршня находятся газы, то условием его равновесия будет равенство давлений этих газов.

Задача 6. *Теплоизолирующий поршень делит горизонтальный сосуд на две равные части, содержащие газ при температуре* $t = 7\,^\circ\mathrm{C}$. *Длина каждой части* $l = 30$ *см. Когда одну часть сосуда нагрели, поршень сместился на* $\Delta l = 2$ *см. На сколько градусов нагрели газ? Температура газа в другой части сосуда не изменилась.*

Решение. Обозначим начальное давление в сосуде p, конечное p'. Запишем уравнение состояния идеального газа (объединенный газовый закон) для каждой части сосуда:

$$\frac{pSl}{T} = \frac{p'S\left(l + \Delta l\right)}{T_1} ,$$

$$\frac{pSl}{T} = \frac{p'S\left(l - \Delta l\right)}{T_2} .$$

Приравняв правые части этих уравнений и учтя, что $T_2 = T$, получим

$$T_1 = T\frac{l + \Delta l}{l - \Delta l} = 320 \text{ К} ,\quad \Delta T_1 = 40 \text{ К} .$$

В следующей задаче сосуд разделен на части полупроницаемой перегородкой, пропускающей молекулы только одного компонента смеси. Условие равновесия в этом случае состоит в равенстве парциальных давлений этого компонента по разные стороны от перегородки. Если температуры одинаковы, то равны не только давления, но и концентрации этого компонента.

Задача 7 (олимпиада «Ломоносов-2011»). *Герметично закрытый цилиндрический сосуд, одна из стенок которого является прозрачной, разделен на три отсека неподвижной пористой перегородкой и подвижным поршнем, способным перемещаться без трения (рис.3). В начальном равновесном состоянии объемы всех отсеков равны и в каждом из них находится одинаковое количество одного и того же идеального газа. Через прозрачный торец левый отсек сосуда начинают облучать лазерным излучением, которое переводит часть атомов в возбужденное состояние. Возбужденные атомы могут излучать кванты и переходить в основное состояние. Через некоторое время газ переходит в новое равновесное состояние, в котором относительная доля возбужденных атомов в левом отсеке равна q (q < 1). Поскольку пористая перегородка проницаема для невозбужденных атомов и непроницаема для возбужденных, давление в отсеках изменяется и поршень занимает новое положение. Найдите отношение нового объема среднего отсека к его первоначальному значению, если температура газа поддерживается постоянной.*

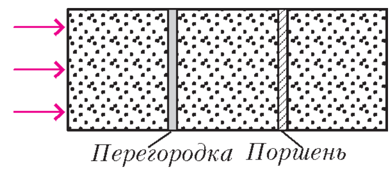


Рис. 3

Решение. Обозначим первоначальные объемы отсеков V, первоначальные количества вещества в них ν, новый объем среднего отсека V_2, новое количество вещества в нем ν_2. Приравняем давления невозбужденных атомов на перегородку и давления газов на поршень:

$$\frac{\left(1 - q\right)\left(2\nu - \nu_2\right)RT}{V} = \frac{\nu_2RT}{V_2} ,$$

$$\frac{\nu_2RT}{V_2} = \frac{\nu RT}{2V - V_2} .$$

Введя для удобства безразмерные переменные $x = \nu_2/\nu$, $y = V_2/V$, получим

$$\left(1 - q\right)\left(2 - x\right) = \frac{x}{y} ,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2 - y} .$$

Исключая x, найдем

$$y = \frac{3 - 4q}{3 - 3q} .$$

При $q = 3/4$ объем среднего отсека обращается в ноль (поршень прижался к перегородке). При $q > 3/4$ поршень остается прижатым к перегородке (полученный выше ответ теряет смысл).

В следующих задачах горизонтальный поршень делит на части вертикальный сосуд. Если поршень массивный, то давление под поршнем больше, чем над ним.

Задача 8. *Газ находится в вертикальном цилиндре под поршнем массой $m_п = 5$ кг. Какой массы груз надо положить на поршень, чтобы он остался в прежнем положении, когда абсолютная температура газа будет увеличена вдвое? Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа, площадь поршня $S = 0{,}001$ м^2.*

Решение. Из уравнения состояния идеального газа при постоянном объеме (закон Шарля) получим

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2 .$$

Обозначим массу груза m и запишем условие равновесия поршня в начальном и конечном состояниях:

$$p_1S - p_0S = m_п g ,$$

$$p_2S - p_0S = (m_п + m) g .$$

Если вычесть эти уравнения друг из друга, получим

$$(p_2 - p_1) S = mg .$$

Это уравнение можно написать сразу – в нем приравниваются добавки к силам, направленным вверх и вниз. Окончательно получаем

$$m = \frac{(p_2 - p_1) S}{g} = \frac{(2p_1 - p_1) S}{g} = m_п + \frac{p_0S}{g} = 15 \text{ кг} .$$

В следующей задаче поршень только вначале находится в равновесии, а затем движется с ускорением.

Задача 9. *Воздух находится в вертикальном цилиндре под поршнем массой $m = 20{,}2$ кг и сечением $S = 20$ см^2. После того как цилиндр стали перемещать вертикально вверх с ускорением $a = 5$ м/с^2, высота столба воздуха в цилиндре уменьшилась на 20%. Считая температуру постоянной, найдите атмосферное давление.*

Решение. Запишем второй закон Ньютона для поршня в начальном и конечном состояниях:

$$p_1S - p_0S - mg = 0,$$

$$p_2S - p_0S - mg = ma.$$

Из уравнения состояния идеального газа при постоянной температуре (закон Бойля–Мариотта)

$$p_1V = p_2 (\alpha V)$$

находим

$$p_2 = \frac{1}{\alpha} p_1 ,$$

где $\alpha = 0{,}8$. Подставляя сюда p_1 и p_2 из второго закона Ньютона, получаем уравнение относительно p_0:

$$p_0S + mg + ma = \frac{1}{\alpha}(p_0S + mg) ,$$

откуда

$$p_0 = \frac{m}{S}\left(\frac{a\alpha}{1-\alpha} - g\right) = 101 \text{ кПа} .$$

В следующих задачах происходит изменение состояния газа как под поршнем, так и над поршнем.

Задача 10. *Вертикальный цилиндр делится на две части тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения. Под поршнем находится в три раза больше газа, чем над поршнем. При температуре $T_1 = 300$ К поршень делит сосуд пополам. Во сколько раз объем газа под поршнем будет больше, чем над поршнем, при температуре $T_2 = 800$ К?*

Решение. Как в начальном, так и в конечном состоянии условие равновесия поршня имеет один и тот же вид:

$$(p_1 - p_2) S = mg ,$$

$$(p_1' - p_2') S = mg .$$

Приравнивая левые части уравнений, находим

$$p_1 - p_2 = p_1' - p_2' .$$

Обозначая нижний объем в конечном состоянии xV, а верхний $(1-x)V$, из уравнения Менделеева–Клапейрона получаем

$$\frac{3\nu RT_1}{V/2} - \frac{\nu RT_1}{V/2} = \frac{3\nu RT_2}{xV} - \frac{\nu RT_2}{(1-x)V} .$$

После преобразований приходим к квадратному уравнению

$$x^2 - \frac{11}{3}x + 2 = 0$$

и выбираем корень, меньший единицы: $x = 2/3$. Таким образом, объем под поршнем будет больше, чем над поршнем, в $x/(1-x) = 2$ раза.

Задача 11 (НГУ, 2009). *Поршень массой M, перекрывающий стакан сечением S, находится на расстоянии l от дна стакана (рис.4). Когда стакан перевернули, поршень остановился на расстоянии L от дна. Определите внешнее давление воздуха, если температура газа в стакане постоянна.*

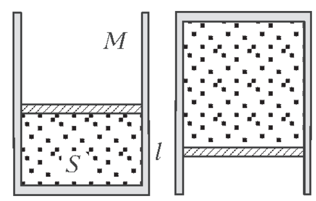


Рис. 4

Решение. Запишем условие равновесия поршня в начальном и конечном состояниях:

$$p_1S - p_0S = Mg,$$

$$p_0S - p_2S = Mg$$

и условие постоянства температуры:

$$p_1 (lS) = p_2 (LS) .$$

Выражая p_1S и p_2S из первых двух уравнений и подставляя в третье, найдем искомое внешнее давление:

$$p_0 = \frac{Mg}{S}\frac{L+l}{L-l} .$$

В следующей задаче положение поршня определяется не только силой тяжести и давлением газа, но и силой упругости пружины.

Задача 12. *Вертикальный цилиндр сечением S перекрывается тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения (рис.5). Поршень подвешен на пружине жесткостью k. В начальном состоянии давление газа p_1, температура T_1, поршень расположен на высоте h_1 над дном сосуда. На какой высоте h_2 установится поршень при температуре T_2?*

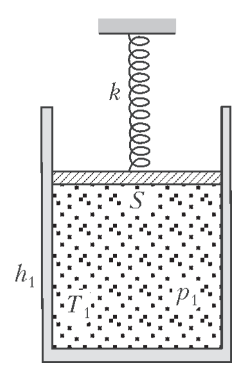


Рис. 5

Решение. Запишем условие равновесия поршня в начальном и конечном состояниях:

$$p_1S + kx_1 - mg - p_0S = 0,$$

$$p_2S + kx_2 - mg - p_0S = 0$$

(деформация x считается положительной при растяжении). Вычитая уравнения и учитывая, что $x_2 - x_1 = h_1 - h_2$, получаем

$$(p_2 - p_1)S = k(h_2 - h_1).$$

Выражая p_2 из объединенного газового закона

$$\frac{p_1(Sh_1)}{T_1} = \frac{p_2(Sh_2)}{T_2},$$

приходим к квадратному уравнению

$$h_2^2 - h_2\left(h_1 - \frac{p_1S}{k}\right) - h_1\frac{p_1S}{k}\frac{T_2}{T_1} = 0$$

и оставляем положительный корень

$$h_2 = \frac{h_1}{2} - \frac{p_1S}{2k} + \sqrt{\left(\frac{h_1}{2} - \frac{p_1S}{2k}\right)^2 + h_1\frac{p_1S}{k}\frac{T_2}{T_1}}.$$

А теперь такая задача.

Задача 13. *Найдите период малых колебаний поршня массой m, разделяющего гладкий цилиндрический сосуд сечением S на две части длиной l каждая. По обе стороны от поршня находится идеальный одноатомный газ при давлении p_0. Считайте, что при колебаниях температура не меняется. Как изменится ответ, если пренебречь теплообменом?*

Решение. Если температура постоянна, то при смещении поршня для каждой половины цилиндра $pV = \text{const}$, т.е.

$$(p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V) = p_0V_0.$$

Отсюда, пренебрегая величиной $\Delta p\Delta V$, получим

$$\Delta pV_0 = -\Delta Vp_0.$$

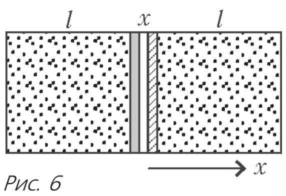


Рис. 6

Поскольку $\Delta p = \Delta F_x/S$ и $\Delta V = Sx$, где x – малое смещение поршня (рис.6), то

$$\Delta F_x = -\frac{p_0S^2}{V_0}x = -\frac{p_0S}{l}x.$$

Полная возвращающая сила, действующая со стороны обоих газов, равна

$$F_x = -\frac{2p_0S}{l}x.$$

Отсюда находим период малых колебаний поршня:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2p_0S}}.$$

Видно, что ответ верен для любого идеального газа. Однако в действительности приближение постоянства температуры выполняется плохо (только при очень медленных колебаниях). В этом случае из первого начала термодинамики следует $0 = \Delta U + A$. Поскольку внутренняя энергия однотомного идеального газа равна $U = \frac{3}{2}pV$, то $\Delta U = \frac{3}{2}p_0\Delta V + \frac{3}{2}V_0\Delta p$, а работа газа равна $A = p_0\Delta V$. Отсюда получаем

$$0 = \frac{5}{2}p_0\Delta V + \frac{3}{2}V_0\Delta p, \text{ или } \Delta pV_0 = -\frac{5}{3}\Delta Vp_0.$$

После преобразований находим период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3ml}{10p_0S}}.$$

Применениям термодинамических методов в задачах с поршнями будет посвящено продолжение статьи.

Упражнения

1. Горизонтальный сосуд длиной 85 см разделен на две части тонкой перегородкой, которая может двигаться без трения. В левой части сосуда находится водород, в правой – такая же масса кислорода. Найдите длину левой части сосуда. Молярная масса водорода 2 кг/кмоль, кислорода 32 кг/кмоль. Температуры газов одинаковы.

2. Теплоизолирующий поршень делит горизонтальный сосуд на две равные части, содержащие газ при температуре 5 °С. Длина каждой части 144 мм. Одну часть сосуда нагрели на 18 °С, а другую – на 2 °С. На какое расстояние сместился поршень?

3. В цилиндре под поршнем находится газ. Чтобы поршень оставался в неизменном положении при увеличении абсолютной температуры газа в 2 раза, на него следует положить груз массой 10 кг. Площадь поршня 10 см^2. Найдите первоначальное давление газа.

4. Газ находится в цилиндре под поршнем и занимает объем 240 см^3 при давлении 10^5 Па. Какую силу надо приложить перпендикулярно плоскости поршня, чтобы сдвинуть его на 2 см, уменьшив объем газа? Площадь поршня 24 см^2.

5 (ЕГЭ). Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд высотой 50 см разделен подвижным поршнем весом 110 Н на две части, в каждой из которых содержится одинаковое количество идеального газа при температуре 361 К. Сколько молей газа находится в каждой части цилиндра, если поршень располагается на высоте 20 см от дна сосуда? Толщиной поршня пренебречь.

6. Газ находится в высоком цилиндре под тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения. Площадь поршня 30 см^2. Когда цилиндр перевернули открытым концом вниз, объем газа увеличился в 3 раза. Чему равна масса поршня? Атмосферное давление 100 кПа.

7. В вертикальном цилиндре находится 1 моль идеального газа. Газ отделен от атмосферы поршнем, соединенным с дном пружиной жесткостью 20 кН/м. При температуре 300 К поршень расположен на расстоянии 0,2 м от дна цилиндра. До какой температуры надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты 0,3 м?

(Продолжение следует)

Задача из журнала «Квантик»

(подробнее об этом журнале см. на с.38)

С какой стороны руль у этой машины?

XX Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии МГУ имени М.В.Ломоносова, Института педагогических исследований одаренности РАО (г. Новосибирск) и при поддержке Фонда некоммерческих программ «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «КМ – Образование», «Физикон», «1С», Издательского Дома «Первое сентября» и журналов «Квант», «Потенциал» провел юбилейную, XX Международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила с 9 по 16 октября 2011 года на острове Крит (Греция). На олимпиаду приехали участники из разных регионов России и Казахстана. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. В девятый раз участвовали в олимпиаде школьники, интересующиеся экологией и биологией, соревнуясь в командном туре по истории научных идей и открытий и в индивидуальных турах по биологии и экологии. Историки и культурологи, педагоги и психологи собрались на свою научную сессию в третий раз.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2011» по фундаментальным наукам в командном зачете стала команда лицея «Классический» из Ростова-на-Дону (Россия). Ей был вручен главный приз соревнований – Суперкубок. Команда была также лучшей в туре по математике, а по истории научных идей и открытий и по физике – была призером. Второе место в общем зачете заняла команда НИШ (Назарбаев Интеллектуальная Школа) города Семей (Казахстан). Она также заняла первое место по истории научных идей и открытий, второе место по математике и третье по физике. Команде был вручен большой кубок за второе место в общем зачете и соответствующие дипломы за успехи в командных соревнованиях. На третье место вышла команда лицея 2 города Альметьевска (Россия). Она также заняла первое место по физике. Ей был вручен кубок и диплом.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стал Андрей Седунов, ученик 11 класса лицея «Классический» из Ростова-на-Дону. Ему были вручены большая золотая медаль и малая золотая медаль за первое место по физике. Вторым призером в общем зачете стал Ернияз Нургабылов, ученик НИШ из города Талдыкорган (Казахстан), ему была вручена большая серебряная медаль и малая золотая медаль за первое место по математике. Большую бронзовую медаль в общем зачете завоевал Куаныш Кабиден, представляющий НИШ города Семей (Казахстан). Леонид Игропуло (г.Ставрополь, Россия) получил малую серебряную медаль за второе место по физике, Антон Семенистый (Ростов-на-Дону) был награжден за третье место по физике малой бронзовой медалью. Темирлан Сатылханов (Талдыкорган) получил малую серебряную медаль за второе место по математике, Гульжан Туменбаева (Семей) была награждена малой бронзовой медалью за третье место по математике.

Все победители и призеры получили подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный Интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XXI Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2012 года в Греции.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Россия, Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail:gluon@yandex.ru (см.также сайт www.gluon.ru)

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Числа $\frac{1}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}$ – члены некоторой арифметической прогрессии. Найдите наибольшую возможную разность этой прогрессии.

2. В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE. Известно, что $\angle BEA = 45^\circ$. Найдите $\angle EHC$.

3. Существуют ли действительные числа a, b, c такие, что ни одно из уравнений

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$
$$bx^2 + 2cx + a = 0,$$
$$cx^2 + 2ax + b = 0$$

не имеет действительных решений?

4. Существует ли число, делящееся на 2011, сумма цифр десятичной записи которого равна 2011?

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL; O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных около треугольников ABL и ACL; O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите площадь треугольника OO_1O_2, если известно, что $O_1O_2 = d$, $\angle BAC = \alpha$.

6. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$.

7. Найдите наибольшее возможное количество участников олимпиады, если известно, что каждый из них знаком ровно с 9 другими участниками, а среди любых 11 участников найдутся по крайней мере двое знакомых.

Физика

1. На дне глубокого узкого каньона, в верхней части шириной несколько метров, расположился отряд персов, желающих скрытно подойти к греческому войску. Греки, расположенные на высоком плоскогорье, имеют катапульту, способную метать снаряды массой m = 25 кг (примерно 1 талант) под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью v_0 = 40 м/с. На каком расстоянии l от края каньона необходимо поместить катапульту, чтобы поразить неприятеля на дне каньона?

Примечание. Сила сопротивления движению снаряда пропорциональна скорости: $\vec{F} = k\vec{v}$, где $k = 4\ \text{Н}\cdot\text{с/м}$; если снаряд попадет в стенку каньона, то он рассыплется на мелкие осколки и не даст ожидаемого результата.

2. К $\nu = 4$ моль одноатомного идеального газа, находящегося при температуре $t = 27\ ^\circ\text{C}$ (эта температура соответствует состоянию с параметрами p_0 и V_0), подвели некоторое количество теплоты. При этом давление и объем газа изменялись с течением времени в соответствии с графиками, приведенными на рисунках 1 и 2. Определите количество

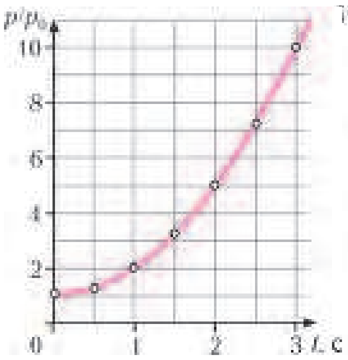


Рис. 1

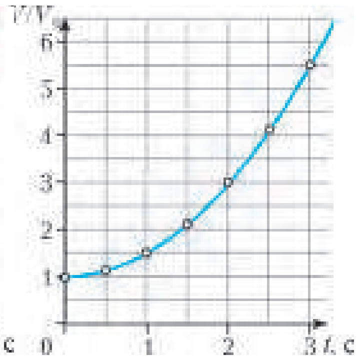


Рис. 2

теплоты Q, полученное идеальным газом за первые две секунды.

3. Нерелятивистская заряженная частица пролетает электрическое поле цилиндрического конденсатора и попадает в поперечное однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (рис.3). В конденсаторе частица движется по дуге окружности радиусом r_0, а в магнитном поле – по полуокружности того же радиуса. Разность потенциалов на конденсаторе U, радиусы обкладок a и $a + d$, причем $d \ll a$. Найдите скорость частицы v и ее удельный заряд q/m.

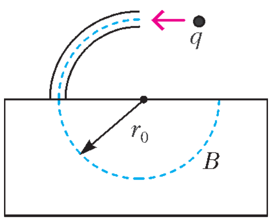


Рис. 3

4. Космический корабль, представляющий собой цилиндр небольшой длины и имеющий площадь поперечного сечения S, движется вдали от тяготеющих тел со скоростью u. Вектор скорости направлен вдоль оси цилиндра, масса корабля M_0. Корабль влетает в пылевой слой толщиной L и плотностью ρ. При движении в этом слое корабль испытывает неупругие соударения с частицами пыли. Определите скорость корабля v при выходе его из пылевого слоя и время τ его движения в этом слое.

5. Катер, который движется по озеру со скоростью v, с помощью фала тащит за собой спортсмена на водных лыжах (рис.4). Вектор скорости v составляет с фалом угол α, а вектор скорости u лыжника с тем же фалом составляет угол β. Найдите скорость лыжника u. Может ли эта скорость быть больше скорости катера?

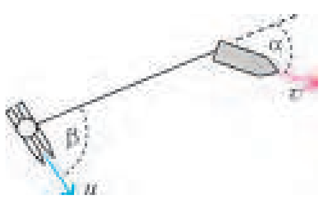


Рис. 4

6. Докажите, что формула тонкой собирающей линзы может быть представлена в виде $x_1x_2 = F^2$, где x_1 – расстояние от предмета, находящегося слева от линзы, до левой фокальной плоскости, x_2 – расстояние от правой фокальной плоскости до изображения, F – фокусное расстояние собирающей линзы.

7. Экспериментатор Глюк решил повторить исследования Гей-Люссака для идеального газа, только более качественно. Для этих целей он взял цилиндр большого объема, охладил его до температуры 200 К, вставил поршень, который мог двигаться практически без трения, обеспечил постоянное давление и провел измерения. По полученным результатам он построил график (рис.5). Полученная зависимость мало

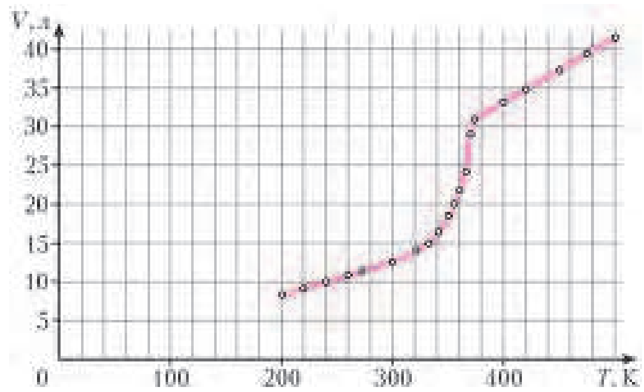


Рис. 5

напоминала результаты Гей-Люссака. Глюк понял свою ошибку – он вставил поршень в цилиндр при 200 К и, очевидно, на дне цилиндра было некоторое количества льда. Определите, сколько льда оказалось в цилиндре у Глюка, если давление в опыте было равно $2 \cdot 10^5$ Па.

Устный командный тур

Математика

1. Чему равна сумма $\frac{1}{7} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \ldots + \frac{1}{2005 \cdot 2011}$?

2. Найдите все трехзначные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой сотен и цифрой десятков в десятичной записи такого числа вставить 0.

3. Семь грибников собрали вместе 100 грибов. Обязательно ли найдутся три грибника, собравшие вместе не менее 50 грибов, если:

а) каждый из семерых собрал разное количество грибов;

б) среди грибников могут быть собравшие одинаковое количество грибов?

4. Является ли число $2001 \cdot 2021 + 100$ простым?

5. На стороне AB треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ с центром O так, что точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB. Найдите OC, если $AB = c$, а $\angle ACB = 135^\circ$.

6. Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите расстояние от точки пересечения медиан этого треугольника до центра вписанной в него окружности.

7. Вставьте в заготовку $2 * 3 * 9$ вместо значков «$*$» цифры так, чтобы получилось пятизначное число, являющееся точным кубом.

8. Решите уравнение $f\left(f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\right) = 0$, где $f(x) = x^2 + 12x + 30$.

9. Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} + \frac{c}{x-c} = 0,$$

где числа a, b и c различны и не равны 0?

10. С помощью линейки, на которой есть два деления на расстоянии 1 друг от друга, восставьте какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой.

11. На нижней горизонтали шахматной доски стоят 8 белых фишек, а на верхней – 8 черных (по одной на каждой клетке). Два игрока по очереди двигают фишки по вертикали на любое свободное число клеток, но нельзя снимать фишки с доски и перепрыгивать через фишку противника. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Можно ли утверждать, что существует стратегия, при которой какой-либо из игроков обязательно выиграет, и как он должен для этого играть?

Физика

1. Как двум участникам марафона преодолеть глубокую расщелину в греческих горах, если в их распоряжении есть только две легкие, но прочные доски, длина каждой из которых немного меньше ширины расщелины?

2. В различных сказаниях часто капризные принцессы, а то и сами короли просят приготовить им горячее мороженое. Возможно ли приготовить горячее мороженое и съесть его?

3. Капельки тумана могут оставаться жидкими и при температуре $-30\ ^\circ\mathrm{C}$. Почему?

4. Мотоциклист, движущейся по городу со скоростью $v_0 = 20$ м/с, выезжает из города и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 5$ см/с^2. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне уверенного приема по сотовой связи, если оператор гарантирует качественное покрытие связью на расстоянии не далее чем 32 км от города. Какова скорость мотоциклиста в этот момент?

5. Один из участников олимпиады заблудился в лесу. Стемнело. Вдруг он обо что-то споткнулся. При свете спички он увидел водопроводную трубу. Как он может определить, в какую сторону течет вода по трубе?

6. В солнечный день вблизи экватора в 10 часов утра местного времени диаметр тени шара, лежащего на земле, был равен 70 см. Известно, что ровно в полдень солнце оказывается в зените. Считая, что солнце двигается по небу по дуге окружности, определите радиус шара и длину тени, отбрасываемой шаром в 15 часов.

7. Воду вскипятили в колбе, колбу закупорили и перевернули. Если теперь на дно колбы положить немного снега или облить ее холодной водой, то вода в колбе закипит. Как это объяснить?

8. Если шар, опущенный в воду, тянут вверх с силой F, то он остается на $1/5$ своего объема погруженным в воду, если с такой же силой давят на шар вниз, то он погружен в воду полностью. Чему равна плотность шара?

9. Будет ли происходить смена дня и ночи на Земле, если она перестанет вращаться вокруг своей оси?

10. Как с помощью одного секундомера можно (в некоторых случаях) оценить длину молнии по продолжительности грома?

История научных идей и открытий

Математика

1. Приведем надпись на могильном камне известного древнегреческого математика Диофанта (предположительно III век н.э.):

«Здесь погребен Диофант, и камень могильный расскажет, сколь долог был век его жизни. Часть шестую ее составляло прекрасное детство, двенадцатой части равна его светлая юность. Еще часть седьмая прошла – браком себя сочетал. Пять лет прошло – и послал Гименей ему сына, коему рок половину лишь жизни прекрасной дал по сравнению с отцом. И в печали глубокой старец кончину воспринял, четыре лишь года с тех пор прожив, как сына лишился».

Скольких лет жизни достигнув, смерть воспринял Диофант?

2. В 1704 году И.Ньютон опубликовал классификацию кривых третьего порядка, т.е. описал все возможные типы кривых, задаваемых уравнением

$$ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + ex^2 + fy^2 + gxy + hx + ky + l = 0 .$$

По существу, с этой работы Ньютона началась алгебраическая геометрия – важнейшая и бурно развивающаяся область математики.

Выясните, могли ли кривые, показанные на рисунках: а) 6 и б) 7, войти в классификацию Ньютона?

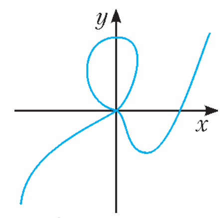


Рис. 6

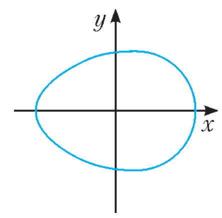


Рис. 7

3. В 1736 году Л.Эйлер решил знаменитую задачу о кенигсбергских мостах. По его словам, он почувствовал, что с этой задачи начинается новая ветвь математической науки, которую позже назвали теорией графов. Сейчас эта теория – важный раздел математики, находящий применение как внутри самой математики, так и в экономике, в расчетах транспортных и других сетей, электрических цепей и даже в химии.

Решите следующую задачу, связанную с одной из важных теорем теории графов.

В стране 10 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Найдите наибольшее возможное количество дорог, если известно, что в этой стране нет трех городов, попарно соединенных дорогами.

4. 26 октября 2011 года исполнилось 200 лет со дня рождения Э.Галуа. Имя этого гениального юноши, совершившего подлинный переворот в математике и погибшего на дуэли 30 марта 1832 года, навсегда вошло в историю науки.

Предлагаем вам задачу, связанную с решенной Галуа проблемой представимости корней многочленов через радикалы.

Пусть α *– корень уравнения* $x^3 - x - 1 = 0$. *Найдите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является:*

а) $\dfrac{1}{\alpha}$; *б)* $\dfrac{1}{\alpha + 1}$; *в)* $\dfrac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1}$.

5. В начале 50-х годов XX века были открыты и изучены замечательные числа, названные по именам первооткрывателей числами Пизо–Виджаярагхавана. Это такие числа, натуральные степени которых близки к целым числам, точнее, если α – число Пизо, то $\alpha^n - \left(\left(\alpha^n\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, где $\left(\left(\alpha^n\right)\right)$ – целое число, ближайшее к α^n.

При изучении чисел Пизо–Виджаярагхавана пришлось решать задачи, аналогичные предлагаемой вам ниже.

Найдите первые 1000 знаков после запятой в десятичной записи числа: а) $\left(6 + \sqrt{37}\right)^{1000}$; *б)* $\left(6 + \sqrt{37}\right)^{1001}$.

Физика

1. Известно, что Нобелевская премия не присуждается дважды одному и тому же ученому в одной и той же области науки. Две Нобелевские премии – по физике и по химии – получила Мария Склодовская-Кюри. Одну – в 1903 году, совместно с Пьером Кюри, за изучение явления спонтанной радиоактивности, открытой Антуаном Анри Беккерелем, другую – в 1911 году за открытие радиоактивных элементов радия и полония и изучение их свойств. Однако одно исключение из общего правила все же существует. Один ученый получил две Нобелевские премии по физике: одну в 1956 году, вторую в 1972 году.

Как звали этого ученого и за что он получил эти премии?

2. 180 лет назад родился великий английский физик. Он работал в различных областях физики, и в каждой из этих областей обязательно найдется результат, названный его именем. Все его достижения значительны, но одно из них связало в единое целое три раздела физики, которые до этого считались обособленными. Ряд предсказаний его теории довольно быстро подтвердились экспериментально, а некоторые стали широко использоваться в технике. Его теория стала фундаментом как для классических разделов физики, так и для ряда новых направлений. Особенностью его взглядов было отрицание необходимости использования векторов в физических соотношениях, поэтому для изложения нескольких дифференциальных уравнений, которые составляют сущность упомянутой теории, ему пришлось написать двухтомный труд.

а) Назовите этого ученого.

б) О какой теории идет речь?

в) Назовите как минимум два эксперимента, подтвердивших предсказания теории.

г) Назовите разделы науки, в которых работал этот ученый, и результаты, носящие его имя.

3. Два древнегреческих ученых – учитель и ученик. Они жили в городе Абдеры в 5 веке до н.э. Были сторонниками идеи множественности существующего. Они утверждали, что элементы существующего разделены пустотой, сами же элементы однородны, непрерывны и неделимы. Ученик сформулировал эту идею как цельную теорию и стал известнее учителя. Ученик много путешествовал и потратил на это деньги, полученные по наследству. В Абдерах растрата наследства преследовалась по закону. На суде ученый прочитал свой труд «Великий миространой», написанный по итогам путешествий. Суд оправдал его, решив, что наследство израсходовано не зря. Он часто уединялся и разговаривал сам с собой. По решению сограждан его обследовал великий Гиппократ, признав здоровым, а странности его отнеся за счет погружения в мудрые мысли.

Назовите этих двух великих древнегреческих ученых.

4. В 1959 году известный физик впервые опубликовал работу, в которой научно доказал, что, с точки зрения фундаментальных законов физики, нет никаких препятствий к тому, чтобы создавать вещи прямо из атомов. В этой работе оценивались перспективы миниатюризации. Основные положения нанотехнологий были намечены в его легендарной лекции «Там внизу – много места», произнесенной им в Калифорнийском технологическом институте.

Кто является автором этих идей и какие его наиболее яркие достижения в физике вам известны?

5. Строение Вселенной интересовало человечество давно. Шла борьба гипотез: Вселенной статической и развивающейся, ограниченной и бесконечной, голографической и множественной… В процессе развития наших знаний появлялись все новые остроумные и смелые предположения, осуществлялись астрономические наблюдения. Недавним решением Нобелевского комитета высокой научной международной награды удостоены результаты астрофизических исследований и гипотеза о существовании новых субстанций. Прямого экспериментального подтверждения пока у этих представлений нет – тем более смелым представляется решение о присуждении Нобелевской премии.

а) За что присуждена Нобелевская премия по физике 2011 года?

б) О каких новых субстанциях идет речь?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, А.Кравцов, В.Крыштоп, Ж.Раббот, Л.Шляпочник

Избранные задачи Санкт-Петербургской олимпиады по математике

После номера каждой задачи указано, в каком классе она предлагалась.

1 (6). Петя и Вася играют в следующую игру. У Пети имеется 100 карточек, на которых по одному разу написаны числа от 1 до 100. Каждым ходом Петя выкладывает на стол две карточки, после чего Вася тут же забирает одну из них. После 50 ходов у Пети карточки закончатся, а на столе останется лежать 50 карточек. Цель Пети – сделать так, чтобы сумма чисел на этих 50 карточках оказалась четной. Может ли Вася ему помешать?

С.Берлов

2 (6). На доске написано число 0. За один ход можно увеличить число на доске на 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9, но так, чтобы результат не делился на 10. Какое наибольшее число может получиться на доске через 100 ходов?

С.Иванов

3 (6). Каждая из 25 девочек дружит с некоторыми из 25 мальчиков. Девочка может «начать новую жизнь»: подружиться со всеми мальчиками, с которыми не дружила до этого, и поссориться со всеми, с которыми дружила. Докажите, что несколько девочек могут начать новую жизнь так, что в результате в этой компании можно будет найти трех мальчиков, у которых количество подружек почти одинаково (т.е. у любых двух из них количество подружек отличается не более чем на 1).

О.Иванова

4 (7). Среди чисел от 1 до 10^{23} каких больше – с двузначной суммой цифр или с трехзначной?

В.Франк

5 (7). Сумма двух наибольших собственных делителей числа n равна 515. Найдите все такие n. (*Собственным делителем* числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа.)

А.Голованов

6 (7). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны BC. Оказалось, что $\angle AMD = 60°$. Точка K лежит в треугольнике CMD и симметрична точке B относительно прямой AM. Докажите, что $KD + MC \geq CD$.

С.Берлов, А.Смирнов и др.

7 (7). В углу квадратной доски 120×120 стоит кубик. Его верхняя грань только что покрашена в красный цвет. Можно ли, кантуя кубик, передвинуть его в соседний угол доски так, чтобы он побывал на каждой клетке по одному разу? Доску пачкать не разрешается.

Н.Косматов

8 (8). Костя выписал на доске 155 последовательных натуральных чисел, после чего все использованные в этой записи единицы заменил на тройки, все тройки – на семерки и все семерки – на единицы. Он утверждает, что на доске вновь оказались 155 последовательных натуральных чисел (в некотором порядке). Докажите, что он ошибается.

К.Кохась

9 (8). Дана арифметическая прогрессия с положительными членами $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2} \geq \frac{n}{a_1 a_n}.$$

А.Храбров

10 (9). В ЕГЭ принимают участие 25 школьников. Экзамен состоит из нескольких вопросов, на каждый из которых можно дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два школьника не более чем на один вопрос ответили одинаково. Докажите, что в ЕГЭ было не больше 6 вопросов.

Фольклор (предложил К.Кноп)

11 (9). В клетках квадрата 100×100 расставлены натуральные числа, причем в каждой строчке и в каждом столбце все числа различны. Может ли оказаться, что для любого квадрата со сторонами, идущими по линиям сетки, сумма чисел в четырех угловых клетках этого квадрата является квадратом натурального числа?

В.Франк

12 (9). На биссектрисе угла B треугольника ABC (внутри треугольника) выбрана точка L, а на отрезке BL выбрана точка K. Известно, что $\angle KAB = \angle LCB = \alpha$. Внутри треугольника выбрана точка P такая, что $AP = PC$ и $\angle APC = 2\angle AKL$. Докажите, что $\angle KPL = 2\alpha$.

С.Берлов

13 (9). У ослика Иа-Иа есть 2012 палочек натуральной длины, сумма их длин равна n. Ослик хочет выломать из них 2012 палочек – длины 1, длины 2, …, длины 2012. (Из одной палочки можно выламывать несколько – например, из палочки длины 6 можно выломать палочки длины 1 и 4.) При каком наименьшем n Иа-Иа заведомо сможет это сделать?

А.Храбров

14 (10). По окружности расставлены несколько ненулевых вещественных чисел. Для любых двух чисел a и b, стоящих рядом, числа $a+b$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ – целые. Докажите, что среди данных чисел есть не более четырех различных.

С.Иванов

15 (10). Натуральное число имеет ровно миллион натуральных делителей (включая единицу и само число). Они выписаны в порядке убывания. Какое наименьшее возможное количество делителей может иметь 250-е число в этом списке?

Ф.Петров

16 (10). На координатной плоскости в первой четверти проведено 100 непересекающихся единичных отрезков, параллельных координатным осям. Эти отрезки – зеркала (с обеих сторон), они отражают свет по правилу «угол падения равен углу отражения». (При попадании в край зеркала луч света не изменяет своего направления.) Из точки, лежащей в единичном круге с центром в начале координат, выпускают луч света в направлении биссектрисы первого координатного угла. Докажите, что эту начальную точку можно выбрать так, чтобы луч отразился от зеркал не более 150 раз.

С.Иванов

17 (11). В основании пирамиды $SABCD$ лежит выпуклый четырехугольник $ABCD$ такой, что $BC \cdot AD = BD \cdot AC$. Оказалось, что $\angle ADS = \angle BDS$ и $\angle ACS = \angle BCS$. Докажите, что плоскость SAB перпендикулярна плоскости основания.

Д.Максимов

18 (11). Некоторые города России соединены с некоторыми городами Украины международными авиалиниями. Межгосударственный совет по содействию миграции собирается ввести на каждой авиалинии одностороннее движение так, чтобы, вылетев из города, в него уже нельзя было вернуться (пользуясь другими односторонними авиалиниями). Докажите, что количество способов сделать это не делится на 3.

Ф.Петров

Публикацию подготовил К.Кохась

ИНФОРМАЦИЯ

ЗАОЧНАЯ ШКОЛА СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра физико-математического и химико-биологического профиля Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) уже более 45 лет работает созданная по инициативе академика М.А.Лаврентьева Заочная физико-математическая школа (ЗШ).

Ежегодно лучшие ученики 9 и 10 классов ЗШ приглашаются в Летнюю школу, которая проводится в Академгородке с 3 по 23 августа, для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели общеобразовательных учреждений могут работать по программам заочной школы СУНЦ НГУ в форме факультативных занятий.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются все желающие, независимо от возраста. Прием в школу ведется круглогодично. Чтобы стать учащимся ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых вы хотите учиться, свою фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой подробный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание выполняется в обычной ученической тетради и высылается простой бандеролью.

Можно присылать работы и по электронной почте. Требования к оформлению работ в электронном виде и более подробную информацию можно найти на сайте http://zfmsh.nsu.ru

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-4066, 339-4066

E-mail: distant@sesc.nsu.ru или zfmsh@yandex.ru

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ НА 2012/13 УЧЕБНЫЙ ГОД[1]

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Математика

5 класс

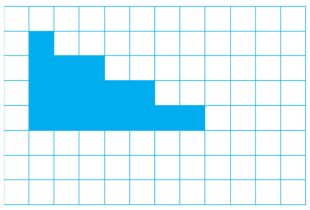


Рис. 1

1. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 1, на две части и, приложив их друг к другу, составьте квадрат.

2. Найдите, сколько всего трехзначных натуральных чисел, в записи которых не встречается цифра 3.

3. Из пунктов *А* и *Б*, расстояние между которыми равно 12 км, одновременно навстречу друг другу с постоянными, но разными скоростями вышли два пешехода. Через 2 часа расстояние между ними в первый раз стало равным 3 км. Через какое время после этого расстояние между пешеходами будет снова равно 3 км?

4. В промежутках между подряд записанными натуральными числами от 1 до 90 включительно ставят либо знак «+», либо знак «−». Может ли получиться выражение, значение которого равно 2012? Ответ нужно обосновать.

5. В некоторой точке на прямой находится «кузнечик». Из каждой точки «кузнечик» может прыгать по прямой в любую сторону на этой прямой на одно из двух расстояний: либо на 14 см, либо на 22 см. На каком наименьшем расстоянии от начальной точки может оказаться «кузнечик», прыгая указанным образом? Ответ нужно обосновать.

6. Найдите наименьшее натуральное число n, которое делится ровно на 12 различных чисел, включая 1 и само n.

6 класс

1. В классе контрольную по математике писали 26 учащихся, и каждый получил одну из оценок «3», «4» или «5». При сложении всех оценок получили число 111. Определите, каких оценок поставлено больше: троек или пятерок и на сколько.

2. Найдите, сколько всего трехзначных натуральных чисел, в записи которых не встречается ни цифра 3, ни цифра 7.

3. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 1, на четыре равные части.

4. Из пунктов *А* и *Б* одновременно навстречу друг другу с постоянными, но разными скоростями вышли два пешехода. Расстояние между ними в 3 км первый раз стало равным через 2 часа, а во второй раз – через 2 часа 30 минут. Найдите расстояние между пунктами *А* и *Б*.

5. В промежутках между подряд записанными натуральными числами от 1 до 950 включительно ставят либо знак «+», либо знак «−». Может ли получиться выражение, значение которого равно 2012? Ответ нужно обосновать.

6. Найдите наибольшее двухзначное число n, которое имеет ровно 6 различных делителей, включая 1 и само n.

7 класс

1. В школе экзамен по математике сдавали 136 учащихся, и каждый получил одну из оценок «3», «4» или «5». При сложении всех оценок получили число 540. Определите, каких оценок поставлено больше: троек или пятерок и на сколько.

2. На плоскости проводится шесть прямых. Найдите, какое наибольшее число точек пересечения может получиться.

3. В выражение $\dfrac{2n+13}{2n-13}$ вместо n подставляются целые числа. Найдите, при каком n значение этого выражения будет наименьшим.

4. Из квадратов со стороной 1 см составляются прямоугольники. Найдите все прямоугольники, у которых периметр, выраженный в сантиметрах, равен площади, выраженной в квадратных сантиметрах.

5. Все натуральные числа, начиная с единицы, выписываются подряд, получается ряд цифр: 1234567891011121314…. Определите, какая цифра стоит на сотом месте.

6. Найдите наименьшее натуральное число n, которое имеет ровно 24 различных делителя, включая 1 и само n.

8 класс

1. Представьте число $\sqrt{737-108\sqrt{2}}$ в виде $a+b\sqrt{2}$, где a, b – некоторые целые числа.

2. В квадрате $ABCD$ точки M на стороне BC и N на стороне CD поставлены так, что $\angle BAM = \angle MAN$. Докажите, что $AN = BM + DN$.

3. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 = 2\left(a^4+b^4+c^4\right)$.

4. Найдите все корни уравнения $|3x+2|+|3x-2| = 4$.

5. В треугольнике ABC точки M на стороне AB, N на стороне BC и K на стороне CA поставлены так, что $AM : MB = BN : NC = CK : KA = 3 : 2$. Докажите, что отношение площади треугольника ABC к площади треугольника MNK не зависит от выбора треугольника ABC, и найдите значение этого отношения.

6. Найдите наибольшее трехзначное число n, которое имеет ровно 12 различных делителей, включая 1 и само n.

9 класс

1. Найдите уравнение четвертой степени с целыми коэффициентами, один из корней которого равен $1+\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

2. В квадрате $ABCD$ на стороне CD выбрана точка N, и после этого на стороне BC поставлена точка M так, что $BM = AN - ND$. Докажите, что $\angle BAM = \angle MAN$.

3. Все натуральные числа, начиная с единицы, выписываются подряд, получается ряд цифр: 1234567891011121314…. Определите, какая цифра стоит на месте с номером 2012.

4. При каждом натуральном n найдите сумму $S(n) = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n!$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки M на стороне AB, N на стороне BC, K на стороне CD и L на стороне DA поставлены так, что $AM : MB = BN : NC = CK : KD = DL : LA = 3 : 2$. Докажите, что отношение площади четырехугольника $MNKL$ к площади четырехугольника $ABCD$ не зависит от выбора четырехугольника $ABCD$, и найдите значение этого отношения.

6. На плоскости произвольно выбирается 6 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что всегда можно соединить пары этих точек тремя отрезками так, что никакие два из этих отрезков не будут пересекаться.

10 класс

1. Найдите все корни уравнения $\sqrt{9+12x+4x^2} + \sqrt{9-12x+4x^2} = 6$.

---

[1] Присылайте решенное задание того класса, в котором вы будете учиться в Заочной школе.

2. Найдите, при каком натуральном значении m выражение $\dfrac{100!}{m!(100-m)!}\cdot 2^m$ принимает наибольшее значение.

3. Из коллектива, в котором 5 женщин и 7 мужчин, случайным образом выбирают двоих. Найдите вероятность того, что будут выбраны один мужчина и одна женщина.

4. В трапеции площади P отношение оснований равно $m:n$, где $m>n$. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в серединах оснований и серединах диагоналей этой трапеции.

5. Разделите прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2 на пять равных треугольников.

6. Известно, что среди 9 монет одна фальшивая. Как с помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету, не зная, фальшивая монета легче или тяжелее настоящей?

11 класс

1. Решите уравнение $x^2+\dfrac{1}{x^2}+14=7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 точки M на ребре AA_1, N на ребре CC_1, K на ребре AD и L на ребре B_1C_1 поставлены так, что $A_1M:MA=CN:NC_1=DK:KA=B_1L:LC_1=1:2$. Найдите угол между прямыми MN и KL.

3. При каждом натуральном n найдите сумму

$$\frac{1+\sqrt{2}+2}{1+\sqrt{2}}+\frac{2+\sqrt{2\cdot 3}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{n+\sqrt{n(n+1)}+(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}.$$

4. Найдите все действительные значения a, при каждом из которых оба числа $\sqrt{a^2+7}$ и $\sqrt{4a^2+9}$ являются целыми.

5. Докажите, что сумма $\cos 19^\circ+\cos 91^\circ+\cos 163^\circ+\cos 235^\circ+\cos 307^\circ$ равна нулю.

6. Докажите, что невозможно получить равносторонний треугольник, если вершины треугольника выбирать в узлах клетчатой бумаги, т.е. в точках пересечения линий сетки.

ФИЗИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Физика

7 класс

1. Решите задачу из учебника А.В.Перышкина для 7 класса (упражнение 3.2): Почему во время снежной метели трудно указать, движется поезд или нет? Опишите ответ подробнее.

2. Измерьте длину своего шага. Пользуясь этой «мерой», определите длину пути, который вы проходите от дома до школы или до автобусной остановки. Оцените погрешность определения пути.

3. Измерьте размеры комнаты, например класса, рулеткой: длину, ширину, высоту. Определите площадь в квадратных метрах и объем в кубических метрах.

4*. Попробуйте оценить ошибку каждого из определяемых выше параметров.

5*. Попытайтесь с помощью обычной линейки измерить толщину листа обычной бумаги.

8 класс

1. Каковы силы, действующие на дно и на стенки квадратного аквариума со стороной дна 20 см и высотой воды 30 см? Плотность воды 1000 кг/м^3. Атмосферное давление не учитывать, так как оно действует с обеих сторон.

2. Кусок железа в воде весит 9,8 Н. Определите его объем. Плотность железа $7{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3.

3. Поезд идет со скоростью 108 км/ч. Пассажир этого поезда, сидящий у окна, видит в течение 18 с встречный поезд, длина которого 900 м. Какова скорость встречного поезда?

4. Скорость движения лодки относительно воды в n раз больше скорости течения реки. Во сколько раз больше времени занимает поездка на лодке между двумя пунктами против течения, чем по течению?

5. Какую работу совершает человек при медленном поднятии груза массой M на высоту H? Какую скорость приобретет тело при падении с этой высоты?

9 класс

1. Часть пути из деревни Простоквашино в город, общей протяженностью 50 км, автомобиль прошел по проселочной дороге со скоростью 30 км/ч, а оставшуюся часть – со скоростью 90 км/ч по шоссе. Определите протяженность дороги от деревни до шоссе, если движение по проселочной дороге заняло 2/3 времени всего пути.

2. На весах стояла чашка, до краев заполненная водой. На сколько и в какую сторону изменились показания весов после того, как в чашку положили брусок массой m, если: а) он имел плотность, составляющую 0,6 от плотности воды; б) он имел плотность, составляющую 1,1 от плотности воды?

3. Имеются полная литровая колба воды с температурой 60 °С, полная литровая колба воды с температурой 0 °С, одна пустая колба объемом 0,5 л и лед при температуре 0 °С. Как сделать так, чтобы вся вода имела температуру 15 °С, и сколько льда для этого понадобится? Удельная теплоемкость воды 4,2 Дж/(г·°С), удельная теплота плавления льда 330 Дж/г.

4. Экспериментатор нашел квадратный кусочек фольги со стороной 10 см. Подключив к противоположным сторонам кусочка электроды и измерив сопротивление, он получил значение 1 Ом (рис. 2,*а*). Затем экспериментатор вырезал из этой фольги спираль с шагом 1 мм так, чтобы максимально использовать фольгу (рис.2,*б*). Каким будет сопротивление между центром и краем спирали?

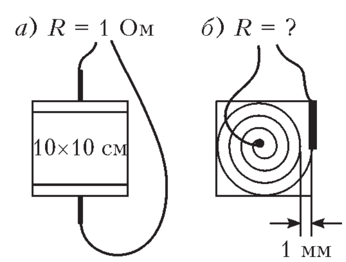


Рис. 2

10 класс

1. Автобус идет по круговому маршруту и делает на нем 6 остановок, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Средняя скорость автобуса на всех участках движения 40 км/ч. Как быстрее добраться от начала маршрута до школы, которая находится на предпоследней остановке, – или доехать на автобусе, или дойти до нее кратчайшим образом пешком, или добежать рысцой? Скорость передвижения бодрым шагом 5 км/ч, бегом – 10 км/ч.

2. С балкона падает мяч. Через время t он ударяется о землю, упруго отскакивает и начинает двигаться вверх. Вслед за ним с того же балкона падает второй мяч. Мячи сталкиваются в воздухе посередине между балконом и землей. Через какое время после первого начал падать второй мяч?

3. Решите задачу 4 для 9 класса.

4. Внутрь цилиндрического сосуда радиусом R вставлена трубка радиусом r (рис.3). В сосуде находится светлая жидкость, высота столба этой жидкости H. В трубке находится столбик темной жидкости высотой h, $h<H$. Трубка

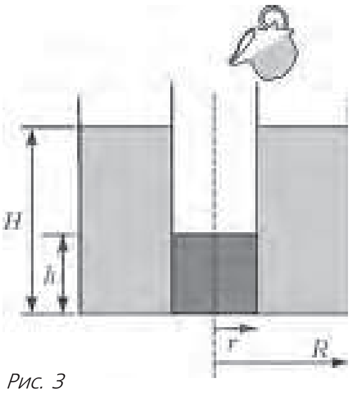


Рис. 3

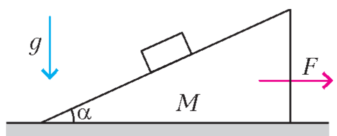


Рис. 4

и дно сосуда неплотно прилегают друг к другу. Какое количество светлой жидкости можно налить в трубку, чтобы темная жидкость была полностью из нее вытеснена?

5. При какой максимальной приложенной к клину силе F брусок еще будет, не отрываясь от клина, скользить по его поверхности (рис.4)? Клин имеет массу M и угол при основании α и находится на столе. Коэффициент трения всех поверхностей равен μ .

11 класс

1. Решите задачу 1 для 10 класса.

2. Через время t после отправления поезда его начало прошло через железнодорожный переезд со скоростью v_1 . Конец поезда прошел через это место со скоростью v_2 . Какова длина поезда, если он все время двигался с постоянным ускорением?

3. Маленький и не до конца надутый шарик, содержащий объем воздуха V, привязали к дну сосуда нитью длиной L. Определите силу натяжения нити после того, как в сосуд до уровня H налили воду. Плотность воды ρ, атмосферное давление $p_а$, масса шарика m.

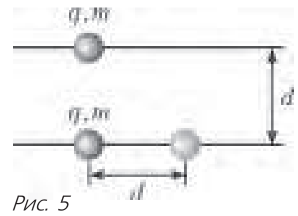


Рис. 5

4. Две одинаковые заряженные бусинки с массой m и зарядом q каждая нанизаны на две параллельные диэлектрические спицы, расположенные на расстоянии d друг от друга (рис.5). Вначале бусинки удерживались друг против друга, затем одну из них отпустили. В момент времени, когда она переместилась на d, отпустили и вторую бусинку. Определите скорости бусинок на большом расстоянии друг от друга.

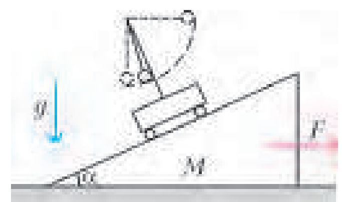


Рис. 6

5. Массивная тележка скользит по наклонной плоскости с углом при основании α, $\alpha > 45°$ (рис.6). На тележке смонтирован легкий маятник. В крайних положениях подвес маятника принимает горизонтальное и вертикальное положения. Определите коэффициент трения между тележкой и наклонной плоскостью.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Может.

Для этого второму игроку достаточно действовать симметрично ходам соперника: ставить такую же фишку, которую только что поставил первый игрок, на противоположный кружочек.

2. Две конфеты.

Пусть к моменту прихода шестого гостя у Винни-Пуха оставалось x конфет. По условию x кратно 5, а $x + 4$ кратно 4. Поэтому x делится также и на 4, а тогда и на 20. Так как из 40 конфет часть была съедена, то $x = 20$. Значит, после прихода шестого гостя придется съесть хотя бы 2 конфеты.

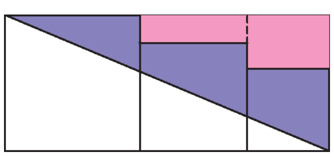


Рис. 1

3. 80 $см^2$.

Достроим лесенку из квадратов до прямоугольника (рис.1). Красная фигура делится на два прямоугольника, поэтому ее площадь равна $2 \times 8 + 4 \times 6 = 40$ $см^2$. А вместе с синей фигурой она составляет половину большого прямоугольника. Значит, площадь синей части равна $\frac{1}{2} \times 24 \times 10 - 40 = 80$ $см^2$.

4. $55°$ или $125°$.

Прежде всего, заметим, что за 20 минут – треть часа – часовая стрелка поворачивается на $\frac{1}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{36}$ полного оборота, т.е. на $10°$. Минутная стрелка за это же время поворачивается на $120°$.

За 20 минут минутная стрелка может обогнать (рис.2,*а*) или не обогнать (рис.2,*б*) часовую стрелку. Зеленым цветом показано

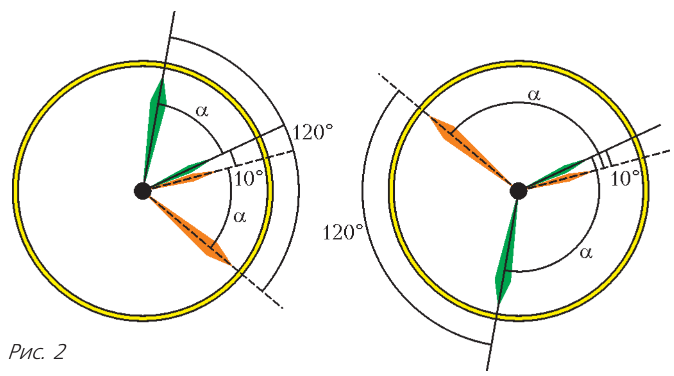


Рис. 2

начальное положение стрелок, оранжевым – окончательное; α – искомый угол. В первом случае получается уравнение $2\alpha + 10° = 120°$, откуда $\alpha = 55°$. Во втором: $2\alpha - 10° + 120° = 360°$, и $\alpha = 125°$.

5. 2 рыцаря.

Если бы каждый ответил, что его соседи – рыцари, то можно было бы сразу определить, что за столом сидят только рыцари. Действительно, знакомый путешественника – рыцарь – сказал правду. Значит, его соседи тоже рыцари и сказали правду и так далее. Получается, что все в этом случае скажут правду, т.е. все – рыцари.

Если бы каждый ответил: «Мои соседи – рыцарь и лжец», то путешественник тоже смог бы разобраться, кто есть кто. Соседи его знакомого – рыцарь и лжец. Тогда у соседа-рыцаря второй сосед – лжец, а у соседа-лжеца (ведь он солгал, и с одной стороны от него сидит рыцарь, знакомый путешественника) второй сосед – рыцарь. Рассуждая так же, можно заключить, что еще двое сидящих за столом – лжец и рыцарь. Значит, в этом случае за столом сидят четыре рыцаря и два лжеца.

Итак, каждый из сидящих за столом ответил: «Оба моих соседа – лжецы». Это возможно в двух неразличимых случаях: 1) за столом по три рыцаря и лжеца, сидящих через одного; 2) за столом два рыцаря и четыре лжеца, сидящих так, что у рыцарей соседи – лжецы, а соседи лжецов – рыцарь и лжец. После того как двое сидящих рядом за столом сказали одно и то же про день рождения, путешественник понял, что оба они – лжецы. Значит, рыцарей всего два.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №1)

11. $\frac{1}{4}$. Рассмотрим цилиндрическую кружку с таким же основанием, но высотой 1. Если ее наполнить водой и наклонить на $45°$, то выльется ровно половина воды. А наша кружка в два раза выше – как будто одна низкая кружка стоит на другой. При наклоне из верхней выльется половина воды, а нижняя все время будет оставаться полной. Значит, из нашей кружки выльется четверть воды.

12. 32. Обозначим одно из двух данных натуральных чисел – делитель – за x. Тогда другое число равно $2012 - x$. Пусть r – остаток от деления. Получается равенство $2012 - x = x^2 + r$, причем $0 \le r \le x - 1$. Перепишем равенство в виде $2012 = x^2 + x + r$. Так как $45^2 = 2025 > 2012$, должно выполняться неравенство $x \le 44$. Но при $x \le 43$ выражение $x^2 + x$ не превосходит 1892, т.е. остаток r должен быть больше 120, что невозможно. Остается единственная возможность: $x = 44, r = 32$.

13. Пусть в школе №1 в 2010 году учились 2 девочки и 2 мальчика, а в 2011 году – 1 девочка и 1 мальчик. Доля мальчиков в обоих случаях не меняется и равна 50%. Пусть в школе №2 в 2010 году учились 1 девочка и 4 мальчика, а в 2011 году – 2 девочки и 8 мальчиков. Доля мальчиков снова не меняется. При этом доля мальчиков в двух школах в 2010 году была $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, а в 2011 году $\frac{9}{12} = \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$. Числа в этом примере не очень похожи на настоящие – по несколько человек учатся разве что в сельских школах. Если их умножить, например, на 100, то пример будет ближе к реальности.

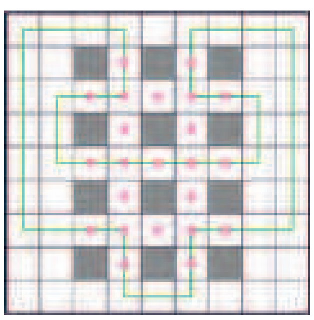


Рис. 3

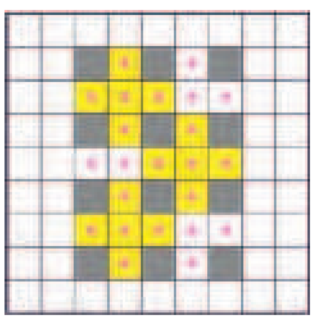


Рис. 4

14. Искомый путь показан на рисунке 3. Он проходит через 17 звездочек.

Осталось доказать, что больше звездочек обойти не получится. Выделим три «креста» из пяти клеток (рис.4). В каждом из них путь может пройти не больше чем по трем клеткам. Поэтому не меньше шести клеток со звездочками точно останутся вне пути.

15. 3000 динариев (25 кг алмазов и 75 кг золота).

Интуитивно понятно (хотя строго доказать это не просто), что оптимальное соотношение алмазов и золота, при котором стоимость наибольшая, существует. Докажем, что при оптимальном наборе драгоценности занимают весь сундук и весят 100 кг. Разберем два случая.

Допустим, вес сундука 100 кг и осталось свободное место. Поскольку 1 кг алмазов стоит дороже 1 кг золота и занимает больший объем, то можно заменить частичку золота на такую же по весу частичку алмазов так, что объем возрастет и стоимость возрастет.

Допустим, свободного места нет, а вес меньше 100 кг. Поскольку сундук золота дороже сундука алмазов и весит больше, то можно заменить частичку алмазов на такую же по объему частичку золота так, что вес увеличится и стоимость возрастет.

Покажем теперь, что есть такой набор драгоценностей, при котором сундук заполнен и весит 100 кг. Пусть мы взяли x кг алмазов и y кг золота, тогда получаем систему уравнений

$$x + y = 100\ (\text{кг}),\quad \frac{x}{40} + \frac{y}{200} = 1\ (\text{сундук}).$$

Система имеет единственное решение: $x = 25$, $y = 75$, откуда находим стоимость: $25 \cdot 60 + 75 \cdot 20 = 3000$ динариев.

Зная ответ, уже легко доказать, что любой другой вариант хуже. Брать золота больше, чем 75 кг, не имеет смысла – тогда алмазов надо будет взять меньше по весу и выручка уменьшится.

Пусть мы взяли меньше 75 кг золота, скажем $(75 - t)$ кг. Тогда, чтобы все влезло в сундук, алмазов мы сможем взять не больше $\left(25 + \frac{t}{5}\right)$ кг (ведь алмазы в 5 раз объемнее). Выручка при этом уменьшится на $20t$ динариев (за счет золота) и увеличится на $60\frac{t}{5} = 12t$ динариев (за счет алмазов), т.е. в итоге уменьшится (на $8t$ динариев).

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Определение разности потенциалов с помощью токовых приборов само основано на законе Ома; следовательно, для его проверки нужен электростатический вольтметр наряду с амперметром обычного типа.

2. Да, можно. Для этого нужен электрометр, корпус которого следует присоединить к одному из полюсов источника напряжения, а стержень с листками – к другому.

3. Например, если в цепи имеется еще одна батарея, причем с большей ЭДС, включенная навстречу первой.

4. Внутри источника ток направлен от отрицательного полюса к положительному.

5. Нулю.

6. Будет уменьшаться.

7. Разность потенциалов между точками через нечетное число элементов равна ЭДС одного элемента, а через четное – нулю.

8. ЭДС «сильного» аккумулятора значительно больше ЭДС «слабого». К «сильному» аккумулятору последовательно подсоединяют очень малое сопротивление, а к «слабому» – очень большое. Вследствие этого уменьшается ток, протекающий через «слабый» аккумулятор, и увеличивается ток, протекающий через лампу.

9. Внутреннее сопротивление идеального источника тока должно быть значительно больше сопротивления нагрузки, а идеального источника напряжения должно стремиться к нулю.

10. Оба амперметра нужно соединить параллельно и включить в цепь. При этом отношение неизвестного сопротивления к известному будет равно обратному отношению показаний амперметров.

11. После размыкания ключа общее сопротивление цепи возрастет, а сила тока уменьшится. При этом падение напряжения на первом амперметре уменьшится, а на втором – увеличится. Поэтому показание амперметра A_1 уменьшится, а амперметра A_2 – увеличится.

12. Приборы не будут испорчены, так как амперметр будет включен последовательно с вольтметром, имеющим большое сопротивление.

13. В силу симметрии подключения (рис.5), через вольтметр V_3 ток не течет, и его показание равно нулю. Тогда, если вольтметр V_5 показывает 10 В, то показания вольтметров 1, 2, 4 и 6 вдвое меньше – 5 В. Если же 10 В – показание одного из вольтметров 1, 2, 4 и 6, то показание вольтметра 5 будет вдвое больше – 20 В.

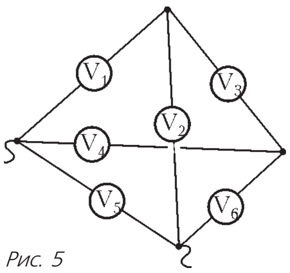


Рис. 5

14. Сумма показаний вольтметров V_1 и V_2 равна напряжению батареи, значит, вольтметр V_2 покажет 3 В. Вольтметры одинаковые, поэтому ток вольтметра V_2 в 1,5 раза больше тока вольтметра V_1, а ток вольтметра V_3 равен половине тока вольтметра V_1. Следовательно, вольтметр V_3 покажет 1 В.

15. Показания первого вольтметра будут увеличиваться, а второго – уменьшаться.

Микроопыт

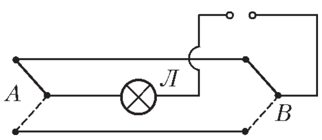


Рис. 6

Можно собрать, например, схему, изображенную на рисунке 6. Здесь *Л* – лампочка, *A* и *B* – концы коридора, в которых установлены выключатели.

РАССТОЯНИЯ НА ПРЯМОЙ И НЕ ТОЛЬКО

Упражнения

1. а) 1,5; б) $(-\infty;0]$. **2.** 200. **3.** а) 0; 3; б) (0; 3); в) $[-1;0]$; г) $(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$; д) решений нет. **4.** В любой точке отрезка, соединяющего пятый и шестой дом. **5.** а) 30; б) 2550. **6.** В деревне *A*. **7.** а) 6; б) 15.

Задачи

1. В точке *C*. **2.** Да, смогут. **3.** 12 этаж.

КОГДА ОРБИТА – ЭЛЛИПС

1. $\Delta t = 4$ сут. **2.** $M = 6\cdot 10^{24}$ кг.

3. $v_{\max} = 54{,}4$ км/с, $v_{\min} = 0{,}93$ км/с. **4.** В 1910 году.

5. $H = 11895$ км, $h = 936$ км.

6. $T = 250$ лет, $v_{\max} = 3650$ км/с.

7. $v_a = \dfrac{2GM - rv^2}{rv}$, $r_a = \dfrac{r^2v^2}{2GM - rv^2}$. **8.** $l_{\max} = 5{,}9\cdot 10^4$ км.

9. $l = a\dfrac{R+h}{R+H}$. **10.** $\Delta v = 2461$ м/с; $T = 4{,}4\cdot 10^4$ с.

«ДЖОКОНДА» КАК ГРАФИК ФУНКЦИИ

См. рис. 7 и 8.

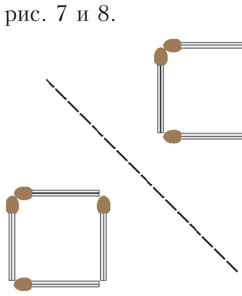


Рис. 7

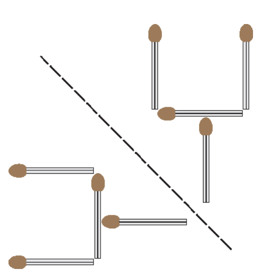


Рис. 8

ЗАДАЧИ С ПОРШНЯМИ И ПЕРЕГОРОДКАМИ

1. $l = 80$ см. **2.** $x = 4$ мм. **3.** $p = 100$ кПа. **4.** $F = 60$ Н.
5. $\nu = 0{,}022$ моль. **6.** $m = 15$ кг. **7.** $T = 522$ К.

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

Для замощения набором из пяти тетрамино по площади «подходят» два прямоугольника – 4×5 и 2×10, но ни один из них замостить невозможно. Докажем это. Раскрасим прямоугольники и фигурки из набора в шахматном порядке (рис.9). Тогда белых и черных клеток будет поровну везде, кроме Т-тетрамино. В ней, в зависимости от раскраски, будет либо три белых клетки и одна черная, либо наоборот. Поэтому замостить прямоугольник не получится. Зато двумя наборами тетрамино можно замостить прямоугольники 4×10 и 5×8 (причем даже не единственным способом). Попробуйте это сделать, а заодно докажите, что прямоугольник 2×20 замостить нельзя.

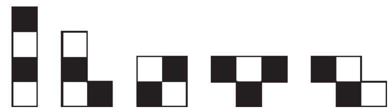


Рис. 9

XX МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. $d = \dfrac{2}{105}$. Пусть *d* – разность данной прогрессии. Тогда из условия следует, что при некоторых натуральных *m* и *n* выполняются равенства

$$\begin{cases}\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}=md,\\[2mm] \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}=nd\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}35md = 2,\\ 15nd = 2\end{cases} \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{3}{7} \Leftrightarrow 7m = 3n.$$

Из последнего равенства получаем, что $m = 3k$, $n = 7k$, где *k* – натуральное число. Очевидно, что наибольшее значение *d* будет при наименьшем возможном значении *k*, т.е. при $k = 1$.

2. $45°$. Отразим вершину *A* симметрично относительно прямой *BE*. Так как *BE* – биссектриса угла *ABC*, то образ точка *A* – точка A_1 лежит на *BC* (рис.10). При этом углы *BEA* и BEA_1 равны, и $EA = EA_1$. Так как угол *BEA* равен $45°$, то

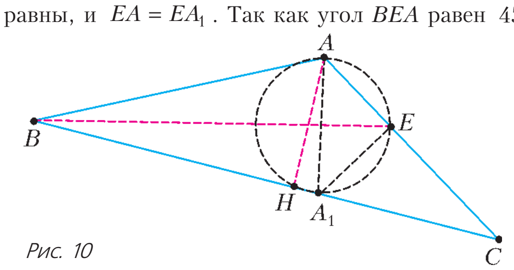


Рис. 10

AEA_1 – равнобедренный прямоугольный треугольник. Следовательно, угол AA_1E равен $45°$.

Так как каждый из углов AHA_1 и AEA_1 равен $90°$, то вокруг четырехугольника AEA_1H можно описать окружность с диаметром AA_1. Для этой окружности углы AA_1E и *AHE* являются вписанными и опирающимися на одну и ту же дугу, откуда следует, что $\angle AHE = \angle AA_1E = 45°$ и $\angle EHC = \angle AHC - \angle AHE = 90° - 45° = 45°$.

3. Не существуют. Предположим, что такие числа нашлись. Тогда одновременно выполняются неравенства

$$\begin{cases}b^2 - ac < 0,\\ c^2 - ab < 0,\\ a^2 - bc < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b^2 < ac,\\ c^2 < ab,\\ a^2 < bc.\end{cases}$$

Перемножив почленно три последних неравенства, приходим к противоречию: $(abc)^2 < (abc)^2$.

4. Существует. Покажем, что найдется такое число d, что 10^d дает остаток 1 при делении на 2011. Действительно, поскольку различных остатков при делении на 2011 всего 2011 (включая 0), среди бесконечного множества пар натуральных чисел найдутся такие пары $(m; n)$, что числа 10^m и 10^n (где $m > n$) дают одинаковые остатки при делении на 2011, но тогда число 10^{m-n} даст при делении на 2011 остаток 1.

Теперь легко построить число, удовлетворяющее условию, – это число $1 + 10^d + 20^{2d} + 10^{3d} + \ldots + 10^{2010d}$ (мы используем тот факт, что, вычисляя остаток от деления суммы чисел на натуральное число a, мы можем заменить эту сумму на сумму остатков от деления слагаемых на число a).

5. $\frac{d^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Поскольку центры описанных окружностей лежат на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольников, точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AL, точки O и O_1 – к стороне AB, точки O и O_2 – к стороне AC.

Стороны углов LAB и O_2O_1O попарно перпендикулярны, значит, эти углы равны (или составляют в сумме $180°$, что в данном случае невозможно). Точно так же равны углы LAC и O_1O_2O. Но AL – биссектриса угла, равного α, поэтому мы пришли к тому, что треугольник O_1O_2O – равнобедренный с основанием d и углом при основании $\frac{\alpha}{2}$.

Поскольку высота такого треугольника, опущенная на основание, равна $\frac{d}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, находим ответ.

6. $\frac{1}{4}$. Обозначим указанную в условии сумму через S. Заметим, что, очевидно, $S \le (x_1 + x_3 + \ldots + x_l)(x_2 + x_4 + \ldots + x_m)$, где l и m – соответственно, последний нечетный и последний четный номера в множестве данных чисел.

Обозначим первый множитель в последнем произведении через a, а второй – через b. Тогда, очевидно,

$$S \le ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Пример, когда этот результат достигается: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$.

7. 100. Решим задачу в общем виде. Пусть количество участников олимпиады n (у нас n надо найти – ясно, что $n \ge 10$), p – количество знакомых у каждого участника олимпиады (у нас $p = 9$), k – наименьшее количество участников, среди которых гарантированно найдутся по крайней мере двое знакомых (у нас $k = 11$).

Изобразим каждого участника олимпиады точкой (получится n точек), а каждую пару точек, изображающих знакомых участников, соединим отрезком (как говорят, построим *граф* участников олимпиады с n вершинами). Подсчитаем число отрезков (число ребер графа). Из каждой из n вершин выходит p ребер, всего получается np ребер, но при этом каждое подсчитано дважды, так что отрезков будет $\frac{np}{2}$.

Пусть d – максимальное количество попарно не знакомых участников (т.е. никакие двое из них не знакомы). Очевидно, что

$$d < k. \qquad (*)$$

Удалим их из рассмотрения вместе с их знакомствами и подсчитаем оставшееся количество знакомств. Оно равно

$$\frac{np}{2} - pd \le \frac{(n-d)(p-1)}{2},$$

поскольку осталось $(n-d)$ участников и $(p-1)$ – максимальное количество знакомых у каждого из них.

Преобразовав полученное неравенство, находим, что

$$n \le (p+1)d. \qquad (**)$$

Из неравенства $(**)$ с помощью $(*)$ получаем окончательную оценку:

$$n \le (p+1)(k-1).$$

Условие нашей задачи дает, что $n \le 100$. Осталось привести пример такой олимпиады.

Рассмотрим группу из 10 участников, в которой каждый знаком с каждым (полный граф с 10 вершинами) – из каждой вершины выходит по 9 ребер, соединяющих каждую вершину с 9 другими. Сделаем еще 9 таких групп. Получится искомый пример из 10 изолированных полных «подграфов» с 10 вершинами, всего 100 вершин, каждая соединена с 9 другими, а среди любых 11 участников не менее двух будут из одной группы.

ФИЗИКА

1. $l \approx \frac{mv_0 \cos\alpha}{k} = 125$ м. *Указание.* Для того чтобы снаряд упал на дно глубокого ущелья, его горизонтальная составляющая при подлете к ущелью должна стать равной нулю – тогда в дальнейшем снаряд будет свободно падать по вертикали.

2. $Q = 25\nu RT \approx 250$ кДж. *Указание.* Легко проверить по точкам данных графиков, что зависимость давления от объема – линейная. Это существенно облегчит расчет работы газа.

3. $v = \frac{Ua}{Br_0d}$, $\frac{q}{m} = \frac{v}{Br_0} = \frac{Ua}{B^2r_0^2d}$. *Указание.* Для определения напряженности электрического поля на траектории движения заряженной частицы в конденсаторе можно воспользоваться теоремой Гаусса.

4. $v = \frac{u}{1 + (\rho LS/M_0)}$, $\tau = \frac{L}{u}\left(1 + \frac{\rho LS}{2M_0}\right)$ (величина, обратная скорости, линейно зависит от пройденного пути).

5. $u = v\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$; $u > v$, если $\cos\alpha > \cos\beta$, т.е. $\beta > \alpha$.

6. *Указание.* Постройте изображение предмета в собирающей линзе, причем рассмотрите случаи действительного и мнимого изображений.

7. $m_{\text{льда}} = 18$ г (т.е. 1 моль). *Указание.* При низких температурах (~ 200 К), когда вода находится в твердом или даже жидком состоянии, давлением водяных паров можно пренебречь. Поэтому первые 4–5 точек графика соответствуют изобарическому расширению идеального газа (воздуха) – прямая *1* на рисунке 11. При высоких температурах (более 380 К) вода превращается в насыщенный пар, который тоже является идеальным газом, поэтому верхние точки графика соответствуют изобарическому процессу смеси водяных паров и воздуха – прямая *2* на рисунке 11.

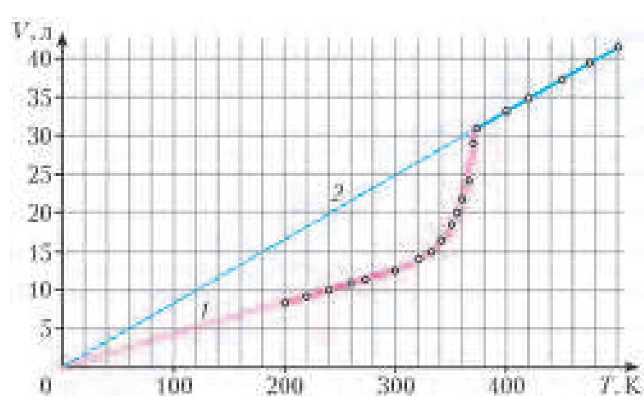


Рис. 11

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. $\frac{335}{2011}$. Преобразуем данную сумму и вычислим ее:

$$\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{19}\right)+\ldots+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2005}-\frac{1}{2011}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2011}\right)=\frac{2010}{6\cdot 2011}=\frac{335}{2011}.$$

2. 225; 450; 675.

Пусть a – цифра сотен искомого числа, а b – двузначное число, образованное двумя его последними цифрами. По условию, $9(100a+b)=1000a+b$, откуда $100a=8b$, т.е. $25a=2b$. Из последнего равенства следует, что a – четное число, а b делится на 25. Перебор приводит к ответу.

3. а) Обязательно; б) не обязательно.

а) Расположим грибников по порядку в соответствии с количеством собранных грибов, начиная с самого маленького числа. Рассмотрим два случая.

Если четвертый собрал более 14 грибов, то последние трое собрали не менее чем 16 + 17 + 18 = 51 гриб.

Если четвертый собрал не более 14 грибов, то доля трех последних в шеренге грибников только увеличится.

б) Приведем пример, когда условия не выполняется. Пусть шестеро грибников набрали по 14 грибов, а седьмой – 16 грибов. Тогда трое набрали, самое большее, $2\times 14+16=44$ гриба.

4. Нет. *Указание.* Данное число равно 2011^2.

5. $\frac{c\sqrt{2}}{2}$. *Указание.* Опишем около квадрата окружность. Поскольку сумма углов ACB и AEB равна $180°$, точка C лежит на этой окружности.

6. $\frac{1}{3}$. Пусть $AB = 5$, $AC = 6$, $BC = 7$; BP и BK – соответственно, медиана и биссектриса, M и I – соответственно, точка пересечения медиан и точка пересечения биссектрис (т.е. центр вписанной окружности) данного треугольника.

По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника, если обозначить отрезок AK через x, получим

$$\frac{AK}{KC}=\frac{AB}{BC},\text{ т.е. }\frac{x}{6-x}=\frac{5}{7}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Итак, K и P делят сторону AC на отрезки $AK=\frac{5}{2}$, $KP=\frac{1}{2}$, $PC = 3$. В треугольнике ABK отрезок AI – биссектриса, так что по той же теореме о биссектрисе $\frac{BI}{IK}=\frac{AB}{AK}=\frac{5}{5/2}=\frac{2}{1}$. Но точно так же делит точка M медиану BP: $\frac{BM}{MP}=\frac{2}{1}$. Поэтому отрезок IM параллелен стороне AC, а треугольники BIM и BKP подобны с коэффициентом $\frac{3}{2}$. Отсюда получаем

$$IM=\frac{2}{3}KP=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

7. 24389. Пусть x – искомое число. Оно начинается с цифры 2, поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$2\cdot 10^4<x<3\cdot 10^4\Leftrightarrow 10\cdot\sqrt[3]{20}<\sqrt[3]{x}<10\cdot\sqrt[3]{30}\Rightarrow 20<\sqrt[3]{x}<31$$

(последнее неравенство верно, так как $31^3 = 29791 > 2*3*9$).

Далее, последняя цифра куба – девятка, это может быть, только если последняя цифра исходного числа равна 9, что легко проверяется перебором кубов нечетных цифр.

Осталось проверить единственного кандидата в ответ – 29.

8. $-6\pm\sqrt[64]{6}$. Поскольку $f(x)=(x+6)^2-6$, имеем

$$f(f(x))=\left((x+6)^2-6+6\right)^2-6=(x+6)^{2^2}-6=(x+6)^4-6,\ \ldots$$

$$\ldots,\ f\left(f\left(f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right)\right)\right)=(x+6)^{2^6}-6=(x+6)^{64}-6.$$

Итак, $(x+6)^{64}-6=0\Leftrightarrow x+6=\pm\sqrt[64]{6}$.

9. Два корня. Приведем уравнение к виду $f(x)=0$, где

$$f(x)=a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b).$$

Тогда после преобразований имеем

$$f(0)f(a)f(b)f(c)=-3a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2<0.$$

Таким образом, мы получили, что квадратный трехчлен принимает значения разных знаков, поэтому он имеет в точности два корня, отличных от a, b и c.

10. Отложим на данной прямой два единичных отрезка AB и BC (точка B – середина отрезка AC). Отложим от точки B под произвольным углом к данной прямой единичный отрезок BD так, чтобы угол ADC был острым. Мы построили прямоугольный треугольник ADC (так как его медиана BD равна половине стороны AC, к которой она проведена).

Точно так же построим прямоугольный треугольник AEC, проведя еще один единичный отрезок BE так, чтобы угол EBA был острым.

Пусть прямые AE и CD пересекаются в точке F, а прямые AD и CE – в точке H, причем первая пара прямых непараллельная, так как каждый из углов A и C треугольника ACF равен 30°, а на второй паре лежат высоты этого треугольника. Итак, H – ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ACF, поэтому прямая FH – перпендикуляр к данной прямой.

11. Выигрывает второй игрок. Разобьем доску на 4 вертикальные полоски 2×8. Поставим перед вторым игроком задачу сохранять симметрию в каждой такой полоске: на сколько первый сдвинул свою фишку на одной вертикали, входящей в k-ю полоску, на столько второй сдвинет свою в противоположном направлении на второй вертикали, входящей в эту полоску.

Таким образом, первый своим ходом будет всегда нарушать эту своеобразную «симметрию», а второй будет ее восстанавливать. Поэтому у него всегда будет возможность сделать ход, а у первого – нет: ведь позиция «ходить некуда» – симметричная, значит, она возникла в результате хода второго игрока.

ФИЗИКА

1. Один из участников становится на край доски так, чтобы второй край выступал за край расщелины. Вторая доска кладется внахлест на первую и на противоположный край расщелины. Другой участник перебирается по доскам через расщелину. Затем участники меняются местами.

2. Горячий лед – это горячая вода, затвердевшая при высоком давлении, свыше 6380 атм. Как известно, с повышением давления температура замерзания воды сначала падает (но только до давления 2200 атм), потом начинает расти (рис.12). При давлении 6380 атм вода замерзает при температуре $0\ °C$, при 16500 атм – при $60\ °C$, а при 20670 атм –

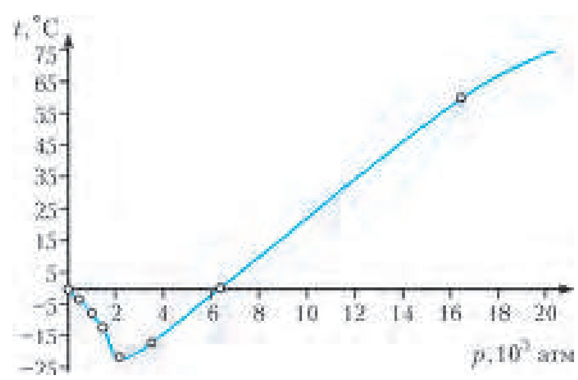


Рис. 12

при $76\ ^\circ C$. В последних двух случаях мы уже имеем горячий лед. Однако при таком давлении человек вряд ли сможет вкусить радость поедания горячего льда.

3. Капельки тумана могут оставаться жидкими при отрицательной температуре, если нет центров конденсации.

4. $t = 800$ с, $v = 60$ м/с = 216 км/ч.

5. Ему нужно развести костер под трубой и нагревать воду в трубе. Ниже по направлению движения жидкости в трубе труба нагреется сильнее.

6. За сутки солнце совершает один полный оборот. Следовательно, за два часа до полудня солнце переместилось на 30° . Это и есть угол падения солнечных лучей в 10 часов утра. Соответственно, в 15 часов (через 3 часа после полудня) угол падения солнечных лучей будет равен 45° . Очевидно, что диаметр шара $2R$, длина тени l и угол падения солнечных лучей α связаны между собой соотношением $2R = l\cos\alpha$. Следовательно, длина тени в 15 часов будет равна

$l_2 = l_1 \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\, l_1 = 85{,}7$ см (где $l_1 = 70$ см), а радиус шара равен $R = \dfrac{l_1 \cos\alpha_1}{2} = 30{,}3$ см .

7. Воздух охладится быстрее, чем вода. Давление воздуха в колбе понизится, и вода в колбе закипит при меньшей температуре.

8. Плотность шара равна 600 кг/м^3 .

9. Будет, но только один раз в год.

10. Продолжительность грома определяет разницу расстояний от наблюдателя до разных точек молнии. При этом некоторым неопределенным параметром является направление молнии – одинаковые длительности грома будут у молний разной длины, но с одной и той же длиной проекции на направление от наблюдателя.

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. Достигнув 84 лет.

Указание. На детство, юность, период до брака и жизнь сына ушла $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{25}{28}$ часть жизни Диофанта.

2. а) Нет. Судя по рисунку в условии, существует прямая, пересекающая данную кривую в четырех точках. Пусть $y = kx + l$ – уравнение этой прямой. Подставив $y = kx + l$ в уравнение кривой, вы получите уравнение третьей степени, имеющее 4 корня.

б) Нет. Кривая третьего порядка не может быть ограниченной: при неограниченном увеличении одной из переменных, x или y, мы получаем кубическое уравнение относительно второй переменной, но кубическое уравнение, как известно, всегда имеет хотя бы одно решение, значит, при любом значении одной из переменных на кривой существует точка с такой абсциссой или ординатой. Соответственно – кривая неограниченна.

3. 25. Предположим, что в стране n городов. Пусть наибольшее количество дорог, равное d, исходит из города A (в d других городов; из некоторых других городов, даже изо всех, также может исходить d дорог, но больше этого количества ни из одного города не выходит). Тогда осталось $(n - d - 1)$ городов, из которых ни одна дорога не ведет в A, поэтому можно оценить общее число D дорог в стране:

$$D \le d + d(n - d - 1) = d(n - d) \le \frac{n^2}{4} .$$

В нашей задаче $n = 10$, что дает оценку $\frac{10^2}{4} = 25$. Приведем пример такой страны.

Пусть из города A выходят 5 дорог – в города B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, а каждый из городов C_1, C_2, C_3, C_4 соединен дорогой с каждым из городов города B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 . Тогда выполнены все условия, и в стране имеются 25 дорог.

4. а) $x^3 + x^2 - 1 = 0$; б) $x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$; в) $x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = 0$.

а) Подставим в данное уравнение $x = \frac{1}{\alpha}$, получим после преобразований $\alpha^3 + \alpha^2 - 1 = 0$.

б) Пусть $\beta = \frac{1}{\alpha + 1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1 - \beta}{\beta}$ – корень исходного уравнения, т.е.

$$\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^3 - \frac{1-\beta}{\beta} - 1 = 0 ,$$

откуда после преобразований получим $\beta^3 - 2\beta^2 - 3\beta + 1 = 0$.

в) Поскольку α – корень данного уравнения, выполняется равенство

$$\alpha^3 - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - 1 = \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1} .$$

Значит, вопрос задачи можно переформулировать так: найти соответствующий многочлен, корнем которого является число $\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{1 - \beta}$. Подставляя эту дробь вместо x в данное уравнение и преобразуя, получим $\beta^3 - 4\beta^2 + 5\beta - 1 = 0$.

5. а) Девятки; б) нули. Вычислив при некотором значении n значение выражения $\left(6 + \sqrt{37}\right)^n$, мы получим, очевидно, выражение $a_n + b_n\sqrt{37}$, где a_n и b_n – целые числа (это легко следует из определения натуральной степени числа и правила перемножения двучленов). Легко видеть также, что, вычислив затем $\left(6 - \sqrt{37}\right)^n$, мы получим выражение $a_n - b_n\sqrt{37}$ с теми же a_n и b_n . Поэтому $\left(6 + \sqrt{37}\right)^n + \left(6 - \sqrt{37}\right)^n = 2a_n$, откуда

$$\left(6 + \sqrt{37}\right)^n = 2a_n - \left(6 - \sqrt{37}\right)^n . \qquad (*)$$

Оценим теперь вычитаемое в правой части равенства $(*)$. Поскольку верно неравенство $\left|6 - \sqrt{37}\right| = \frac{1}{6 + \sqrt{37}} < \frac{1}{10}$, получаем, что $\left|6 - \sqrt{37}\right|^n < \frac{1}{10^n}$.

При четных значениях n вычитаемое в правой части $(*)$, очевидно, положительно, а при нечетных – отрицательно. Поэтому в случае а) в правой части $(*)$ мы фактически от целого числа отнимаем положительное число, меньшее $\frac{1}{10^{1000}}$, поэтому в результате первые 1000 цифр после запятой будут девятки, а в случае б) мы должны прибавить такое число, поэтому первые 1000 знаков после запятой – нули.

ФИЗИКА

1. Это американский физик Джон Бардин. Первую премию он получил за исследование полупроводников и открытие транзисторного эффекта (совместно с У.Шокли и У.Браттейном), а вторую – за создание теории сверхпроводимости (БКШ-теории, совместно с Л. Купером и Д. Шриффером).

2. а) Джеймс Клерк Максвелл. б) Теория электромагнитного поля. в) Опыты Г. Герца по генерации и регистрации электромагнитных волн и опыт П.Н. Лебедева по измерению давления света. г) Статистическая физика: дал статистическое толкование второму началу термодинамики («демон Максвелла»), развил общую теорию переноса, установил закон распределения частиц по скоростям в равновесных системах (распределение Максвелла), установил связь между теплофизическими параметрами (соотношения Максвелла), ввел название «статистическая механика». Электродинамика: создал теорию электромагнитного поля (уравнения Максвелла), которая связала в единое целое электричество, магнетизм и оптику. Физиологическая оптика: установил спектральные характеристики рецепторов цветового зрения человека и построил колориметрическую систему, сконструировал так называемый диск Максвелла. Механика: сформулировал и доказал так называемую теорему Максвелла в теории упругости; показал, что кольца Сатурна состоят из отдельных метеоритов.

3. Левкипп и Демокрит.

4. Выдающийся американский физик-теоретик Ричард Фейнман, создатель современной квантовой электродинамики (Нобелевская премия по физике 1965 года) и графического метода представления решения нелинейных уравнений квантовой теории поля (диаграммы Фейнмана). Развил полуфеноменологическую картину генерации новых частиц в процессе столкновений (масштабная инвариантность). Предложил протонную модель нуклонов. Автор известного курса «Фейнмановские лекции по физики» (в соавторстве с Р.Лейтоном и М.Сэндсом).

5. а) За открытие факта ускоренного расширения Вселенной. б) Речь идет о темной материи и темной энергии.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Вася сможет помешать Пете. Он может ходить так, чтобы к концу игры на столе осталась ровно половина всех имеющихся нечетных чисел, т.е. 25, их сумма будет нечетна. Ходы Пети бывают двух видов: когда на карточках написаны числа одинаковой четности (Вася отвечает произвольно на эти ходы) и когда на одной карточке написано четное число, а на другой – нечетное, причем Петя обязательно сделает четное число ходов второго вида. Вася, отвечая на ходы второго вида, должен поочередно оставлять то четную, то нечетную карточку.

2. Наибольшее число, которое может получиться, – это 889. Заметим, что, когда мы прибавляем к числу 9, последняя цифра числа уменьшается на 1 (кроме случая, когда последняя цифра была равна 0). Следовательно, если последняя цифра числа не 0, то мы не сможем девять раз подряд прибавлять к этому числу 9 (в результате одной из таких операций на конце числа оказался бы 0). Значит, хотя бы один раз из этих девяти нам придется прибавлять не 9, а меньшее число, и тогда в результате за эти 9 операций мы прибавим к числу не более чем $8 \cdot 9 + 8 = 80$. Это означает, что за 99 ходов со второго по сотый число увеличится не более чем на $11 \cdot 80 = 880$. Поэтому написанное через 100 ходов число не превосходит 889. Это число и в самом деле можно получить, конструкцию оставляем читателю.

3. Этими мальчиками могут быть любые три мальчика. Пусть, скажем, это будут Антон, Боря и Ваня. При сравнении числа подружек у мальчиков мы можем не учитывать девочек, которые дружат со всеми мальчиками или не дружат ни с одним из мальчиков. Оставшихся девочек разобьем на три группы – АБ, БВ и АВ. В группе БВ будут девочки, которые дружат с Антоном, но не дружат ни с Ваней, ни с Борей, или наоборот: дружат и с Борей, и с Ваней, но не дружат с Антоном. В группе АВ – девочки, которые дружат с Борей, но не дружат ни с Ваней, ни с Антоном, а также девочки, которые дружат и с Антоном, и с Ваней, но не дружат с Борей. Наконец, в группе АБ – девочки, которые дружат с Ваней, но не дружат ни с Борей, ни с Антоном, а также девочки, которые дружат и с Антоном, и с Борей, но не дружат с Ваней. Ясно, что если девочка начнет новую жизнь, то она останется в своей группе. Попросим девочек начать новую жизнь так, чтобы в каждой группе девочек, которые дружат с одним мальчиком, оказалось либо столько же, сколько девочек, которые дружат с двумя, либо на 1 больше. Проверим, что теперь количество подружек у Антона, Бори и Вани почти одинаково. Например, у Антона и Бори: в группе АБ поровну подружек; в группе АВ у Бори подружек столько же, сколько у Антона, или на 1 больше; в группе БВ, наоборот, у Антона подружек столько же, сколько у Бори, или на 1 больше. Поэтому в сумме число подружек Антона отличается от числа подружек Бори не более чем на 1.

4. Чисел с двузначной суммой цифр меньше, чем с трехзначной. Если в каком-либо разряде десятичной записи числа n стоит цифра a, то в соответствующем разряде числа $m = \underbrace{99\ldots99}_{23\text{ девятки}} - n$ стоит цифра $9 - a$. Поэтому сумма цифр числа m равна $23 \cdot 9 - S(n) = 207 - S(n)$, где $S(n)$ – сумма цифр числа n. Поэтому для каждого числа n с двузначной суммой цифр соответствующее число m имеет трехзначную сумму цифр. С другой стороны, число $m = \underbrace{99\ldots99}_{23\text{ девятки}}$ имеет трехзначную сумму цифр и не соответствует никакому натуральному числу n.

5. Такое n единственно: $n = 618 = 2 \cdot 3 \cdot 103$.

Если два числа в сумме дают 515, то одно из них четно. Таким образом, у числа n есть четный делитель, следовательно, n – четное число. Тогда наибольший собственный делитель числа n равен $n/2$. Обозначим второй собственный делитель через n/d. Очевидно, что 2 и d – наименьшие делители n, поэтому либо $d = 4$, либо d – нечетное простое. По условию задачи выполнено равенство

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{d} = 515, \qquad (*)$$

откуда $n(d+2) = 2d \cdot 515$. Если d четно, то $d = 4$, следовательно, $n = 8 \cdot 515/6$, что не является целым числом. Если же d нечетно, то, поскольку числа $2d$ и $d + 2$ взаимно просты, 515 делится на $d + 2$. Так как $515 = 5 \cdot 103$, то отсюда заключаем, что либо $d + 2 = 5$, либо $d + 2 = 103$, либо $d + 2 = 515$. Подходит только первый случай.

6. В силу симметрии, $KM = MB = MC$. Отсюда по свойству медианы заключаем, что треугольник BKC прямоугольный. Значит, прямые CK и AM параллельны, $\angle MKC = \angle KMA \geq 60°$. Таким образом, в равнобедренном треугольнике MKC $\angle MKC = \angle KCM \geq 60°$, $\angle KMC \leq 60°$. Тогда $MC \geq KC$, так как против большей стороны лежит больший угол. Значит, $KD + MC \geq KD + KC \geq CD$.

7. Да, это возможно. Допустим, что кубик стоял на клетке $a1$ и мы перекатили его на клетку $b1$ (рис.13). Теперь красная грань находится справа, и все, что теперь мы можем сделать, – это перекатить кубик на несколько клеток по вертикали b (красная грань по-прежнему при этом остается справа), а потом сдвинуть его на вертикаль a. Передвижение кубика схематически показано на рисунке, положения кубика красной гранью вверх отмечены жирными точками.

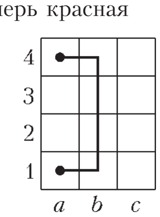


Рис. 13

Ясно, что траектория кубика между двумя соседними положениями красной гранью кверху всегда представляет собой «скобочку» вроде той, что приведена в нашем примере. Таким образом, задачу можно переформулировать так: можно ли построить цепочку «скобочек», которая проходит по всем клеткам доски, начинается в левой нижней угловой клетке, а кончается в левой верхней? Приведем пример такой цепочки (рис. 14). Основным элементом конструкции

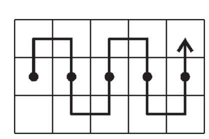


Рис. 14

является следующий зигзагообразный ход кубика, при котором он проходит по всем клеткам горизонтальной полосы ширины 3. Двигаясь этим ходом, мы последовательно проведем кубик по нижней полосе ширины 3, потом по следующей полосе ширины 3, потом еще по следующей и т.д., пока не дойдем до верхней полосы. Размеры доски в условии благоприятствуют этой конструкции: путь как раз закончится в левом верхнем углу. Осталось только описать способы «разворота» кубика с одной полосы на другую, а также начальный и конечный фрагменты пути. Эти фрагменты показаны на рисунке 15, где приведен маршрут кубика на доске 12×12. На большой доске 120×120 интересующие нас участки выглядят аналогично.

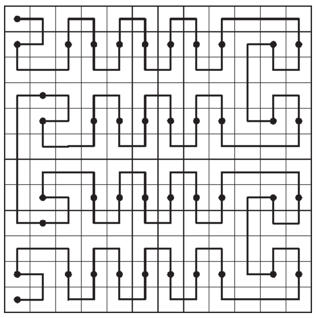


Рис. 15

8. Сумма 155 последовательных чисел делится на 5. Нетрудно проверить, что после сделанных замен цифр сумма чисел перестанет делиться на 5.

9. Заметим, что $a_k d \ge a_1 d = a_1(a_k - a_{k-1})$. Таким образом, $a_1 a_{k-1} \ge a_k(a_1 - d)$. Следовательно,

$$\frac{1}{a_k^2} \ge \frac{a_1 - d}{a_1 a_{k-1} a_k} = \frac{a_{k-1} - (k-1)d}{a_1 a_{k-1} a_k} = \frac{k a_{k-1} - (k-1)a_{k-1} - (k-1)d}{a_1 a_{k-1} a_k} =$$

$$= \frac{k a_{k-1} - (k-1)a_k}{a_1 a_k a_{k-1}} = \frac{k}{a_1 a_k} - \frac{k-1}{a_1 a_{k-1}}.$$

Осталось просуммировать эти неравенства по k от 1 до n.

10. Пусть в ЕГЭ было n вопросов. Если на первый вопрос хотя бы 6 школьников ответили одинаково, то на второй вопрос какие-то два из них также ответили бы одинаково, что противоречит условию. Итак, на каждый вопрос есть 5 вариантов ответа, каждый вариант ответа присутствует не более чем у 5 школьников, и при этом суммарное количество школьников равно 25. Следовательно, на каждый вопрос каждый из вариантов ответа выбрали ровно 5 школьников. Возьмем одного школьника, назовем его Васей. Тогда на каждый из n вопросов тот же вариант ответа, что и Вася, выбрали еще 4 школьника. Если, например, Петя оказался в двух таких четверках, то он с Васей одинаково ответил хотя бы на два вопроса, что невозможно. Поэтому все эти четверки различны, а значит, всего школьников хотя бы $4n + 1$. Но это число должно быть не больше, чем 25. Значит, $n \le 6$. На самом деле эта оценка точная, в экзамене действительно могло быть 6 вопросов. Предлагаем читателю построить пример.

11. Может. Занумеруем клетки квадрата по горизонтали и по вертикали числами от 1 до 100. Поставим в клетку (a, b) число 4^{a+b}. Рассмотрим произвольный квадрат с угловыми клетками (a, b), $(a+k, b)$, $(a, b+k)$ и $(a+k, b+k)$. Сумма чисел, стоящих в этих клетках, равна

$$4^{a+b} + 4^{a+k+b} + 4^{a+b+k} + 4^{a+k+b+k} = 4^{a+b}\left(4^k + 1\right)^2 = \left(2^{a+b}\left(4^k + 1\right)\right)^2.$$

12. Точка P лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC (рис. 16). Пусть этот серединный перпендикуляр пересекает прямую BL в точке D. Тогда $\angle APD = \angle DPC = \angle AKD = \angle DLC$. Таким образом, точка K лежит на описанной окружности треугольника ADP, а точка L – на описанной окружности треугольника CDP, причем упомянутые окружности равны, так как треугольники равны.

Лемма. *Пусть две равные окружности имеют общую хорду DP угловой величины 2φ и пусть проведена секущая DLK. Тогда $\angle LPK = \pi - 2\varphi$.*

Доказательство леммы оставим читателю.

В силу леммы, нам остается проверить, что $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$, где $\alpha = \angle LCB$ – угол из условия задачи, $\varphi = \angle DCP$. Мы просто посчитаем углы. Пусть $A_1 \in BC$ – точка, симметричная вершине A относительно биссектрисы BL (рис.17). Положим $\gamma = \angle LDP$. Тогда $\angle DCL = \angle DCP - \angle LCP = \varphi - \gamma$. Далее, $\angle A_1DC = \angle ADA_1 = 2\angle ADP - 2\angle ADL = 2\gamma$. Отсюда $\angle DCA_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma$.

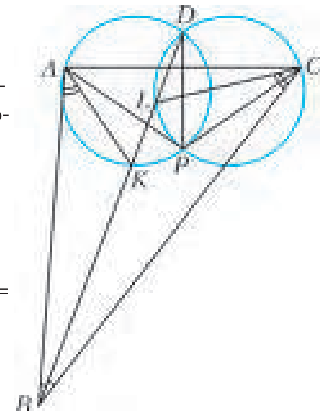


Рис. 16

Значит, $\alpha = \angle LCA_1 = \angle DCA_1 - \angle DCL = \frac{\pi}{2} - \gamma - (\varphi - \gamma) = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

13. $n = 2012 \cdot 2011 + 1$. Докажем, что если у ослика есть k палочек натуральной длины, сумма длин которых равна n, то выломать из них k палочек: длины 1, длины 2, …, длины k можно, если и только если $n \ge k(k-1) + 1$. Необходимость неравенства очевидна: если у ослика были k палочек длины $k - 1$, то палочку длины k из них никак нельзя выломать. Достаточность неравенства легко доказывается индукцией по k.

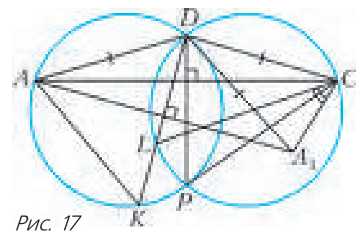


Рис. 17

14. Если все числа рациональны, представим их в виде несократимых дробей с целыми числителями и натуральными знаменателями. Если сумма двух таких дробей является целым числом, то их знаменатели равны. Отсюда получаем, что знаменатели всех чисел равны. Заменив все числа на обратные, получим, что их знаменатели тоже равны. Значит, если числа рациональны, то среди них не более двух различных.

Если хотя бы одно из чисел иррационально, то все они иррациональны. Если при этом сумма любых двух соседних чисел равна 0, среди них опять не более двух различных. Пусть теперь где-то стоят рядом иррациональные числа a и b такие, что $a + b \ne 0$. Заметим, что тогда $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ne 0$ и число ab рационально, так как $ab = (a+b) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Докажем, что рядом с числом a могут стоять только числа b и $-a$. Предположим, что это не так: пусть где-то на окружности рядом стоят числа a и c, где $c \ne b$ и $c \ne -a$. Поскольку $a + c \ne 0$, аналогично предыдущему получаем, что число ac рационально. Числа $a + b$ и $a + c$ целые, поэтому их разность $b - c$ тоже целая, при этом $b - c \ne 0$, так как $c \ne b$. Поскольку числа ab и ac рациональны, их разность $ab - ac = a(b - c)$ тоже рациональна. Разделив ее на целое число $b - c \ne 0$, получаем, что a рационально. Противоречие.

Рассуждая аналогично, получаем, что рядом с b на окружности могут стоять только числа a и $-b$; рядом с $-a$ могут стоять только $-b$ и a, рядом с $-b$ могут стоять только $-a$ и b. Следовательно, при обходе окружности, начиная от числа a, мы встретим не более четырех различных чисел.

15. 4000. Будем обозначать количество натуральных делителей числа a через $d(a)$. Нам понадобится известное неравенство $d(ab) \le d(a)d(b)$ для всех натуральных чисел a и b. Пусть n – число из условия, a – его 250-й делитель в порядке убывания, $b = n/a$. Каждому делителю d числа b можно сопоставить число n/d, которое является делителем числа n и не меньше a. Количество делителей n, не меньших a, равно

250, следовательно, есть не больше 250 чисел вида n/d, где d – делитель b. Значит, $d(b) \le 250$. Так как $d(n) = 10^6$ и $d(n) = d(ab) \le d(a)d(b)$, то $d(a) \ge \frac{d(n)}{d(b)} \ge \frac{10^6}{250} = 4000$. Примером числа n, для которого $d(a) = 4000$, может служить число $n = 2^{249}p^{3999}$, где $p > 2^{249}$ – простое число.

16. Всевозможные прямые, проведенные через точки круга параллельно биссектрисе первого координатного угла, высекают на оси Ox интервал $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$. Можно считать, что лучи света выпускаются из точек этого интервала. Есть только 4 направления, в которых могут двигаться лучи света. Зная, через какую точку проходит луч и в каком направлении он движется, можем однозначно восстановить, из какой начальной точки он выпущен и сколько отражений он сделал. Предположим, что любой выпущенный луч отражается от зеркал не менее 150 раз. Отметим на интервале $\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ все точки (их не более 800), лучи из которых хотя бы один раз проходят через край зеркала. Отмеченные точки разбивают начальный интервал на несколько *открытых* интервалов, обозначим эти интервалы $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Рассмотрим один из интервалов a_i и выпустим лучи света одновременно из всех его точек (рис.18). Так как они не попадают в края зеркал, их первое отражение произойдет на одном и том же зеркале, причем они «осветят» на этом зеркале интервал (обозначим его a_{i1}) такой же длины, как a_i. После отражения от интервала a_{i1} рассматриваемый пучок света по-прежнему движется в одном направлении и второй раз отражается от другого зеркала, освещая на нем интервал a_{i2} такой же длины. Продолжая таким образом, построим интервалы $a_{i3}, a_{i4}, \ldots, a_{i150}$, освещенные этим пучком света. Проделав это для всех интервалов $a_1, \ldots, a_n$, получим набор интервалов a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, 150$, которые содержатся в зеркалах, причем длина интервала a_{ij} равна длине a_i.

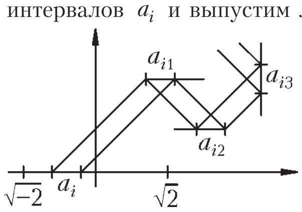


Рис. 18

Так как сумма длин интервалов a_i равна $2\sqrt{2}$, сумма длин всех интервалов a_{ij} равна $150 \cdot 2\sqrt{2} > 400$, а сумма длин зеркал равна 100. Следовательно, на одном из зеркал найдется точка, принадлежащая хотя бы пяти интервалам a_{ij}. Но это противоречит однозначности восстановления траектории луча. Значит, наше предположение неверно, и есть хотя бы один луч, отражающийся от зеркал менее 150 раз.

17. Условие $\angle ADS = \angle BDS$ (рис. 19) означает, что проекция точки S на плоскость $ABCD$ лежит на биссектрисе угла ADB, а условие $\angle ACS = \angle BCS$ – что проекция точки S на плоскость $ABCD$ лежит на биссектрисе угла ACB. Наконец, условие $BC \cdot AD = BD \cdot AC$, или, что эквивалентно, $AD : BD = AC : BC$, означает, что упомянутые биссектрисы пересекаются на стороне AB.

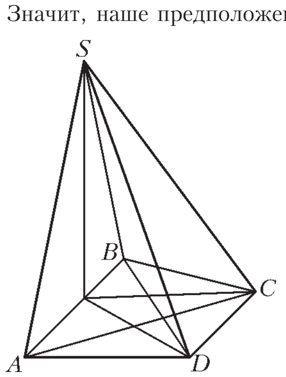


Рис. 19

18. В задаче речь идет о количестве *ациклических ориентаций* графа авиалиний (т.е. ориентаций, для которых каждое ребро ориентировано ровно в одном направлении и полученный ориентированный граф не имеет циклов). Пусть G – граф, $G - e$ – граф с удаленным ребром $e = uv$, G/e – граф со стянутым ребром uv, т.е. граф, в котором вершины u и v объединены в одну. Кратные ребра, которые могут появиться при слиянии вершин, можно сокращать (заменив на одно ребро) или не сокращать, на число ациклических ориентаций это не повлияет. Пусть $f(G)$ – число ациклических ориентаций.

Лемма 1. $f(G) = f(G - e) + f(G/e)$.

Читатель легко докажет эту лемму.

Лемма 2. *Если в графе G есть нечетный цикл, то $f(G)$ делится на 3, а если нет, то не делится.*

Доказательство. Заметим, что если граф G представляет собой простой цикл из n ребер, то $f(G) = 2^n - 2$ (можно рассматривать произвольные ориентации ребер, кроме двух: когда все ребра ориентированы «в одну сторону»). Это согласуется с указанным правилом, поскольку $2^n - 2$ делится на 3 при нечетном n и не делится при четном. Если в графе G вообще нет циклов, то все ориентации ациклические, их число – степень двойки, что опять согласуется с правилом. Предположим, что для каких-то графов закономерность нарушается, и возьмем среди них граф G с минимальным числом ребер. Если в графе G есть нечетные циклы, то минимальный из них не имеет хорд. Берем любое не входящее в него ребро e и применяем лемму 1. Каждый из графов $G - e$, G/e содержит нечетный цикл, при этом количество ребер в графах $G - e$, G/e меньше, чем в G, значит, $f(G - e)$ и $f(G/e)$ делятся на 3 в силу минимальности контрпримера. Тогда и $f(G)$ делится на 3. Противоречие.

Если же в графе G нечетных циклов нет, возьмем ребро e, принадлежащее четному циклу. При стягивании ребра e образуется нечетный цикл (и тогда $f(G/e)$ делится на 3), а при удалении ребра e новых циклов не возникает (в том числе и нечетных), значит, $f(G - e)$ не делится на 3. В результате $f(G)$ не делится на 3. Снова противоречие. Лемма доказана.

Утверждение задачи сразу следует из леммы 2, поскольку в задаче идет речь о двудольном графе, который не может содержать нечетных циклов.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»
Тел.: (495) 930-56-48
E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано
в соответствии с предоставленными материалами
в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь
www.Pareto-print.ru

РекорднаЯ схватка

В мае этого года в Москве, после 27-летнего перерыва, состоялся матч за шахматную корону, в котором сразились чемпион мира Виши Ананд (Индия) и претендент Борис Гельфанд (Израиль). Впервые в истории поединок прошел в музее – в Третьяковской галерее. Замечательная идея сблизить шахматы и искусство принадлежит главному спонсору матча предпринимателю Андрею Филатову. Организация была образцовой, но поединок из 12 классических партий оказался не слишком зрелищным: десять довольно быстрых ничьих и всего две результативные встречи, счет – 6:6. Судьба матча была решена в тай-брейке в быстрые шахматы. Ананд победил со счетом 2,5:1,5 и в итоге в четвертый раз завоевал шахматную корону.

Самой занятной оказалась 8-я партия.

Ананд – Гельфанд

Москва, 2012

Староиндийская защита

Первые шесть встреч закончились вничью, а в седьмой Гельфанду удалось взять верх. Однако не успел он выйти вперед, как тут же счет сравнялся. Восьмая партия закончилась трагически для претендента: при выходе из дебюта его ферзь попал в засаду, и черные немедленно остановили часы.

1. d4 ♘f6 2. c4 g6 3. f3 c5. В трех предыдущих черных партиях Гельфанд обращался к защите Грюнфельда – 3...d5, причем дважды Ананд избирал именно ход f2-f3. Теперь же Борис предпочел более рискованное индийское построение. Может быть, решил, что индийский гроссмейстер в нокдауне и надо нанести ему решающий удар. Или, наоборот, первое за двадцать лет очко против чемпиона мира вскружило ему голову и одновременно сковало по рукам и ногам...

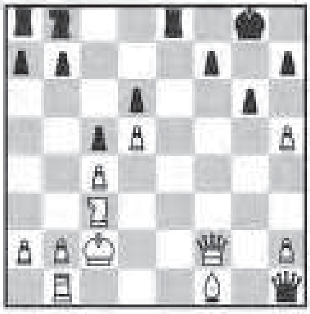
4. d5 d6 5. e4 ♗g7 6. ♘e2. Не совсем стандартная идея – поле c3 пока свободно, и на него устремляется королевский конь.

6...0-0 7. ♘ec3 ♘h5. Неожиданный ответ, традиционное продолжение 7...e6 или 7...e5.

8. ♗g5. Заслуживало внимания сразу 8. g4, отбрасывая коня назад.

8...♗f6 9. ♗:f6 ef 10. ♕d2 f5 11. ef ♗:f5 12. g4 ♖e8+ 13. ♔d1 ♗:b1 14. ♖:b1. Сейчас после 14...♘g7 белые сохраняли некоторый пространственный перевес, но позиция оставалась достаточно сложной и вся игра была впереди.

14...♕f6?? Непостижимая ошибка. 15. gh ♕:f3+ 16. ♔c2 ♕:h1 17. ♕f2!



Разумеется, гроссмейстеры понимали, что в углу, на h1, ферзь будет чувствовать себя дискомфортно, но, как ни странно, в глаза обоим прежде всего бросился ответ 17. ♕f4. Действительно, в геометрическом смысле он точнее – с f4 белый ферзь тоже запирает неприятельского, к тому же нападает на пешку d6 и расположен ближе к черному королю.

«Еще в предварительных расчетах, когда я играл 11. ef, – признался Ананд на пресс-конференции после партии, – я видел этот зевок. Сначала, как и Борису, мне показалось, что белый ферзь может пойти только на f4. Но потом заметил более подходящее для него поле f2, и все встало на свои места».

А вся соль состоит в том, что после 17. ♕f4 черный ферзь выскакивал на свободу благодаря тихому маневру 17...♕g1! Установив это, Гельфанд и ринулся вперед на 14-м ходу. Но ведь после 17. ♕f2 появилась простая угроза: черный ферзь может спастись только при помощи 17...♘c6 18. dc ♕:c6, и тогда 19. ♗d3 с последующим ♖f1 и ♘d5 дает белым смертельную атаку. И поэтому, не сделав больше ни единого хода, черные сдались.

Осталось сказать, что эта 17-ходовая миниатюра пополнила копилку шахматных курьезов, к тому же стала самой быстрой победной партией в истории розыгрыша первенства мира. Воспользуемся случаем и приведем еще одну эффектную победу 15-го чемпиона мира. В ней тоже был отдан ферзь, но на сей раз корректно.

Ананд – Лотье

Биль, 1997

Скандинавская защита

1. e4 d5 2. ed ♕:d5 3. ♘c3 ♕a5 4. d4 ♘f6 5. ♘f3 c6 6. ♗c4 ♗f5 7. ♘e5 e6 8. g4 ♗g6 9. h4 ♘bd7 10. ♘:d7 ♘:d7 11. h5 ♗e4 12. ♖h3 ♗g2 13. ♖e3! Хотя игра выглядит довольно странно, пока все по теории. Белые гоняют неприятельского слона по доске, при этом несколько ослабляя собственного короля. Чем кончится дело?

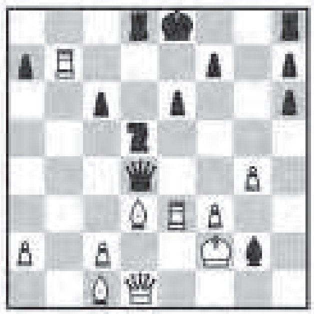
13... ♘b6 14. ♗d3 ♘d5 15. f3! Ценная новинка, теперь слон окружен. А вот после 15. ♖g3 ♗h1! он уютно чувствовал себя в дальнем углу доски. Сейчас на 16. ♔e2 следовал неожиданный удар ферзем – 16...♕:c3!, а после 16. ♗d2 ♕b6 все пешки белых уязвимы и слон отдаст свою жизнь по крайней мере за три из них.

15...♗b4. Пока не поздно, следовало пойти на разменную операцию: 15...♘:c3 16. bc ♕:c3+ 17. ♗d2 ♕:d4 18. ♔f2 ♗:f3 19. ♔:f3 ♗c5, и у черных определенная компенсация за фигуру.

16. ♔f2! ♗:c3. После 16...♘:c3 17. bc ♗:c3 18. ♖b1 ♗:d4 19. ♔:g2 ♗:e3 20. ♗:e3 противостоять дружным белым слонам почти невозможно.

17. bc ♕:c3 18. ♖b1 ♕:d4 19. ♖:b7 ♖d8 20. h6! Сразу 20. ♗g6 не годится: 20...♕:d1 21. ♖:e6+ ♔f8 22. ♗a3+ ♘e7 23. ♗:e7+ ♔g8, и атака белых захлебывается.

20...gh? Лотье не разгадал замысел соперника. В противном случае он сыграл бы 20...♘:e3 21. ♗:e3 ♕e5 22. hg ♖g8 23. ♕c1 ♗:f3 24. ♕a3 ♕h2+ 25. ♔:f3 ♕h3+ 26. ♔e2 ♕:g4+ 27. ♔d2, хотя и здесь трудно устоять.



21. ♗g6!! Редкий в гроссмейстерской практике случай, когда ферзь жертвует собой, не требуя взамен хотя бы пешки.

21...♘e7. После 21...♕:d1 дело заканчивалось симпатичным матом – 22. ♖:e6+! ♔f8 23. ♗:h6+ (вот почему был важен промежуточный ход пешки h5-h6) 23...♔g8 24. ♗:f7×.

22. ♕:d4 ♖:d4 23. ♖d3! Белый слон уходит из-под боя, а черный так и остался взаперти. **23...♖d8 24. ♖:d8+ ♔:d8 25. ♗d3! Черные сдались.**

Лотье убедился в том, что после 25...♗h1 26. ♗b2 ♖e8 27. ♗f6 и затем ♗d3-e4 и ♔f2-g1 его слон все-таки гибнет.

Е.Гик

На нитях висят шары, касающиеся друг друга. Когда мы отводим в сторону крайний шар, его удар выбивает противоположный шар, а все остальные шары не движутся, как-будто спят ... в "колыбельке" Ньютона....

"Колыбелька" Ньютона

(Продолжение – на странице 24 внутри журнала)