

МАРТ/АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221

2012 • №2

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК



## ТАЙСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

Эта головоломка была приобретена автором в Таиланде. Впрочем, читатели могут изготовить ее сами. Головоломка состоит из небольшой коробки, в которую нужно плотно упаковать шесть брусочков и закрыть ее крышкой. Дно и крышка коробки имеют квадратную форму, и в них проделано по 9 сквозных отверстий круглой формы.

В оригинальном варианте каждый брусочек – это параллелепипед размером 7,5 x 2,5 x 1 см с приклеенными в определенных местах половинками шаров или с проделанными отверстиями. Все отверстия и шары имеют равные радиусы. Поворачивать и переворачивать брусочки можно как угодно – как и в любых других головоломках на упаковку.

*(Продолжение – на странице 23 внутри журнала)*



# КВАНТ

МАРТ  
АПРЕЛЬ

2012

№2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

|  |
|--|
| УЧРЕДИТЕЛЬ<br>Российская академия наук   |
| ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР<br><b>А.Л.Семенов</b>   |
| РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ<br>А.А.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,<br>А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,<br>Н.П.Долбиллин ( <i>заместитель главного редактора</i> ), В.Н.Дубровский,<br>А.А.Егоров, П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,<br>А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов,<br>Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко,<br>В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,<br>А.И.Черноуцан ( <i>заместитель главного редактора</i> ) |
| РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ<br>А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,<br>В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,<br>Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков,<br>Л.Д.Фаддеев  |
| РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ<br>1970 ГОДА   |
| ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР<br><b>И.К.Кикоин</b>  |
| ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ<br>ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА<br><b>А.Н.Колмогоров</b>  |
| Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,<br>В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,<br>Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,<br>П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,<br>В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,<br>А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,<br>Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,<br>И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,<br>Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант,<br>Я.Е.Шнайдер   |

- 2 Пространство  $L_p$  и замечательные точки треугольника.  
*В.Протасов, В.Тихомиров*
- 12 Планеты иных звезд. *В.Сурдин*

#### ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 20 О трех работах Эйнштейна 1905 года. *В.Тихомиров*

#### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 24 Задачи M2254–M2260, Ф2260–Ф2267  
25 Решения задач M2236–M2245, Ф2243–Ф2252

#### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Анализ информации

#### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 36 Задачи  
37 Картезианский водолоз – генерация Р. *А.Панов*  
38 Всего лишь степени двойки. *И.Акулич*

#### НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 42 Оптические явления в автобусе. *В.Котов*

#### ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 45 Две окружности в треугольнике, три окружности в  
треугольнике... *А.Блинков, Ю.Блинков*

#### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 49 Воробьями по пушкам!. *А.Полянский*

#### ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 51 Две дюжины задач на закон Ома. *В.Дроздов*

#### ОЛИМПИАДЫ

- 55 Региональный этап XXXVIII Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
56 Региональный этап XLVI Всероссийской олимпиады  
школьников по физике  
58 Олимпиада «Максвелл-2012»  
59 Ответы, указания, решения

#### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Сурдина*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Пространство $L_p$ и замечательные точки треугольника

**В.ПРОТАСОВ, В.ТИХОМИРОВ**

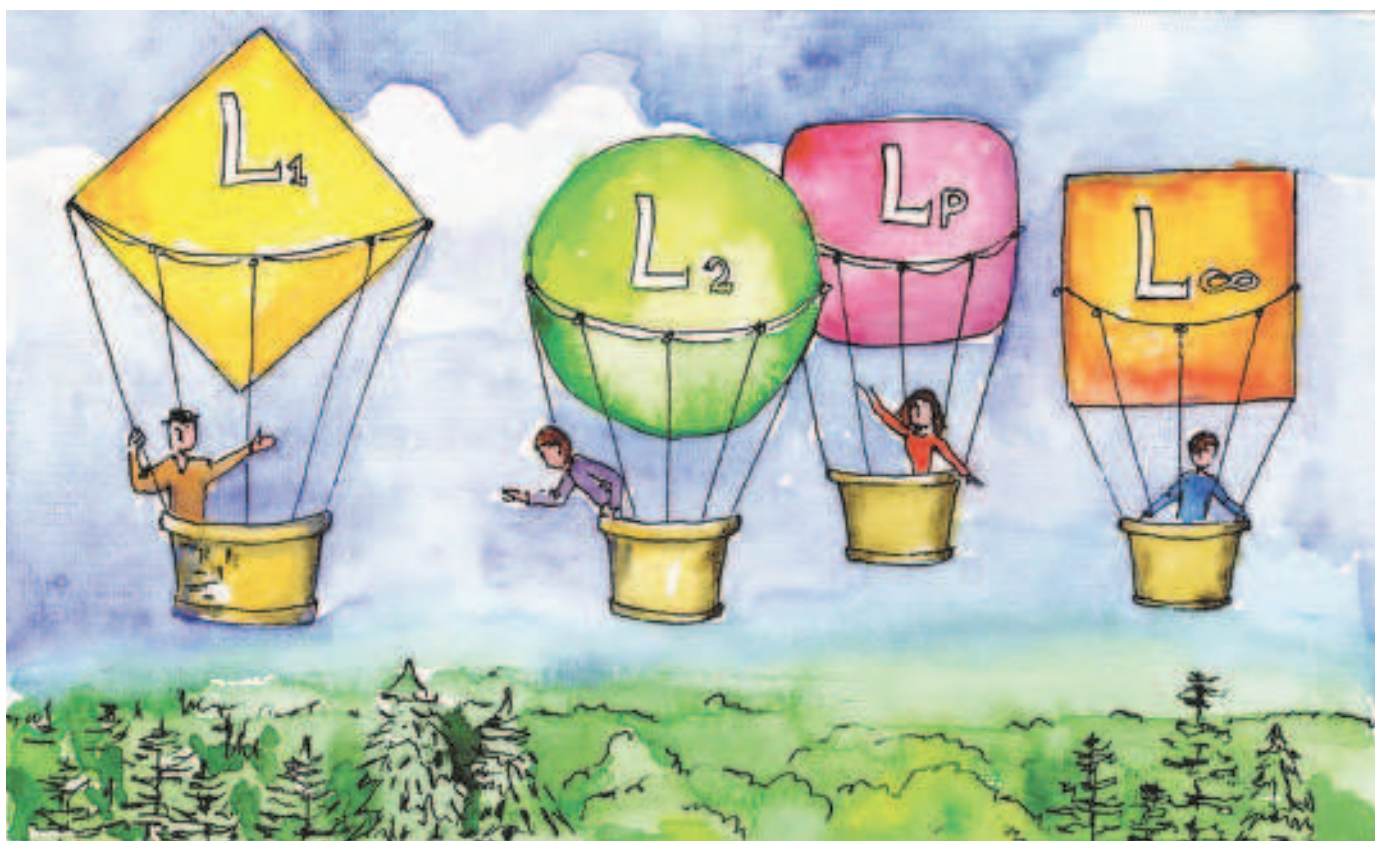
*Теория функций – это когда лектор говорит:  
«Рассмотрим круг», – и рисует на доске квадрат.*  
Студенческий фольклор

## Как сравнивать наборы чисел?

Если нам даны два числа, мы можем легко их сравнить и выяснить, какое больше. А как сравнить два набора чисел? Пусть есть наборы чисел  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  и  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ . Какой из них больше? Например, простая ситуация: есть двое весов, нам нужно понять, какие работают лучше. Провели три контрольных взвешивания. Первые весы сначала ошиблись на 10 граммов (в какую сторону – не важно), потом на 3 грамма, потом на 4. Вторые весы – соответственно, на 5, 8 и 6 граммов. Получается, что у нас есть два набора чисел  $\vec{a} = (10, 3, 4)$  и  $\vec{b} = (5, 8, 6)$ . Какой из них мень-

ше, те весы точнее. Так какие же? Первое, что можно сделать, – найти максимум трех чисел. У первого набора это 10, у второго 8. По такому измерению больше набор  $\vec{a}$ , и, значит, первые весы хуже (они сделали самую большую ошибку). Можно поступить по другому: сложить числа каждого набора. Здесь получается наоборот: первый набор меньше второго (17 против 19), значит, первые весы лучше. Математикам часто удобнее иметь дело не с суммой чисел и не с максимумом, а со средним квадратическим, т.е. с корнем из суммы квадратов. По этому показателю в каждом наборе получаем  $\sqrt{125}$ , т.е. весы работают одинаково. Результат зависит от того, как сравнивать. Меры, которые мы при этом использовали, называются  $L_p$ -нормами наборов чисел.

**Определение 1.** Пусть у нас есть набор чисел  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  и число  $p \geq 1$ . Тогда  $L_p$ -нормой данного



набора называется величина  $\|\vec{a}\|_p = (|a_1|^p + \dots + |a_n|^p)^{1/p}$ .

$L_\infty$ -нормой называется  $\|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$ .

Символ  $\infty$  здесь не случаен:  $L_p$ -норма  $\|\vec{a}\|_p$  стремится к числу  $\|\vec{a}\|_\infty$ , если увеличивать  $p$  до бесконечности (попробуйте доказать!). А буква  $L$  в названии – в честь французского математика Анри Лебега (1875 – 1941), одного из основоположников теории функций.



Анри Лебег

В примере с весами мы обнаружили, что  $\|\vec{a}\|_\infty > \|\vec{b}\|_\infty$ ,  $\|\vec{a}\|_1 < \|\vec{b}\|_1$  и  $\|\vec{a}\|_2 = \|\vec{b}\|_2$ . Необходимость сравнивать наборы чисел возникает в математике постоянно, в самых разных задачах. И в большинстве случаев это делается с помощью  $L_p$ -нормы. При этом вопрос, какое взять  $p$ , решается, исходя из конкретной задачи. В теории вероятностей часто удобнее брать  $L_1$ -норму, в теории приближений –  $L_\infty$ -норму, при изучении рядов Фурье пользуются  $L_2$ -нормой, и т.д.

### Пространство $L_p$

С помощью  $L_p$ -нормы можно не только сравнивать наборы чисел, но и по-новому измерять расстояния между точками. Мы подходим к одному из фундаментальных понятий математики – пространству  $L_p$ . Общего определения мы здесь дать не сможем, а рассмотрим только простейший случай: *двумерное пространство  $L_p$* . Это обычная плоскость, в которой задана обычная декартова система координат, а расстояния между точками определяются как  $L_p$ -норма разностей их координат.  $L_p$ -расстоянием между точками  $A$  и  $B$  – его обозначают  $d_p(A, B)$  – называется  $L_p$ -норма набора из двух чисел: разность абсцисс точек  $A$  и  $B$  и разность ординат. Таким образом, расстояние между точками  $A(a_1, a_2)$  и  $B(b_1, b_2)$  – это  $d_p(A, B) = \|(a_1 - b_1, a_2 - b_2)\|_p$ .

При  $p=2$  получаем  $d_2(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ , т.е.  $L_2$ -расстояние – это не что иное, как обычное расстояние между точками (его называют *евклидовым*). При других  $p$  получаем иную картину. Например,  $L_1$ -расстоянием будет величина  $d_1(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$ . Посмотрим, как выглядит единичная окружность в пространстве  $L_1$ .

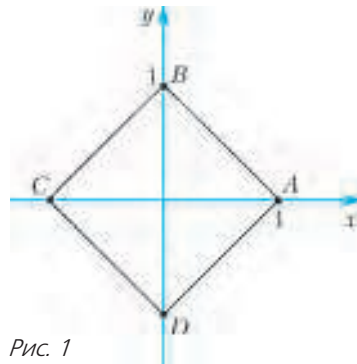


Рис. 1

Окружность радиусом 1 с центром в начале координат – это множество точек  $M(x, y)$ , расстояние от которых до точки  $(0, 0)$  равно 1. Это значит, что  $|x| + |y| = 1$ . Множество точек плоскости, удовлетворяющих этому уравнению,

– это квадрат с вершинами на осях координат (рис. 1). Да-да, окружность в пространстве  $L_1$  является квадратом (см. эпиграф)! Как и на обычной плоскости, у каждого треугольника есть описанная окружность, т.е. окружность, проходящая через его вершины, но она может быть не единственной (упражнение 2). В пространстве  $L_1$  бывают равносторонние прямоугольные треугольники, а серединный перпендикуляр к отрезку может не быть прямой линией (упражнения 1 и 3). Геометрия пространств  $L_p$  и множества других пространств изучается в *теории функций*.

### Упражнения<sup>1</sup>

1. В пространстве  $L_1$  треугольник  $ABC$  на рисунке 1 – равносторонний (и прямоугольный!).<sup>2</sup> У четырехугольника  $ABCD$  длины всех сторон и всех диагоналей равны 2.

2. Вокруг любого треугольника в  $L_1$  можно описать окружность. Приведите пример треугольника, у которого бесконечно много описанных окружностей.

3. Постройте геометрическое место точек  $M$ , для которых  $d_1(K_1, M) = d_1(K_2, M)$ , если: а)  $K_1 = (0, 0)$ ,  $K_2 = (0, 2)$ ; б)  $K_1 = (2, 0)$ ,  $K_2 = (0, 1)$ .

4. В  $L_1$  выполнено неравенство треугольника:  $d_1(K, N) \leq d_1(K, M) + d_1(M, N)$  для любых точек  $K, M, N$ . При этом существуют невырожденные треугольники, у которых наибольшая сторона равна сумме двух других сторон.

5. Сформулируйте и докажете аналоги упражнений 2–4 для пространства  $L_\infty$ .

### Две геометрические задачи

Мы возвращаемся в родную евклидову плоскость и исследуем две геометрические задачи на минимум. В первой задаче нужно найти точку, наименее удаленную от вершин данного треугольника, во второй – в данный треугольник вписать треугольник с наименьшими сторонами. Во всех случаях длина – обычная (евклидова). Постановка задач выглядит несколько непривычно: что значит «точка, наименее удаленная от вершин треугольника»? У треугольника три вершины, значит, есть три расстояния от точки до этих вершин. Какое из них должно быть наименьшим? Или все три сразу? Эти вопросы могли бы поставить нас в тупик, но теперь мы знаем, как естественно и корректно сформулировать задачу. На помощь приходит  $L_p$ -норма. Мы будем искать точку с наименьшей  $L_p$ -нормой трех расстояний до вершин треугольника. Выбирая при этом различные значения  $p$ , мы будем получать в качестве ответов различные замечательные точки треугольника. Некоторые из них хорошо нам знакомы (и тем интереснее встретить их в новых задачах), другие – менее знакомы. Вторую задачу, о вписанном треугольнике с наименьшими сторонами, нужно, конечно  $p$  тоже ставить с помощью  $L_p$ -нормы: для каждого  $p$  найти вписанный треугольник с наименьшей  $L_p$ -нормой сторон. Решая ее, мы также встретим несколько замечательных линий и точек треугольника. Для про-

<sup>1</sup> Упражнения мы, как правило, будем формулировать в виде утверждений, которые надо доказать. Слова «докажите, что» будем опускать.

<sup>2</sup> Расстояние между точками мы измеряем в  $L_p$ -норме, а углы – как обычно.

стоты мы будем решать все задачи только для остроугольных треугольников.

Главным для нас будет разобраться, как решаются подобные задачи на минимум, как находить ответ и как правильно его обосновывать. Поэтому решения первых задач мы рассмотрим особенно подробно.

### Точка, наименее удаленная от вершин треугольника

**Общая задача.** Для данного остроугольного треугольника найти точку с наименьшей  $L_p$ -нормой трех расстояний от нее до вершин треугольника.

Итак, для произвольного  $p \geq 1$  нужно найти точку  $M$ , для которой величина  $(MA^p + MB^p + MC^p)^{1/p}$  наименьшая. Для каждого  $p$  получается своя задача. И у каждой задачи, по-видимому, будет свой особый ответ. Мы приведем решение, конечно же, не для всех  $p$ , а только для трех: для  $p = 1, 2$  и  $\infty$ .

**Задача 1.  $p = 1$ .** Найти точку, сумма расстояний от которой до вершин данного остроугольного треугольника наименьшая (задача Ферма–Торричелли–Штейнера).

В решении мы воспользуемся задачей, известной каждому восьмикласснику: для данных точек  $A$  и  $B$ , лежащих по одну сторону от прямой  $l$ , найти точку  $M$  на прямой, для которой сумма  $AM + BM$  наименьшая. Иными словами, нужно найти кратчайший путь между двумя точками с заходом на прямую линию. Ответ известен: точка  $M$  такова, что отрезки  $AM$  и  $BM$  образуют равные углы с прямой  $l$  («угол падения равен углу отражения»).



Рис. 2

Для построения точки  $M$  нужно отразить симметрично точку  $B$  относительно прямой  $l$  (получим точку  $B'$ , рис.2). Тогда  $M$  — это точка пересечения отрезка  $AB'$  с прямой  $l$ .

Отражать симметрично точку  $B$  относительно прямой  $l$  (получим точку  $B'$ , рис.2). Тогда  $M$  — это точка пересечения отрезка  $AB'$  с прямой  $l$ .

**Решение.** Начнем с того, что попробуем отыскать точку  $M$ , для которой сумма расстояний

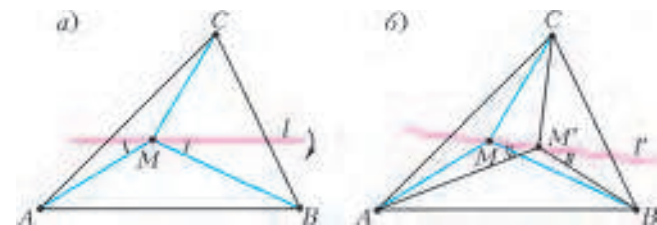


Рис. 3

что прямая  $l$  не перпендикулярна отрезку  $CM$ , т.е.  $CM$  образует с  $l$  острый угол. Повернем немного прямую  $l$  так, чтобы этот угол увеличился, но остался острым. Получим прямую  $l'$ . Решим для нее задачу о кратчайшем пути из  $A$  в  $B$  с заходом на прямую. Получим точку  $M'$  на прямой  $l'$  (рис.3,б). Если угол поворота достаточно маленький, то  $M'$  находится очень близко к  $M$ , а угол  $CM'M$  — тупой. Значит,  $CM' < CM$ , так как в треугольнике  $CMM'$  сторона  $CM$  лежит напротив тупого угла. Кроме того,  $AM' + BM' < AM + BM$ . Таким образом,  $AM' + BM' + CM' < AM + BM + CM$ , что противоречит предположению. Это значит, что  $CM \perp l$ , и, следовательно,  $\angle BMC = \angle AMC$ . Повторив те же рассуждения для другой пары углов, получаем, что все три угла с вершиной  $M$  равны, а значит, каждый из них равен  $120^\circ$ .

**Точка Торричелли.** Итак, ответом в задаче служит точка внутри треугольника, из которой все три стороны видны под равными углами в  $120^\circ$ . Она называется *точкой Торричелли*. У любого остроугольного треугольника есть единственная точка Торричелли. Для доказательства построим на каждой стороне треугольника во внешнюю сторону равносторонний треугольник. Описанные окружности этих трех треугольников пересекаются в одной точке (рис.4). Действительно, пусть две из этих окружностей, построенные на сторонах  $AB$  и  $AC$ , пересекаются повторно в некоторой точке  $T$  (если окружности касаются, то  $T = A$ ). По теореме о вписанном угле  $\angle ATB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  и, аналогично,  $\angle ATC = 120^\circ$ . Следовательно,  $\angle BTC = 360^\circ - 2 \cdot 120^\circ = 120^\circ$ , значит, третья окружность также проходит через  $T$ . Верно и обратное: если некоторая точка  $M$  такова, что  $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$ , то  $M$  лежит на каждой из трех окружностей, а значит, совпадает с точкой  $T$ . Впредь будем обозначать точку Торричелли через  $T$ .



Эванджелиста Торричелли

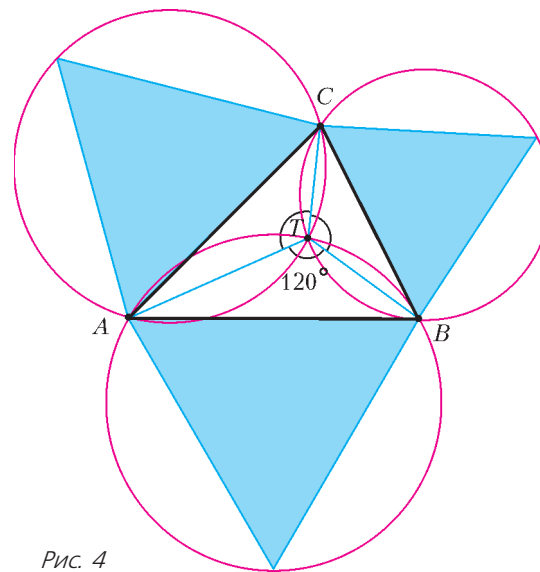


Рис. 4

**Где ошибка?** Минимум суммы расстояний до вершин остроугольного треугольника достигается в точке Торричелли. Однако решение, которое мы привели, неверно. И ошибка весьма серьезная! Но найти ее не так-то просто.

Все рассуждения – правильные, ошибка находится в первой фразе: «Пусть  $M$  – точка, для которой сумма расстояний ... наименьшая». А почему такая точка существует? Мы показали (строго и правильно!), что если минимум в задаче « $MA + MB + MC \rightarrow \min$ » достигается, то он достигается в точке Торричелли. Но он может не достигаться ни в какой точке! Этот небольшой, на первый взгляд, недочет иногда приводит к неверным, а порой и к совершенно абсурдным выводам. Вот пример.

**«Теорема».** На плоскости дан отрезок  $AB$  и параллельная ему прямая  $l$ . Тогда любая точка этой прямой равноудалена от  $A$  и  $B$ .

Из этого можно получить разные «следствия». Например, что любой треугольник – равносторонний. В самом деле, возьмем произвольный треугольник  $ABC$  и проведем через вершину  $C$  прямую  $l$ , параллельную  $AB$ . Тогда из «теоремы» следует, что  $AC = BC$ . Аналогично доказываем, что  $BC = AB$ .

**«Доказательство.»** Для любой точки  $M$  прямой  $l$  рассмотрим величину  $|AM - BM|$ . Заметим, что эта величина не может расти неограниченно: она никогда не превосходит длины  $AB$  (по неравенству треугольника).

Возьмем точку  $M$ , для которой эта величина достигает своего максимума на прямой  $l$ . Предположим, что  $AM > BM$ , т.е. что  $M$  находится справа от серединного перпендикуляра к отрезку  $AB$  (рис.5). Тогда, немного сдвинув точку  $M$  вправо, мы увеличим разность  $AM - BM$ . Действительно, в четырехугольнике  $AMM'B$  сумма диагоналей больше суммы противоположных сторон (это следует из неравенства треугольника), поэтому  $AM' + BM > AM + BM'$ , откуда  $AM' - BM' > AM - BM$ , что противоречит выбору точки  $M$ . Значит, неравенство  $AM > BM$  невозможно. Аналогично, неравенство  $AM < BM$  невозможно. Следовательно,  $AM = BM$ . Значит, максимум выражения  $|AM - BM|$  равен нулю. Поэтому оно равно нулю для всех точек прямой  $l$ .

Единственная ошибка в этом рассуждении заключается в том, что точки  $M$  не существует. Максимум выражения  $|AM - BM|$  на прямой  $l$  не достигается. Если отодвигать точку  $M$  все дальше и дальше по прямой, то это выражение будет все время увеличиваться и стремиться к длине  $AB$ , но никогда ее не достигнет. Поэтому наше решение задачи неверно.

А что же с точкой Торричелли? Будет ли она давать ответ? Да. Но это нужно строго обосновать. Можно доказать, что минимум в задаче « $AM + BM + CM \rightarrow \min$ » достигается. Тогда все будет сделано. Но это заведет нас слишком далеко, к свойствам компактных множеств и к теореме Вейерштрасса. Все это вы будете

проходить в институте. Мы же, оставаясь в рамках школьной программы, просто найдем другое, верное решение. Причем мы в нем используем тот предполагаемый ответ, который до этого получили, но не смогли строго обосновать.

**Правильное решение.** Нам понадобится один несложный факт, который мы сформулируем в виде упражнения.

**Упражнение 6.** Для любой точки внутри равностороннего треугольника сумма расстояний от нее до сторон постоянно и равна высоте треугольника. Если же точка находится вне треугольника, то эта сумма больше высоты.

**Указание.** Соедините данную точку с вершинами треугольника и выразите площади трех образовавшихся треугольников.

Пусть  $M$  – любая точка плоскости, отличная от  $T$ . Проведем через каждую вершину треугольника  $ABC$  прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему эту вершину с точкой  $T$ . Эти три прямые образуют равносторонний треугольник (рис.6). Назовем его  $\Delta$ .

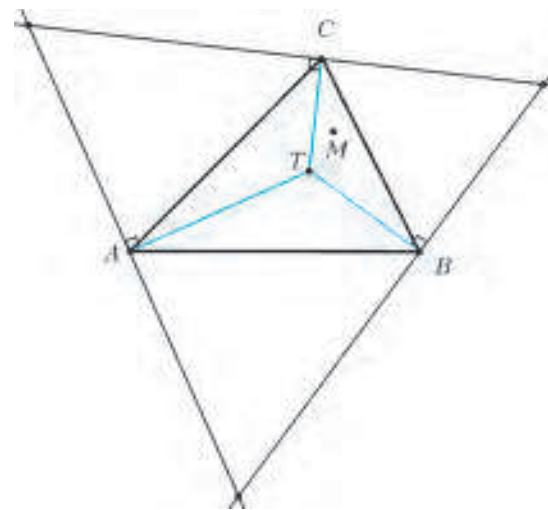


Рис. 6

Сумма отрезков  $TA, TB$  и  $TC$  равна высоте треугольника  $\Delta$ . А сумма отрезков  $MA, MB$  и  $MC$  больше суммы расстояний от точки  $M$  до сторон  $\Delta$ , а значит, больше высоты  $\Delta$ .

Только теперь, после строгого доказательства, мы можем, наконец, написать ответ.

**Ответ.** Точка Торричелли  $T$ .

Задача решена полностью. Первое решение оказалось ненужным. Во втором мы все строго доказали, от начала и до конца. К тому же, второе решение гораздо короче! Но додуматься до него самостоятельно – совсем не просто. Для этого надо было хотя бы предполагать правильный ответ с точкой Торричелли, а затем им воспользоваться. Вот для этого и было необходимо первое рассуждение, пусть оно и было нестрогим.

Итак, мы будем решать задачи на минимум в два шага. Сначала, в первом шаге, пробуем угадать правильный ответ. Для этого мы решаем задачу, предполагая, что минимум достигается. Далее, во втором шаге, мы строго обосновываем этот ответ. И всякий раз

знание ответа, полученного на первом шаге, будет помогать нам найти правильное решение. Хотя формально первый шаг не нужен: все решение целиком содержится во втором шаге.

**Примечание.** Задача 1 известна уже более 350 лет. Впервые она была опубликована в 1659 году Винченцо Вивiani (1622–1703), итальянским физиком и математиком, учеником Галилея. Но еще до этого она была решена другим учеником Галилея, Эванджелиста Торричелли (1608–1647), тем самым, который открыл законы давления жидкости. По некоторым сведениям, Торричелли узнал об этой задаче от великого французского математика Пьера Ферма (1601–1665), с которым состоял в переписке. По этой причине точку Торричелли называют также точкой Ферма. Позже швейцарский геометр Якоб Штейнер (1796–1863) нашел чисто геометрическое решение задачи 1.

#### Упражнения

**7.** На сторонах остроугольного треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Каждая вершина исходного треугольника соединена отрезком с противоположной вершиной равностороннего треугольника. Тогда эти три отрезка пересекаются в точке Торричелли. Их длины равны сумме расстояний от точки Торричелли до вершин треугольника.

**8** (теорема Помпею). Дан равносторонний треугольник  $ABC$  и точка  $M$ . Если  $M$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , то один из трех отрезков  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  равен сумме двух других. Если  $M$  не лежит на описанной окружности, то каждый из отрезков меньше суммы двух других.

**Указание.** Сделайте поворот на  $60^\circ$  вокруг одной из вершин треугольника.

**9.** С помощью упражнения 8 получите другое решение задачи 1.

**Задача 2.  $p = 2$ .** Найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая.

Как мы договорились, решение будет состоять из двух шагов.

**Шаг 1. Ищем точку.** Мы начнем с одного полезного факта.

**Факт 1.** Геометрическим местом точек, сумма квадратов расстояний от которых до данных точек  $A$  и  $B$  постоянна, является окружность с центром в середине  $AB$ .

**Доказательство.** Пусть  $M$  – произвольная точка. Обозначив через  $O$  середину отрезка  $AB$  и применив формулу длины медианы, получаем  $OM^2 = \frac{1}{4}(2AM^2 + 2BM^2 - AB^2)$ . Поэтому если величина  $AM^2 + BM^2$  постоянна, то и расстояние  $OM$  постоянно, и наоборот.

Теперь будем определять положение точки  $M$ , для которой сумма  $AM^2 + BM^2 + CM^2$  наименьшая. Проведем окружность через точку  $M$  с центром в точке  $C_1$  – середине  $AB$ . Если перемещать точку  $M$  по этой окружности, то сумма  $AM^2 + BM^2$  не меняется, а меняется только последнее слагаемое  $CM^2$ . Надо минимизировать это слагаемое, т.е. найти на окружности точку, ближайшую к точке  $C$ . Это – точка пересечения

окружности с отрезком  $CC_1$  (рис.7). Таким образом,  $M$  должна лежать на медиане  $CC_1$ . Аналогично, она лежит и на двух других медианах. Следовательно,  $M$  – точка пересечения медиан, или центр тяжести треугольника  $ABC$ .

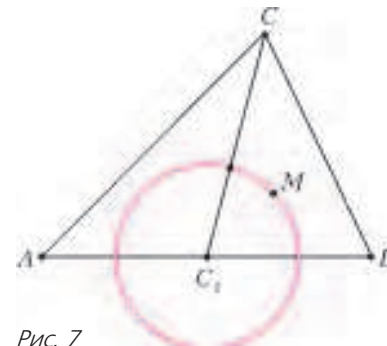


Рис. 7

**Шаг 2. Доказываем.** Итак, мы выдвигаем гипотезу, что для центра тяжести – здесь и далее обозначаем его через  $G$  – сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна. Какие свойства точки  $G$  мы знаем? Одно из главных: сумма векторов  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$  равна нулю. Для произвольной точки  $M$ , обозначив  $\vec{x} = \vec{MG}$ , получим (рис.8)

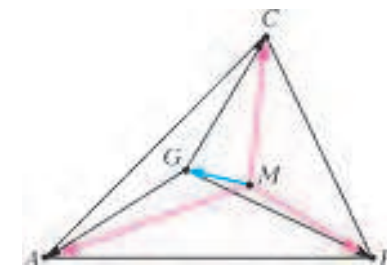


Рис. 8

знаем? Одно из главных: сумма векторов  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$  равна нулю. Для произвольной точки  $M$ , обозначив  $\vec{x} = \vec{MG}$ , получим (рис.8)

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \\ &= (\vec{x} + \vec{GA})^2 + (\vec{x} + \vec{GB})^2 + (\vec{x} + \vec{GC})^2 = \\ &= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\vec{x}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + 3|\vec{x}|^2 = \\ &= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3|\vec{x}|^2. \end{aligned}$$

Мы доказали такой факт, интересный сам по себе:

**Факт 2.** Сумма квадратов расстояний от произвольной точки  $M$  до вершин треугольника равна сумме квадратов расстояний от точки  $G$  до этих вершин, плюс  $3GM^2$ .

Следовательно, сумма квадратов наименьшая, когда  $GM = 0$ , т.е.  $M = G$ .

**Ответ.** Точка пересечения медиан  $G$ .

**Задача 3.  $p = \infty$ .** Найти точку, для которой наибольшее из трех расстояний до вершин данного остроугольного треугольника минимально.

**Шаг 1. Ищем точку.** Самое большое из трех расстояний  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  должно быть минимально. Интуиция подсказывает, что для этого все три расстояния должны быть равны. В самом деле, пусть, например,  $MA$  – наибольшее из трех расстояний. Если не все они равны, то какое-нибудь из двух оставшихся расстояний будет меньше  $MA$ . Например,  $MB < MA$ . Немного сдвинем точку  $M$  к прямой  $AC$  в направлении, перпендикулярном этой прямой (рис.9). Тогда оба расстояния  $MA$  и  $MC$  уменьшатся (это следует, например, из теоремы Пифагора). При этом сдвинем ее

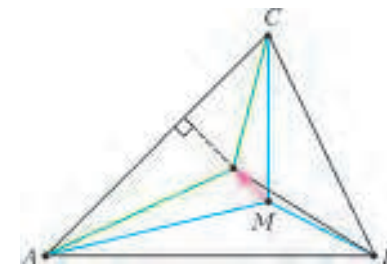


Рис. 9



настолько мало, чтобы неравенство  $MB < MA$  по-прежнему выполнялось. Тогда наибольшее из трех расстояний  $MA, MB, MC$  уменьшится. Следовательно, если точка  $M$  дает решение задачи, то она должна быть равноудалена от вершин треугольника, т.е. совпадать с центром описанной окружности  $O$ .

**Шаг 2. Доказываем.** Рассмотрим произвольную точку  $M$ . Хотя бы один из отрезков  $OA, OB, OC$  образует

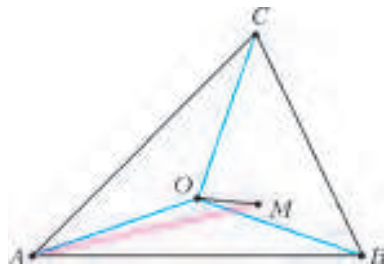


Рис. 10

с отрезком  $OM$  тупой угол (рис.10). Иначе все три вершины треугольника  $ABC$  лежали бы по одну сторону от прямой  $a$ , перпендикулярной  $OM$  и проходящей через точку  $O$ . Значит, прямая  $a$  не пересекает треугольник, что невозможно, поскольку  $O$  лежит внутри треугольника. Пусть, например,  $\angle MOA > 90^\circ$ . Тогда  $MA > OA = R$ , где  $R$  – радиус описанной окружности. Следовательно,  $\max\{MA, MB, MC\} > R$ . Поэтому для точки  $O$  наибольшее из расстояний до вершин равно  $R$ , а для любой другой точки оно больше  $R$ .

**Ответ.** Центр описанной окружности  $O$ .

### Вписанный треугольник с наименьшими сторонами

**Общая задача.** В данный остроугольный треугольник вписать треугольник с наименьшей  $L_p$ -нормой длин сторон.

Таким образом, при каждом  $p \geq 1$  нужно минимизировать величину  $a^p + b^p + c^p$ , где  $a, b, c$  – длины сторон вписанного треугольника; при  $p = \infty$  минимизируем величину  $\max\{a, b, c\}$ . Далее мы обозначаем через  $ABC$  исходный треугольник, через  $A'B'C'$  – вписанный треугольник, при этом  $B'C' = a, C'A' = b, A'B' = c$  (рис.11).

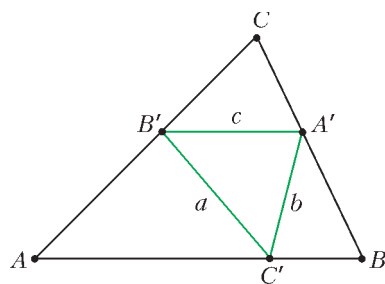


Рис. 11

Для каждого  $p$  получается отдельная задача. Снова у нас бесконечно много задач. В каждой задаче будет возникать свой вписанный треугольник. И своя замечательная точка! При чем здесь замечательные точки, спросите вы? Ведь на сей раз речь идет только о вписанных треугольниках. Дело в том, что каждой точке внутри треугольника  $ABC$  соответствует свой вписанный треугольник. Он называется *педальным* треугольником.

**Определение 2.** Педальным треугольником точки  $M$  называется треугольник с вершинами в основаниях перпендикуляров, опущенных из  $M$  на стороны треугольника  $ABC$  или на их продолжения.

Название произошло от итальянского *piede* либо от французского *pied*, что означает «ступня» (отсюда –

«педаль»), а в математике так еще называют основание перпендикуляра (*il piede della perpendicolare*). Иногда в литературе встречается другой термин, «подерный треугольник» (то же, но от греческого слова).

Педальный треугольник центра описанной окружности – это треугольник с вершинами в серединах сторон треугольника  $ABC$ . Педальный треугольник ортоцентра (точки пересечения высот) – это треугольник с вершинами в основаниях высот. Он называется *ортотреугольником* треугольника  $ABC$ . Строго говоря, не для любой точки  $M$  педальный треугольник будет треугольником: он может выродиться в прямую. Но произойдет это, только если точка  $M$  лежит на описанной окружности (упражнение 12).

Разумеется, не любой вписанный треугольник является педальным. Но оказывается, что в нашей задаче только педальные треугольники могут давать решения.

**Теорема.** Для каждого  $p$  вписанный треугольник с наименьшей  $L_p$ -нормой сторон является педальным треугольником.

**Доказательство.** Путь  $A'B'C'$  – произвольный треугольник, вписанный в треугольник  $ABC$  (рис.12).

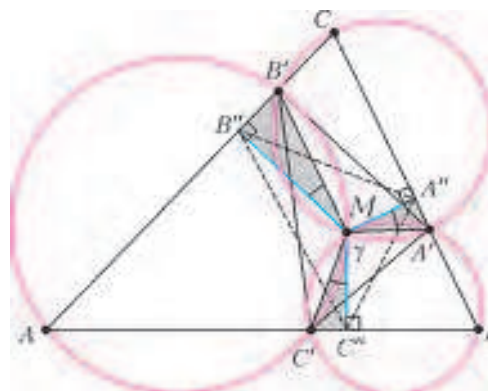


Рис. 12

Покажем, что описанные окружности треугольников  $A'B'C, B'C'A$  и  $C'A'B$  пересекаются в одной точке. Если  $M$  – точка повторного пересечения окружностей  $A'B'C$  и  $B'C'A$ , то  $\angle A'MB' = 180^\circ - \angle C$  и, аналогично,  $\angle B'MC' = 180^\circ - \angle A$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \angle C'MA' &= 360^\circ - \angle A'MB' - \angle B'MC' = \\ &= \angle C + \angle A = 180^\circ - \angle B. \end{aligned}$$

Значит, точка  $M$  лежит на окружности  $C'A'B$ . Опустим теперь перпендикуляры  $MA'', MB''$  и  $MC''$  на стороны треугольника  $ABC$ . Угол  $A''MB''$  равен углу  $A'MB'$  (они оба равны  $180^\circ - \angle C$ ). Следовательно,  $\angle A''MA' = \angle B''MB'$ . Обозначим через  $\gamma$  величину этих равных углов. Аналогично,  $\angle C''MC' = \gamma$ . Если теперь повернуть треугольник  $A'B'C'$  на угол  $\gamma$  и сжать его гомотетично относительно точки  $M$  с коэффициентом  $\cos \gamma$ , то получится треугольник  $A''B''C''$ . Итак, педальный треугольник точки  $M$  (это треугольник  $A''B''C''$ ) подобен треугольнику  $A'B'C'$ , причем коэффициент подобия  $\cos \gamma$  меньше единицы. Следовательно, он имеет меньшую  $L_p$ -норму длин сторон.

Таким образом, для любого вписанного треугольника найдется педальный треугольник с такой же или мень-

шей  $L_p$ -нормой длин сторон. Поэтому решение задачи следует искать только среди педальных треугольников.

#### Упражнения

**10.** На плоскости дан равносторонний треугольник. Найти геометрическое место точек, педальные треугольники которых – прямоугольные.

**11.** Для данного треугольника найдите максимальную возможную площадь педального треугольника.

**12.** Педальный треугольник вырождается в прямую тогда и только тогда, когда точка лежит на описанной окружности. Эта прямая называется *прямой Симсона* данной точки.

**13.** Прямые Симсона диаметрально противоположных точек описанной окружности перпендикулярны.

**14.** Вокруг треугольника  $ABC$  описана окружность. Прямая Симсона середины дуги  $AB$ , содержащей точку  $C$ , делит пополам периметр треугольника.

**15.** Прямая Симсона данной точки делит пополам отрезок между этой точкой и ортоцентром.

*Примечание.* Прямая носит имя шотландского математика Роберта Симсона (1687–1768), хотя открыта она была другим шотландцем, Вильямом Уоллесом (1768–1843).

**Задача 4.  $p = 1$ .** В данный остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра (задача Фаньяно).

**Шаг 1. Ищем треугольник.** Пусть  $A'B'C'$  – вписанный треугольник наименьшего периметра.

Зафиксируем две его вершины  $A'$  и  $B'$ . Если перемещать третью вершину по стороне  $AB$ , то периметр треугольника  $A'B'C'$  может только увеличиться. Поэтому, сумма  $A'C' + B'C'$  является наименьшей суммой расстояний от точек  $A'$  и  $B'$  до точки на  $AB$ . Следовательно, точка  $C'$  дает решение задачи о кратчайшем пути из  $A'$  до  $B'$  с заходом на прямую  $AB$ . Это значит, что  $\angle A'C'B = \angle B'C'A$  (угол падения равен углу отражения). Рассуждая так же с двумя другими вершинами, получаем:

*стороны треугольника  $A'B'C'$  образуют попарно равные углы со сторонами треугольника  $ABC$ .*

**Ортотреугольник и ортоцентр.** Мы охарактеризовали треугольник  $A'B'C'$ . Осталось его найти. Из равенства углов при вершине  $A'$  получаем, что  $A'C'$  – биссектриса внешнего угла треугольника  $A'B'C'$  (рис.13). Аналогично,  $B'C'$  – биссектриса внешнего угла при вершине  $B'$ . Как мы знаем, биссектрисы двух внешних углов

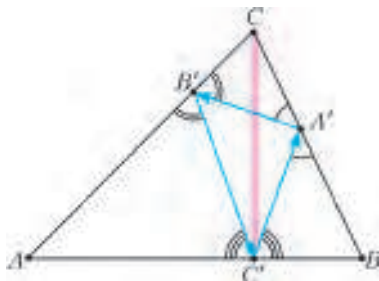


Рис. 13

треугольника пересекаются на биссектрисе третьего (внутреннего) угла. Биссектрисы  $A'C$  и  $B'C$  пересекаются в точке  $C$ , а биссектриса угла при вершине  $C'$  – это перпендикуляр к стороне  $AB$ . Получаем, что этот перпендикуляр проходит через вершину  $C$ , т.е.  $CC'$  – высота. Таким образом, вершины треугольника  $A'B'C'$  – это основания высот треугольника  $ABC$ , т.е.  $A'B'C'$  – ортотреугольник.

Стороны ортотреугольника образуют замкнутый путь луча света, бесконечно отражающегося от сторон треугольника  $ABC$ . Можно сказать иначе: маленький шарик, последовательно отражаясь от сторон треугольника в точках  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ , будет вечно двигаться по этой замкнутой траектории. Математики в таких случаях говорят, что стороны треугольника  $A'B'C'$  образуют *замкнутый бильярд* для внешнего треугольника  $ABC$ .

**Шаг 2. Доказываем.** По нашему предположению, стороны треугольника наименьшего периметра образуют равные углы в вершинах со сторонами треугольника  $ABC$ . Поэтому будет естественным применить симметрию относительно сторон  $ABC$ . Пусть  $A'B'C'$  – произвольный вписанный треугольник. Отразим точку  $C'$  от прямой  $CA$ , получив точку  $K$ , и от прямой  $CB$ , получив точку  $N$  (рис.14). Периметр треугольника  $A'B'C'$  равен длине ломаной  $KB'A'N$ . Длина ломаной не

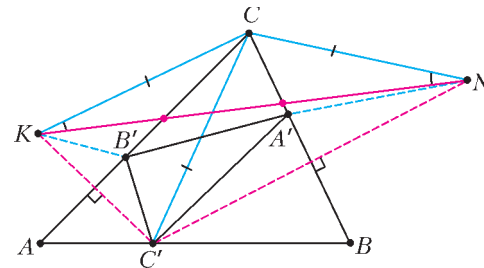


Рис. 14

меньше отрезка  $KN$ , равного (из равнобедренного треугольника  $KCN$ )  $2KC \cdot \sin \frac{\angle KCN}{2} = 2CC' \cdot \sin \angle C$ . Следовательно, длина ломаной  $KB'A'N$  минимальна, когда  $A'$  и  $B'$  являются точками пересечения сторон  $CB$  и  $CA$  с отрезком  $KN$ , а точка  $C'$  является основанием высоты (в этом случае отрезок  $CC'$  наименьший). Следовательно,  $A'B'C'$  – ортотреугольник.

**Ответ.** Ортотреугольник, т.е. педальный треугольник ортоцентра.

Задача 4 была впервые поставлена и решена итальянским математиком Джованни Фаньяно в 1775 году. Его решение было аналитическим и достаточно длинным, причем в нем он использовал результаты, полученные ранее его отцом, известным математиком Джулио Карло Фаньяно (1686–1766). Первые геометрические решения появились гораздо позже.

#### Упражнения

**16.** Ортоцентр треугольника  $ABC$  является центром вписанной окружности ортотреугольника, а точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – центрами его вневписанных окружностей.

**17.** Стороны ортотреугольника равны произведениям сторон исходного треугольника на косинусы противоположных углов. Периметр равен  $\frac{2S}{R}$ , где  $S$  и  $R$  – соответственно площадь и радиус описанной окружности исходного треугольника. Радиус его описанной окружности равен  $\frac{1}{2}R$ .

**Задача 5.  $p = 2$ .** В данный треугольник вписать треугольник с наименьшей суммой квадратов сторон.

**Шаг 1. Ищем треугольник.** Пусть  $P$  – середина стороны  $A'B'$  вписанного треугольника. Как мы знаем (факт 1), все точки  $C'$ , для которых сумма  $|B'C'|^2 + |A'C'|^2$  принимает данное значение, есть окружность с центром  $P$ . Если треугольник  $A'B'C'$  дает решение задачи, то радиус этой окружности нельзя уменьшить, следовательно, она касается прямой  $AB$ . Итак, отрезок  $PC$  перпендикулярен  $AB$ . Получили следующее описание решения:

*медианы треугольника  $A'B'C'$  перпендикулярны сторонам треугольника  $ABC$ .*

Иными словами, *треугольник  $A'B'C'$  является pedalным для своей точки пересечения медиан.* Какие треугольники  $A'B'C'$  обладают данным свойством?

**Точка Лемуана и симедианы.** Пусть  $L$  – точка пересечения медиан треугольника  $A'B'C'$ . Тогда  $\overline{LA'} + \overline{LB'} + \overline{LC'} = 0$  (рис. 15). После поворота на  $90^\circ$

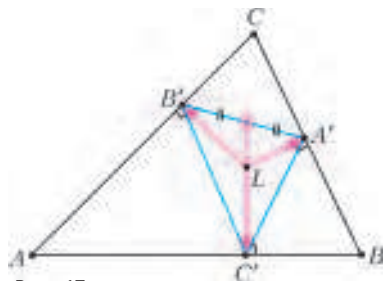


Рис. 15

три данных вектора становятся сонаправлены векторам  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  и  $\overline{AB}$  соответственно, сумма которых также равна нулю. Следовательно, длины векторов  $\overline{LA'}$ ,  $\overline{LB'}$ ,  $\overline{LC'}$  пропорциональны длинам сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ .

Итак, *расстояния от точки  $L$  до сторон треугольника пропорциональны этим сторонам.* Например, расстояния от  $L$  до сторон  $AC$  и  $BC$  относятся как  $AC:BC$ . С другой стороны, расстояния от любой точки  $N$  медианы треугольника  $ABC$ , выходящей из вершины  $C$ , до сторон  $AC$  и  $BC$  обратно пропорциональны длинам этих сторон (это следует из равенства площадей треугольников  $ACN$  и  $BCN$ ). Следовательно, прямая  $CL$  симметрична медиане относительно биссектрисы угла  $C$ .

**Определение 3.** *Симедианой треугольника называется прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы того же угла.*

По аналогии с другими замечательными линиями треугольника, мы будем иногда понимать под симедианой всю прямую, а иногда – только ее отрезок от вершины треугольника до точки пересечения с противоположной стороной. Три симедианы треугольника пересекаются в одной точке (упражнение 23), которая называется *точкой Лемуана*. У нее множество интересных свойств. Некоторые из них сформулированы в упражнениях 19–25. Особенно важным для нас будет следующий известный факт, который мы предлагаем вам доказать самостоятельно.

**Упражнение 18.** Из всех точек плоскости наименьшая сумма квадратов расстояний до сторон треугольника достигается в точке Лемуана.

Итак, вписанный треугольник с наименьшей суммой квадратов сторон должен быть pedalным треугольником точки Лемуана. Приступаем ко второму шагу.

**Шаг 2. Доказываем.** Мы воспользуемся сформули-

рованным выше свойством точки Лемуана, а также следующим фактом, уже гораздо более простым: *сумма квадратов сторон треугольника втрое больше суммы квадратов расстояний от точки пересечения медиан до его вершин.* Доказать это можно, например, применив формулу для медианы (см. доказательство факта 1) и воспользовавшись тем, что расстояние от центра тяжести до вершины равно  $2/3$  медианы.

Пусть, как всегда,  $A'B'C'$  – произвольный вписанный треугольник. Обозначим через  $G'$  его точку пересечения медиан. Сумма квадратов сторон треугольника  $A'B'C'$  равна утроенной сумме квадратов отрезков  $G'A'$ ,  $G'B'$  и  $G'C'$ , это не меньше, чем утроенная сумма квадратов расстояний от точки  $G'$  до сторон треугольника  $ABC$ , что, в свою очередь, не меньше, чем утроенная сумма квадратов расстояний от точки  $L$  до сторон  $ABC$  (упражнение 18). Поскольку точка Лемуана  $L$  является точкой пересечения медиан своего pedalного треугольника, утроенная сумма квадратов расстояний от  $L$  до сторон треугольника  $ABC$  (т.е. до вершин pedalного треугольника) равна сумме квадратов сторон pedalного треугольника. Итак, сумма квадратов сторон произвольного вписанного треугольника  $A'B'C'$  не меньше, чем сумма квадратов сторон pedalного треугольника точки  $L$ .

**Ответ.** Pedальный треугольник точки Лемуана.

Точка Лемуана была открыта и подробно исследована в 1874 году французским инженером и математиком Эмилем Лемуаном (1840–1912), который по праву считается одним из родоначальников геометрии треугольника. Лемуан также известен своей гипотезой о простых числах (не доказанной и не опровергнутой до сих пор): каждое нечетное число, начиная с 7, представимо в виде суммы  $2p + q$ , где  $p$  и  $q$  – простые числа.



Эмиль Лемуан

Что касается задачи 5, нам не известно, ставилась ли она в литературе ранее.

#### Упражнения

**19.** Высота прямоугольного треугольника, выходящая из прямого угла, является его симедианой. Обратное, если симедиана треугольника совпадает с высотой, то она выходит из прямого угла.

**20.** Симедиана является геометрическим местом точек, расстояния от которых до двух сторон треугольника пропорциональны этим сторонам.

**21.** Симедиана делит стороны треугольника на отрезки, пропорциональные квадратам прилежащих сторон.

**22.** Касательные к окружности  $ABC$ , проведенные в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются на симедиане, выходящей из вершины  $C$ .

**23.** Три симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

**24.** Точка Лемуана прямоугольного треугольника находится в середине высоты, опущенной из прямого угла.

**25.** Три прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана.

**Задача 6.**  $p = \infty$ . В данный треугольник вписать треугольник с наименьшей максимальной стороной.

**Шаг 1. Ищем треугольник.** Интуитивно ясно, что все три стороны должны быть равны, т.е. вписанный треугольник должен быть правильным. Проверим. Во-первых, ни одна из точек  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  не может совпадать с вершиной треугольника  $ABC$ . Если, например,  $B' = C$ , то сторона  $B'C$  не меньше высоты треугольника, опущенной из вершины  $C$ . Таким образом, максимальная сторона треугольника  $A'B'C'$  не меньше наименьшей высоты треугольника  $ABC$ . Пусть  $CC'$  – наименьшая высота. Окружность с центром  $C'$  и радиусом немного меньше отрезка  $C'C$  пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в некоторых точках  $B'$  и  $A'$  соответственно (рис.16). Тогда у получившегося тре-

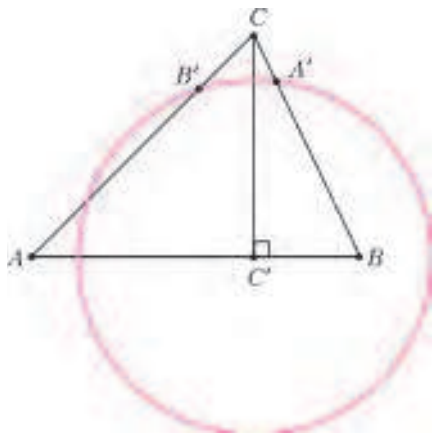


Рис. 16

угольника  $A'B'C'$  максимальная сторона меньше высоты  $CC'$ .

Итак, у треугольника  $A'B'C'$  все вершины лежат внутри сторон исходного треугольника. Пусть  $A'B'$  – наибольшая сторона треугольника  $A'B'C'$ . Если одна из оставшихся сторон не равна  $A'B'$ , например  $A'C' < A'B'$ , то, немного подвинув точку  $A'$  по стороне  $BC$  в одном из двух направлений, мы уменьшаем длину  $A'B'$ . Так мы уменьшили максимальную сторону. Прделав то же, при необходимости, со стороной  $B'C'$ , мы получаем треугольник с меньшим значением максимальной стороны. Значит, треугольник  $A'B'C'$ , дающий решение задачи, обязан быть равносторонним. Но он еще и педальный! Итак,

*если решение задачи существует, то его дает равносторонний педальный треугольник.*

Остается выяснить, у каких точек педальные треугольники – равносторонние.

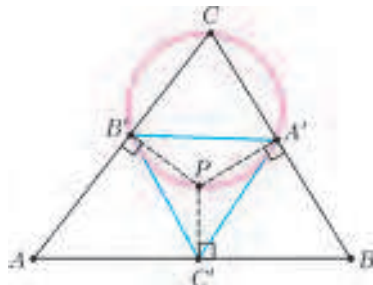


Рис. 17

**Окружности Аполлония и точки Аполлония.** Пусть у точки  $P$  педальный треугольник равносторонний (рис.17). Применив теорему синусов к треугольнику  $A'B'C$ , получаем, что диаметр

его описанной окружности равен  $\frac{A'B'}{\sin \angle C}$ . Этот диаметр совпадает с отрезком  $CP$ . С другой стороны, как мы знаем,  $\sin \angle C = \frac{AB}{2R}$ , где  $R$  – радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ . Таким образом,  $A'B' = \frac{AB \cdot CP}{2R}$ . Так как треугольник  $A'B'C'$  – равносторонний, то получаем главное свойство, характеризующее точку  $P$ :

$$AB \cdot CP = BC \cdot AP = CA \cdot BP.$$

Иначе говоря, *расстояния от точки  $P$  до вершин треугольника обратно пропорциональны длинам сторон.*

Таких точек для неравностороннего треугольника существует две, они называются точками Аполлония. Одна из них лежит внутри описанной окружности (назовем ее внутренней, именно ее будем обозначать буквой  $P$ ), другая – вне нее (обозначаем буквой  $Q$ ). В случае остроугольного треугольника точка  $P$  лежит не только внутри окружности, но и внутри треугольника. Точки  $P$  и  $Q$  переходят друг в друга при инверсии относительно описанной окружности (если вы пока не знакомы с инверсией, пропустите эту фразу, в дальнейшем она не используется). Точки Аполлония являются точками пересечения трех *окружностей Аполлония* треугольника. Оказывается, что внутренняя точка Аполлония  $P$  и дает решение задачи. Свойства точек и окружностей Аполлония мы докажем в упражнениях 26–32, а пока закончим решение.

**Шаг 2. Доказываем.** Пусть  $A'B'C'$  – педальный треугольник точки  $P$ . Он равносторонний, обозначим его сторону через  $a$ . Достаточно доказать, что для любой другой точки  $M$  наибольшая сторона педального треугольника будет больше  $a$ . Хотя бы один из отрезков  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  образует тупой угол с отрезком  $PM$ . Пусть это будет  $PA$ . Тогда  $PA < MA$ . Как мы доказали ранее,  $a = B'C' = PA \cdot \sin \angle A$ . Аналогично, соответствующая сторона педального треугольника точки  $M$  равна  $MA \cdot \sin \angle A > a$ , что и требовалось.

**Ответ.** Педальный треугольник внутренней точки Аполлония.

*Примечание.* Точка Торричелли обозначается буквой  $T$ , точка Лемуана – буквой  $L$ ; точку Аполлония было бы естественно обозначить буквой  $A$ , но она уже использована для вершины треугольника. Поэтому мы назвали ее буквой  $P$ , поскольку полное имя древнегреческого математика – Аполлоний Пергский (262–190 до н.э.). Он – один из трех (наряду с Евклидом и Архимедом) великих геометров античности, автор ряда глубоких теорем о свойствах окружности и других кривых, родоначальник координатного метода (за 18 веков до Декарта!). Именно Аполлоний придумал слова «парабола», «гипербола», «абсцисса», «ордината» и многие другие. Его главное достижение – фундаментальный труд «Коники», который на многие века стал настольной книгой геометров, астрономов и механиков. Одна из 387 теорем, доказанных в этом сочинении, посвящена определению окружности как геометрического места точек, отношение расстояний от кото-

рых до двух данных точек равно заданному числу  $k \neq 1$  (окружность Аполлония, см. упражнение 26).

Задача 6 была предложена А.А.Заславским на заочном туре геометрической олимпиады имени И.Ф.Шарыгина в 2011 году. Условие и авторское решение можно найти на сайте [www.geometry.ru](http://www.geometry.ru).

**Упражнение 26.** Дан неравносторонний треугольник  $ABC$ . Геометрическое место точек  $M$ , для которых  $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC}$  есть окружность (окружность Аполлония треугольника  $ABC$ ). Отрезок между основаниями биссектрис внешнего и внутреннего углов при вершине  $C$  является ее диаметром.

*Указание.* Точки  $D$  и  $E$  – основания биссектрис внешнего и внутреннего углов при вершине  $M$  треугольника  $AMB$ , не зависят от точки  $M$ . Точка  $M$  лежит на окружности с диаметром  $DE$ .

Если  $AC = BC$ , то окружность Аполлония вырождается в прямую – серединный перпендикуляр к стороне  $AB$ . Эту прямую также будем считать окружностью Аполлония. Таким образом, у любого треугольника есть три окружности Аполлония.

#### Упражнения

**27.** Каждая из окружностей Аполлония ортогональна описанной окружности треугольника (окружности называются ортогональными, если их радиусы, проведенные в точку пересечения, перпендикулярны).

**28.** Три окружности Аполлония треугольника пересекаются в двух точках (точки Аполлония). Расстояния от точки Аполлония до вершин треугольника обратно пропорциональны противолежащим сторонам.

**29.** Возьмем четыре точки: вершины треугольника и его точку Аполлония (любую из двух). Каждая из этих точек является точкой Аполлония для треугольника с вершинами в трех оставшихся точках. Такую четверку точек будем называть *четверкой Аполлония*.

**30.** Четыре шара лежат на плоскости и попарно касаются друг друга. Тогда точки их касания с плоскостью образуют четверку Аполлония.

**31.** Общие хорды окружностей Аполлония треугольника с его описанной окружностью являются симедианами.

**32.** Прямая, соединяющая две точки Аполлония треугольника, проходит через точку Лемуана.

#### Заключение

Мы разобрали две геометрические задачи на минимум: о точке, ближайшей к вершинам треугольника, и о вписанном треугольнике с наименьшими сторонами. Вопрос о том, в каком смысле понимать минимум сразу трех величин (трех расстояний до вершин треугольника или, соответственно, трех сторон вписанного треугольника), был решен с помощью  $L_p$ -нормы. Для математика это наиболее естественная и разумная формулировка. Выбирая различные значения  $p$ , мы получаем совершенно разные задачи. Они не только имеют разные ответы, но и, как мы видели, по-разному решаются. Хорошо знакомые нам замечательные точки теперь выступают в новом качестве: точка пересечения медиан – это точка минимума  $L_2$ -нормы расстояний до вершин треугольника, центр описанной окружности – точка минимума  $L_\infty$ -нормы. Выбрав  $p = 1, 2$  и  $\infty$  в задаче о вписан-

ном треугольнике, мы пришли, соответственно, к ортоцентру, точке Лемуана и точке Аполлония. Каждая из этих точек имеет свою особую историю и свои интересные свойства. Теперь оказалось, что на самом деле они происходят из одной и той же задачи, только при разных  $p$ . Попробуйте самостоятельно поставить новые геометрические задачи на минимум с помощью  $L_p$ -нормы. Интересно, к каким еще открытиям это приведет?

#### Вместо послесловия

Разобранные нами задачи имеют схожие формулировки, но совершенно различные решения. Профессиональный математик часто сталкивается с задачами на максимум и минимум. И придумывать для каждой из них новую идею решения – непозволительная роскошь. На это просто не хватит времени. Существует ли для подобных задач какой-либо единый метод? Да, и он вам знаком! По крайней мере, тем, кто закончил 10 класс. Все они решаются с помощью производной. Правда, решения получаются больше аналитические, чем геометрические. И уже, как правило, не столь красивые и интересные. Рассмотрим, например, задачу о кратчайшем пути между двумя точками с заходом на прямую линию.

На плоскости  $Oxy$  точку  $A$  поместим в точку на оси  $Oy$  с координатами  $(0; a)$ ,  $a > 0$ , а точку  $B$  – в точку с координатами  $(c; b)$ ,  $c, b > 0$ . Тогда для любой точки  $M(x; 0)$  оси  $Ox$  длина ломаной  $AMB$  равна  $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (x - c)^2}$ . Теперь для того чтобы найти минимум функции  $f(x)$ , нужно воспользоваться тремя фактами математического анализа: минимум функции достигается в некоторой точке  $x$ , производная функции  $f$  в этой точке равна нулю, и как вычисляется эта производная. Из уравнения  $f'(x) = 0$  получаем  $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (x - c)^2}}$ . Это значит, что  $\frac{x}{AM} = \frac{c - x}{BM}$ , т.е. косинусы углов, которые образуют отрезки  $AM$  и  $BM$  с осью  $Ox$ , равны. Следовательно, эти углы равны.

Получилось вполне коротко, хотя, согласитесь, уже не так изящно и наглядно, как геометрическое решение с применением симметрии. Перенести это рассуждение на наши задачи с первой попытки не получится. В задаче 1 о точке, ближайшей к вершинам треугольника, в качестве переменной выступает уже не число  $x$ , а точка на плоскости. В задаче 2 у нас уже и вовсе три переменные – точки на сторонах треугольника. Поэтому здесь понадобится находить производные функций нескольких переменных. Это можно сделать и увидеть, что, действительно, все наши задачи могут быть решены единообразно, стандартным методом. Более того, с высоты нового знания в этом методе откроются и своя наглядность, и своя красота. Но это уже отдельная тема.

# Планеты иных звезд

**В. СУРДИН**

**В**ОТ БЫ УДИВИЛСЯ АВСТРИЙСКИЙ ФИЗИК КРИСТИАН ДОПЛЕР (1803–1853), если бы узнал, что благодаря физическому эффекту, описанному им в 1842 году и позже названному его именем, в начале XX века будет сделано самое неожиданное астрономическое открытие, а в конце XX века состоится самое долгожданное открытие в истории астрономии. Вы уже догадались, что неожиданным открытием стало обнаружение расширения Вселенной, измеренное по красному смещению линий в спектрах далеких галактик. А самым долгожданным оказалось открытие отнюдь не вселенского масштаба: в 1995 году астрономы доказали, что планеты обращаются не только вокруг Солнца, но и вокруг иных звезд, за пределами Солнечной системы.

Многие авторитеты древности были уверены, что сделать такое открытие в принципе невозможно. Например, великий Аристотель считал, что Земля уникальна и других таких нет. Но некоторые мыслители высказывали надежду о существовании «внесолнечных» планет – вспомним Джордано Бруно! Однако и те, кто верили во «множественность миров», понимали, что обнаружить планеты в окрестности ближайших звезд технически чрезвычайно сложно, если вообще возможно. До изобретения телескопа такая задача даже не ставилась, а возможность существования иных планетных систем обсуждалась лишь умозрительно. Но даже полвека назад астрономы, вооруженные уже весьма совершенными телескопами, рассматривали поиск экзопланет – планет у иных звезд – как неактуальное занятие, как задачу для далеких потомков.

Действительно, с технической точки зрения ситуация выглядела безнадежной. Так, в начале 1960-х годов астрономы и физики обсуждали возможность обнаружения трех типов гипотетических объектов – черных дыр, нейтронных звезд и экзопланет. Правда из этих трех терминов два еще не были даже придуманы – это черные дыры и экзопланеты, но в существование самих объектов такого рода верили многие. Что касается черных дыр, то возможность их обнаружения вообще казалась за гранью разумного – ведь они, по определению, невидимы. В 1967 году случайно удалось обнаружить быстровращающиеся нейтронные звезды с мощным магнитным полем – радиопульсары. Но это был неожиданный «подарок» со стороны радиоастрономии, на который в начале 1960-х никто не рассчитывал. Через несколько лет были открыты аккрецирующие рентгеновские пульсары – нейтронные

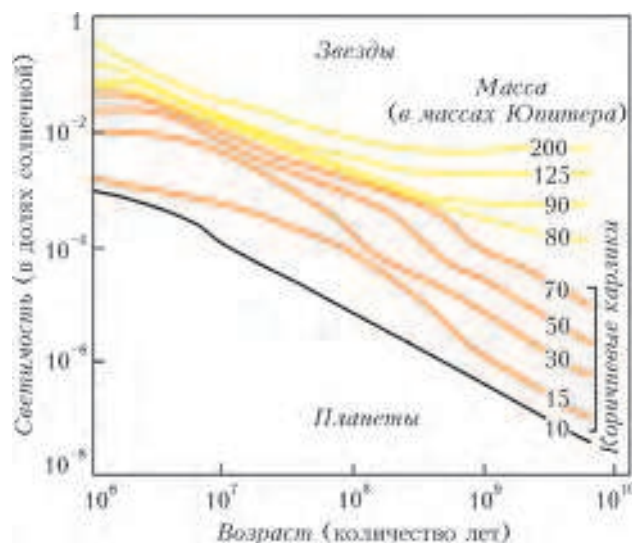
звезды, захватывающие вещество у нормальной звезды-соседки. А спустя всего лишь 30 лет после признания задачи «безнадежной» практически одновременно (1995-96 гг.) были открыты одиночные остывающие нейтронные звезды и планеты у иных звезд! В некотором смысле прогноз оказался верным: открытия и тех и других объектов оказались одинаково трудными, но состоялись они намного раньше, чем ожидали.

## Многообразие планет

Любопытно, что тогда же, в 1996 году, был открыт еще один тип гипотетических объектов, занимающий промежуточное положение между звездами и планетами, – коричневые карлики, которые отличаются от планет-гигантов типа Юпитера лишь тем, что на раннем этапе эволюции в их недрах протекает термоядерная реакция с участием редкого тяжелого изотопа водорода – дейтерия, не дающая, однако, существенного вклада в светимость карлика. И в те же годы были открыты многочисленные малые планеты на периферии Солнечной системы – в поясе Койпера. К 1995 году стало ясно, что эта область населена множеством тел с характерным размером в сотни и тысячи километров, причем некоторые из них больше Плутона и имеют собственные спутники. По своим массам объекты пояса Койпера заполнили промежуток между планетами и астероидами, а коричневые карлики заполнили промежуток между планетами и звездами. В связи с этим потребовалось точно определить термин «планета».

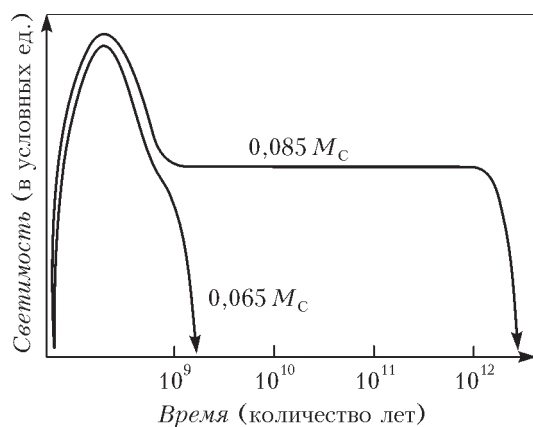
Верхняя граница планетных масс, отделяющая их от коричневых карликов и в целом от звезд, была определена на основе их внутреннего источника энергии. Считается общепринятым, что планета – это объект, в котором за всю его историю не происходят реакции ядерного синтеза. Как показывают расчеты, сделанные для тел нормального (т.е. солнечного) химического состава, при формировании космических объектов с массой более 13 масс Юпитера ( $M_{Ю}$ ) в конце этапа их гравитационного сжатия температура в центре достигает нескольких миллионов кельвинов, что приводит к развитию термоядерной реакции с участием дейтерия. При меньших массах объектов ядерные реакции в их недрах не происходят. Поэтому массу в  $13 M_{Ю}$  считают максимальной массой планеты. Объекты с массами от 13 до  $70 M_{Ю}$  называют коричневыми карликами. А еще более массивные – звездами, в них происходит термоядерное горение распространенного легкого изотопа водорода. (Для справки:  $1 M_{Ю} = 318$  масс Земли ( $M_{З}$ ) = 0,001 массы Солнца ( $M_{С}$ ) =  $2 \cdot 10^{27}$  кг.)

По своим внешним проявлениям коричневые карлики ближе к планетам, чем к звездам. В процессе формирования, в результате гравитационного сжатия, все эти тела сначала разогреваются, и их светимость быстро возрастает. Затем, после достижения гидростатического равновесия и остановки сжатия, их поверхность начинает охлаждаться, и светимость снижается. У звезд охлаждение надолго прекращается после начала термоядерных реакций и их выхода на стационарный режим. У коричневых карликов охлаждение лишь



*Эволюция светимости маломассивных звезд, коричневых карликов и планет после этапа их гравитационного сжатия и разогрева*

немного замедляется в период горения дейтерия. А у планет поверхность охлаждается монотонно. В результате как планеты, так и коричневые карлики практически остывают за сотни миллионов лет, а маломассив-



*Эволюция светимости двух протозвезд, имеющих массы чуть больше и чуть меньше нижнего предела ( $0,07 M_{\odot}$ ), необходимого для протекания термоядерной реакции с участием легкого изотопа водорода*

ные звезды остаются горячими в тысячи раз дольше. Тем не менее, по формальному признаку — наличию или отсутствию термоядерных реакций — планеты и коричневые карлики отделены друг от друга.

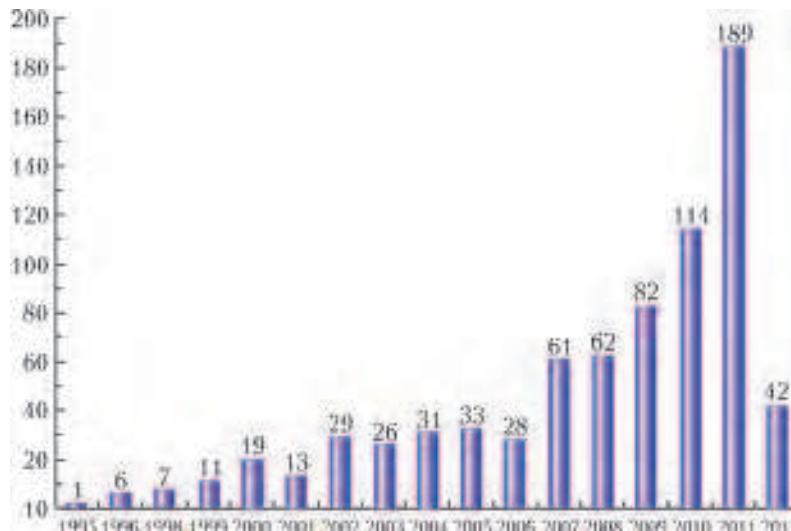
Нижняя граница планетных масс, отделяющая их от астероидов, также имеет физическое обоснование. Минимальной массой планеты считается та, при которой в недрах планеты давление силы тяжести еще превосходит прочность ее материала. Таким образом, в самом общем виде «планета» определяется как небесное тело, достаточно массивное для того, чтобы собственная гравитация придавала ему сфероидальную форму, но не достаточно массивное для того, чтобы в его недрах протекали термоядерные реакции. Этот диапазон масс простирается приблизительно от 1%

массы Луны до 13 масс Юпитера, т.е. от  $7 \cdot 10^{20}$  кг до  $2 \cdot 10^{28}$  кг.

Однако само понятие «планета» астрономы разделили на несколько подтипов в связи с характером орбитального движения. Во-первых, если тело планетной массы обращается вокруг более крупного подобного тела, то его называют спутником (пример — наша Луна). Собственно планета (иногда говорят «классическая планета») определяется как объект Солнечной системы, достаточно массивный, чтобы под действием собственной гравитации принять гидростатически равновесную (сфероидальную) форму, и при этом не имеющий рядом со своей орбитой тел сравнимой с ним массы. Этим условиям удовлетворяют только Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун. Наконец, введен новый класс объектов Солнечной системы — «планеты-карлики», или «карликовые планеты». Эти тела должны удовлетворять следующим условиям: обращаться вокруг Солнца; не являться спутником планеты; обладать достаточной массой, чтобы сила тяжести превосходила сопротивление вещества и тело планеты имело сфероидальную форму; обладать не настолько большой массой, чтобы быть способной расчистить окрестности своей орбиты от прочих тел. Прототипом планет-карликов стал Плутон (диаметр 2310 км), а всего их пока пять: помимо Плутона это Эрида (2330 км), Хаумея (1200 км), Макемаке (1400 км) и Церера (975×909 км), ранее считавшаяся крупнейшим астероидом.

Таким образом, в Солнечной системе имеются: 1) классические планеты; 2) карликовые планеты; 3) спутники с массой планет (их около дюжины), которые можно называть «планетами-спутниками». Объект с массой планеты, находящийся за пределом Солнечной системы, называют «экзопланетой» либо «внесолнечной планетой». Пока эти термины равноправны и по частоте употребления, и по смыслу (напомним, что греческая приставка *экзо-* означает «вне», «снаружи»). Сейчас оба эти термина почти без исключения относятся к планетам, гравитационно связанным с какой-либо звездой за исключением Солнца. Однако уже найдены и, возможно, существуют в немалом количестве самостоятельные планеты, обитающие в межзвездном пространстве. По отношению к ним обычно используется термин «свободно плавающие планеты».

На 14 марта 2012 года подтверждено открытие 760 экзопланет в 609 планетных системах. При этом сто систем содержат не менее двух планет, а две — не менее шести. Ближайшая экзопланета обнаружена у звезды ε Эридана, на расстоянии 10 световых лет от Солнца. Подавляющее большинство экзопланет обнаружено с использованием различных косвенных методов детектирования, но некоторые уже наблюдались непосредственно. Большинство замеченных экзопланет — это газовые гиганты типа Юпитера и Сатурна, обращающиеся недалеко от звезды. Очевидно, это объясняется ограниченными возможностями методов регистрации: массивную планету на короткопериодической орбите легче обнаружить. Но с каждым годом удается откры-



Количество экзопланет, обнаруженных в указанном году (данные на 14 марта 2012 года из «Каталога экзопланет»)

вать все менее массивные и более удаленные от звезды планеты. Сейчас уже обнаружены объекты, по массе и параметрам орбиты почти не отличающиеся от Земли.

#### Методы поиска экзопланет

Предложено довольно много различных методов поиска экзопланет, но мы отметим лишь те (табл.1), которые уже доказали свою состоятельность, и кратко обсудим их. Прочие методы либо находятся в процессе разработки, либо пока не дали результата.

**Прямое наблюдение экзопланет.** Планеты – холодные тела, сами они не излучают свет, а лишь отражают лучи своего солнца. Поэтому планету, расположенную вдали от звезды, практически невозможно обнаружить в оптическом диапазоне. Но даже если планета движется вблизи звезды и хорошо освещена ее лучами, для нас она трудноразличима из-за гораздо более яркого блеска самой звезды.

Попробуем посмотреть на нашу Солнечную систему со стороны, например от ближайшей к нам звезды  $\alpha$  Кентавра. Расстояние до нее 4,34 световых года, или 275 тысяч астрономических единиц (напомним: 1 аст-

рономическая единица = 1 а.е. = 150 млн км – это расстояние от Земли до Солнца). Для тамошнего наблюдателя Солнце будет сиять так же ярко, как звезда Вега на земном небосводе. А блеск наших планет окажется очень слабым и к тому же сильно зависящим от ориентации в его сторону дневного полушария планеты. В таблице 2 приведены самые «выгодные» значения углового расстояния планет от Солнца и их оптического блеска. Понятно, что одновременно они реализоваться не могут: при максимальном угловом расстоянии планеты от Солнца ее яркость будет примерно вдвое меньше максимальной. Как видим, лидером по обнаружимости является Юпитер, а за ним идут Венера, Сатурн и Земля. Вообще говоря, крупнейшие современные телескопы без особого труда могли бы заметить такие тусклые объекты, если бы на небе рядом с ними не было чрезвычайно яркой звезды. Но для далекого наблюдателя угловое

расстояние планет от Солнца очень мало, что делает задачу их обнаружения чрезвычайно сложной.

Тем не менее, астрономы сейчас создают приборы, которые решат эту задачу. Например, изображение яркой звезды можно закрыть экраном, чтобы ее свет не

Таблица 2. Солнечная система при наблюдении с расстояния  $\alpha$  Кентавра

| Планета  | Максимальное угловое расстояние от Солнца, (миллисекунды дуги) | Максимальный блеск (звездное величина) |
|----------|--|--|
| Меркурий | 0,3"   | 25 <sup>m</sup>                        |
| Венера   | 0,5  | 22                                     |
| Земля    | 0,8  | 23                                     |
| Луна     | 0,8  | 27                                     |
| Марс     | 1,1  | 27                                     |
| Юпитер   | 3,9  | 21                                     |
| Сатурн   | 7,2  | 23                                     |
| Уран     | 14   | 26                                     |
| Нептун   | 23   | 28                                     |
| Плутон   | 30   | 34                                     |

Таблица 1. Методы поиска экзопланет

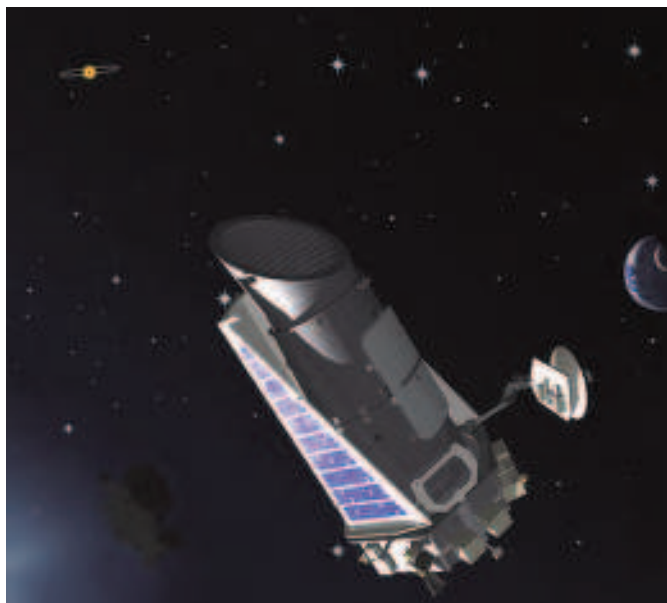
| Название метода                  | Принцип метода   |
|----------------------------------|--|
| Регистрация изображений          | Получение прямого изображения экзопланеты путем регистрации ее излучения (собственного или отраженного ею света звезды)  |
| Астрометрический метод           | Поиск периодических колебаний положения звезды в плоскости небесной сферы, вызванных ее обращением вокруг центра масс планетной системы  |
| Метод лучевых скоростей          | Поиск периодических колебаний лучевой скорости звезды, вызванных ее обращением вокруг центра масс планетной системы  |
| Фотометрия проходов              | Регистрация кратковременного уменьшения блеска звезды при проходе планеты на фоне звездного диска («затмение» звезды планетой)   |
| Хронометраж                      | Наблюдаются регулярные отклонения в моментах прихода периодических сигналов, вызванные изменением расстояния до их источника, совершающего орбитальное движение                                      |
| Гравитационное микролинзирование | Поиск кратковременного усиления блеска звезды заднего фона в результате искривления ее лучей в гравитационном поле более близкой к нам звезды с планетной системой или свободно «дрейфующей» планеты |



мешал искать находящуюся рядом планету. Такой прибор называют звездным коронографом. Другой метод предполагает «гашение» света звезды за счет эффекта интерференции ее световых лучей, собранных двумя или несколькими расположенными рядом телескопами, – так называемым звездным интерферометром. Поскольку звезда и расположенная рядом с ней планета наблюдаются в чуть-чуть разных направлениях, с помощью звездного интерферометра (изменяя расстояние между телескопами или правильно выбирая момент наблюдения) можно добиться почти полного гашения света звезды и одновременно – усиления света планеты. Оба описанных прибора – коронограф и интерферометр – очень чувствительны к влиянию земной атмосферы, поэтому для успешной работы, видимо, придется доставить их на околоземную орбиту.

**Измерение яркости звезды.** Косвенный метод обнаружения экзопланет – метод прохождений – основан на наблюдении яркости звезды, на фоне диска которой перемещается планета. Только для наблюдателя, расположенного в плоскости орбиты экзопланеты, она время от времени должна затмевать свою звезду. Если это звезда типа Солнца, а экзопланета типа Юпитера, диаметр которого в 10 раз меньше солнечного, то в результате такого затмения яркость звезды понизится на 1%. Это можно заметить с помощью наземного телескопа. Но экзопланета земного размера закроет только 0,01% поверхности звезды, а столь малое снижение яркости трудно измерить сквозь беспокойную земную атмосферу; для этого нужен космический телескоп.

Вторая проблема этого метода состоит в том, что доля экзопланет, плоскость орбиты которых точно ориентирована на Землю, весьма невелика. К тому же затмение длится несколько часов, а интервал между затмениями



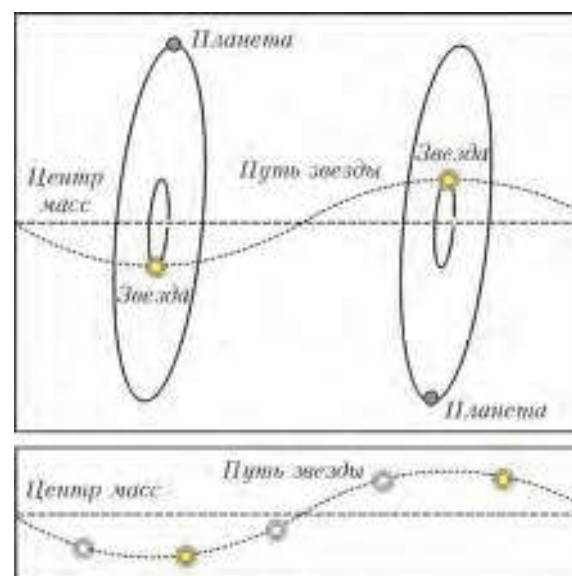
Космический телескоп «Кеплер» непрерывно следит за сотнями тысяч звезд, ожидая, когда перед некоторыми из них проплывут неведомые планеты

– годы. Тем не менее, прохождения экзопланет перед звездами уже многократно наблюдались.

Существует также весьма экзотический метод поиска одиночных планет, свободно «дрейфующих» в межзвездном пространстве. Такое тело можно обнаружить по эффекту гравитационной линзы, возникающему в тот момент, когда невидимая планета проходит на фоне далекой звезды. Своим гравитационным полем планета искажает ход световых лучей, идущих от звезды к Земле; подобно обычной линзе, она концентрирует свет и увеличивает яркость звезды для земного наблюдателя. Это очень трудоемкий метод поиска экзопланет, требующий длительного наблюдения за яркостью тысяч и даже миллионов звезд. Но автоматизация астрономических наблюдений уже позволяет его использовать.

По указанным причинам основная роль в поиске экзопланет, подобных Земле, отводится космическим инструментам. С 2007 года ведет наблюдения европейский спутник COROT, телескоп которого диаметром 27 см оснащен чувствительным фотометром. Поиск планет осуществляется методом прохождений. Обнаружено уже несколько планет-гигантов и даже одна планета, размер которой лишь немногим больше, чем у Земли. В 2009 году на гелиоцентрическую орбиту выведен спутник «Кеплер» (NASA) с телескопом диаметром 95 см, способный непрерывно измерять блеск более 100 тысяч звезд. С помощью этого телескопа обнаружены уже сотни экзопланет.

**Измерение положения звезды.** Весьма перспективными считаются методы, в которых измеряется движение звезды, вызванное обращением вокруг нее планеты. В качестве примера вновь рассмотрим Солнечную систему. Сильнее всех на Солнце влияет массивный Юпитер: в первом приближении нашу планетную



Взаимное движение звезды и планеты. Центр масс системы «звезда–планета» движется прямолинейно (пунктир). Звезда и планета обращаются вокруг центра масс по подобным орбитам в противофазе (вверху). Наблюдая звезду, можно заметить ее «покачивания», указывающие на присутствие планеты

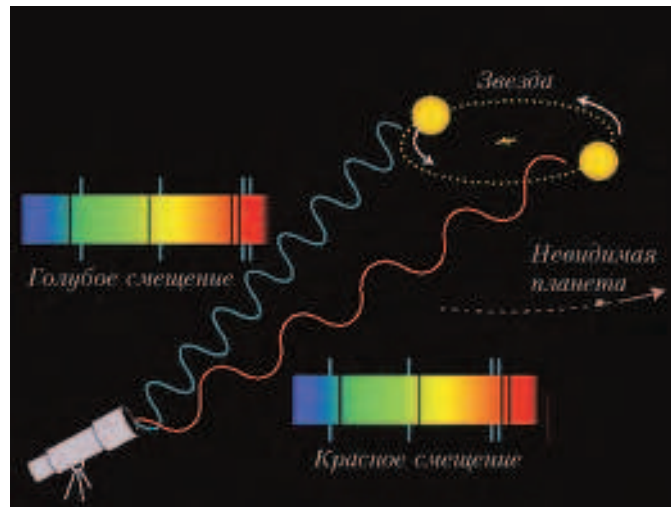
систему вообще можно рассматривать как двойную систему из Солнца и Юпитера, разделенных расстоянием 5,2 а. е. и обращающихся с периодом около 12 лет вокруг общего центра масс. Поскольку Солнце примерно в 1000 раз массивнее Юпитера, оно во столько же раз ближе к центру масс. Значит, Солнце с периодом около 12 лет обращается по окружности радиусом  $5,2 \text{ а. е.} / 1000 = 0,0052 \text{ а. е.}$ , который лишь немногим больше радиуса самого Солнца. Со звезды  $\alpha$  Кентавра радиус этой окружности виден под углом  $0,004''$ . (Это очень маленький угол: под таким углом нам видится толщина карандаша с расстояния почти 360 км.) Но астрономы умеют измерять столь малые углы, и поэтому уже несколько десятилетий ведут наблюдение за ближайшими звездами в надежде заметить их периодическое «покачивание», вызванное присутствием планет. В самое последнее время это удалось сделать с поверхности Земли, но перспективы астрометрического поиска экзопланет, безусловно, связаны с запуском специализированных спутников, способных измерять положения звезд с точностью до миллисекунд дуги.

**Измерение скорости звезды.** Заметить периодические колебания звезды можно не только по изменению ее видимого положения на небе, но и по изменению расстояния до нее. Вновь рассмотрим систему Юпитер-Солнце, имеющую отношение масс 1:1000. Поскольку Юпитер движется по орбите со скоростью 13 км/с, скорость движения Солнца по его собственной небольшой орбите вокруг центра масс системы составляет 13 м/с. Для удаленного наблюдателя, расположенного в плоскости орбиты Юпитера, Солнце с периодом около 12 лет меняет свою скорость с амплитудой 13 м/с.

Для точного измерения скоростей звезд астрономы используют эффект Доплера. Он проявляется в том, что в спектре звезды, движущейся относительно земного наблюдателя, изменяется длина волны всех линий: если звезда приближается к Земле, линии смещаются к синему концу спектра, если удаляется – к красному. При нерелятивистских скоростях движения эффект Доплера чувствителен лишь к лучевой скорости звезд,

**Таблица 3. Астрономические (угловые) колебания положения Солнца и доплеровские колебания его скорости под влиянием планет**

| Планета  | Угловые колебания при наблюдении с расстояния 10 световых лет (миллисекунды дуги) | Доплеровские колебания лучевой скорости при наблюдении в плоскости эклиптики (метры в секунду) |
|----------|---|--|
| Меркурий | 0,00002   | 0,008  |
| Венера   | 0,00058   | 0,086  |
| Земля    | 0,00098   | 0,089  |
| Марс     | 0,0016  | 0,008  |
| Юпитер   | 1,6   | 13   |
| Сатурн   | 0,89  | 2,8  |
| Уран     | 0,27  | 0,3  |
| Нептун   | 0,51  | 0,3  |
| Плутон   | 0,00008   | 0,00003  |
| Эрида    | 0,00015   | 0,00003  |



*В спектре звезды, обращающейся вокруг общего центра масс с невидимой планетой, доплеровское смещение спектральных линий периодически меняется с красного на голубое*

ды, т.е. к проекции полного вектора ее скорости на луч зрения наблюдателя (это прямая, соединяющая наблюдателя со звездой). Поэтому скорость движения звезды, а значит, и масса планеты определяются с точностью до множителя  $\cos \beta$ , где  $\beta$  – угол между плоскостью орбиты планеты и лучом зрения наблюдателя. Вместо точного значения массы планеты ( $M$ ) метод Доплера дает лишь нижнюю границу ее массы ( $M \cos \beta$ ).

Обычно угол  $\beta$  неизвестен. Лишь в тех случаях, когда наблюдаются прохождения планеты по диску звезды, можно быть уверенным, что угол  $\beta$  близок к нулю. В таблице 3 показаны характерные значения доплеровской скорости и углового смещения Солнца под влиянием каждой из планет при наблюдении от соседних звезд. Плутон и Эрида здесь присутствуют как представители планет-карликов.

Как видим, влияние планеты вызывает движение звезды со скоростью, в лучшем случае, несколько метров в секунду. Можно ли заметить перемещение звезды со скоростью пешехода? До конца 1980-х годов ошибка измерения скорости оптической звезды методом Доплера составляла не менее 500 м/с. Но затем были разработаны принципиально новые спектральные приборы, позволившие повысить точность до 10 м/с. Эта техника сделала возможным открытие первых экзопланет с массами больше, чем у Юпитера.

Продвижение в сторону планет с массами меньше, чем у Юпитера, требует повышения точности измерения скорости звезды в 10–100 раз. Успехи в этом направлении вполне ощутимы. Сейчас один из наиболее точных звездных спектрометров работает на 3,6-метровом телескопе Европейской южной обсерватории Ла-Силья (Чили). Спектр звезды сравнивается в нем со спектром торий-аргоновой лампы. Чтобы исключить влияние флуктуаций температуры и давления воздуха, весь прибор помещен в вакуумный контейнер, а свет звезды и

лампы сравнения подается к нему от телескопа через стекловолоконный кабель. Точность измерения скорости звезд при этом составляет 1 м/с. Мог ли представить себе это Кристиан Доплер?!

#### Открытия экзопланет

**Астрометрический поиск.** Исторически первые попытки обнаружить экзопланеты связаны с наблюдениями за положением близких звезд. В 1916 году американский астроном Эдуард Барнард (1857–1923) обнаружил, что тусклая красная звезда в созвездии Змееносец быстро перемещается по небу относительно других звезд – на  $10''$  в год. Позже астрономы назвали ее «Летящей звездой Барнарда». Хотя все звезды хаотически перемещаются в пространстве со скоростями 20–50 км/с, при наблюдении с большого расстояния эти перемещения остаются практически незаметными. Звезда Барнарда – весьма заурядное светило, поэтому возникло подозрение, что причиной ее наблюдаемого «полета» служит не особенно большая скорость, а просто необычная близость к нам. Действительно, звезда Барнарда оказалась на втором месте от Солнца после системы  $\alpha$  Кентавра.

Масса звезды Барнарда почти в 7 раз меньше массы Солнца, значит, влияние на нее соседей-планет (если они есть) должно быть весьма заметным. Более полувека, начиная с 1938 года, изучал движение этой звезды американский астроном Питер ван де Камп (1901–1995). Он измерил ее положение на тысячах фотопластинок и заявил, что у звезды обнаруживается волнообразная траектория с амплитудой покачивания около  $0,02''$ , а значит, вокруг нее обращается невидимый спутник. Из расчетов следовало, что масса спутника чуть больше массы Юпитера, а радиус его орбиты равен 4,4 а.е. В начале 1960-х годов это сообщение облетело весь мир и получило широкий резонанс. Ведь это было первое десятилетие практической космонавтики и поиска внеземных цивилизаций, поэтому энтузиазм людей в отношении новых открытий в космосе был чрезвычайно велик.

К исследованию звезды Барнарда подключились и другие астрономы. К 1973 году они выяснили, что эта звезда движется ровно, без колебаний, а значит, массивных планет в качестве спутников не имеет. Таким образом, первая попытка найти экзопланету окончилась неудачей. А первое надежное астрометрическое обнаружение экзопланеты состоялось лишь в 2009 году. После 12 лет наблюдений с помощью 5-метрового Паломарского телескопа за тридцатью звездами американские астрономы Стивен Правдо и Стюарт Шаклан обнаружили планету у крохотной переменной звезды «ван Бисбрук 10» в двойной системе Глизе 752. Эта звезда – одна из самых маленьких в Галактике: это красный карлик спектрального класса M8, уступающий Солнцу в 12 раз по массе и в 10 раз по диаметру. А светимость этой звезды столь мала, что если заменить ею наше Солнце, то днем Земля была бы освещена как сейчас лунной ночью. Именно благодаря малой массе звезды обнаруженная планета смогла «раскачать» ее до заметной амплитуды: с пе-

риодом около 272 суток положение звезды на небе изменяется на  $0,006''$  (тот факт, что это удалось измерить, – настоящий триумф наземной астрометрии). Сама планета-гигант обращается по орбите с большой полуосью 0,36 а.е. (как у Меркурия) и имеет массу  $6,4M_{Ю}$ , т.е. она легче своей звезды всего в 14 раз, а по размеру даже не уступает ей.

**Успех доплеровского метода.** Первую экзопланету обнаружили в 1995 году астрономы Женевской обсерватории Мишель Майор и Дидье Келоз, построившие оптический спектрометр, определяющий доплеровское смещение линий с точностью до 13 м/с. Любопытно, что американские астрономы под руководством Джеффри Марси создали подобный прибор раньше и еще в 1987 году приступили к систематическому измерению скоростей нескольких сотен звезд, но им не повезло сделать открытие первыми. В 1994 году Майор и Келоз приступили к измерению скоростей 142 звезд из числа ближайших к нам и по своим характеристикам похожих на Солнце. Довольно быстро они обнаружили «покачивания» звезды 51 в созвездии Пегас, удаленной от Солнца на 49 световых лет. Колебания этой звезды происходят с периодом 4,23 сут и, как заключили астрономы, вызваны влиянием планеты с массой  $0,47M_{Ю}$ .

Это удивительное соседство озадачило ученых: совсем рядом со звездой, как две капли воды похожей на Солнце, мчится планета-гигант, обегая ее всего за четыре дня; расстояние между ними в 20 раз меньше, чем от Земли до Солнца. Не сразу поверили астрономы в это открытие. Ведь обнаруженная планета-гигант из-за ее близости к звезде должна быть нагрета до 1000 К. «Горячий юпитер»? Такого сочетания никто не ожидал. Однако дальнейшие наблюдения подтвердили открытие этой планеты. Для нее даже было предложено имя – Эпикур, но оно пока не получило признания. Затем обнаружили и другие системы, в которых планета-гигант обращается очень близко к своей звезде.

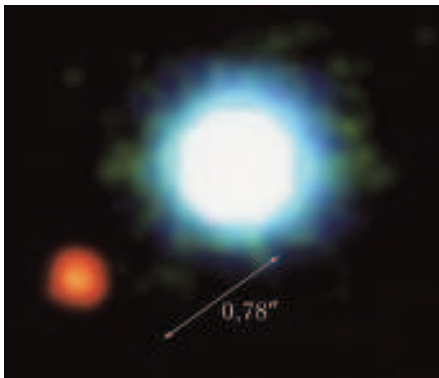
**«Затмения» звезд планетами.** Метод прохождений также доказал свою эффективность. Сейчас фотометрические наблюдения за звездами ведутся как с борта космических обсерваторий, так и с Земли. Все современные фотометрические инструменты имеют широкое поле зрения. Измеряя одновременно блеск миллионов звезд, астрономы существенно увеличивают свой шанс обнаружить прохождение планеты по диску звезды. При этом, как правило, обнаруживаются планеты, часто демонстрирующие «затмение» звезды, т. е. имеющие короткий орбитальный период, а значит – компактную орбиту.

Термин «горячий юпитер» стал настолько привычным, что никого уже особенно не удивило открытие в 2009 году планеты (WASP-18b), имеющей массу  $10M_{Ю}$  и обращающейся по почти круговой орбите на расстоянии 0,02 а. е. от своей звезды. Орбитальный период этой планеты составляет всего 23 часа! Учитывая, что звезда обладает большей светимостью, чем Солнце, температура поверхности планеты должна достигать 3800 К – это уже не просто горячий, а «раскаленный

юпитер». Из-за близости к звезде и из-за своей большой массы планета вызывает сильные приливные возмущения на поверхности звезды, которые, в свою очередь, тормозят планету и в будущем приведут к ее падению на звезду.

### Фотографии экзопланет

Несмотря на огромные трудности, астрономам все же удалось сфотографировать экзопланеты имеющимися средствами! Правда, средства эти были лучшими из лучших: космический телескоп «Хаббл» и крупнейшие наземные телескопы. Среди технических ухищрений – заслонка, отсекающая свет звезды, и светофильтры, пропускающие в основном инфракрасное излучение планеты в диапазоне длин волн 2–4 мкм, что соответствует температуре примерно 1000 К (в этом диапазоне планета выглядит более контрастно по отношению к звезде).



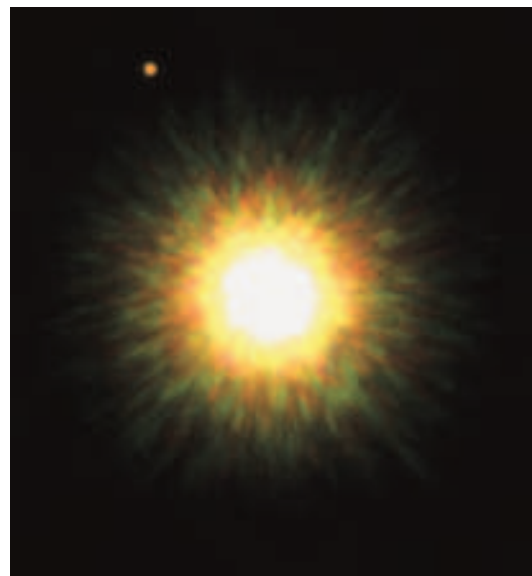
*Планета 2M1207b (слева) – первое в истории изображение экзопланеты. Она имеет массу от 3 до 10 $M_{Ю}$  и обращается вокруг коричневого карлика массой 25 $M_{Ю}$ . Угловое расстояние между ними составляет 0,781, что на расстоянии до этой системы в 173 световых года соответствует линейному расстоянию 41 а.е. (примерно как от Солнца до Плутона). Снимок получен в ближнем ИК диапазоне на 8,2 метровом телескопе Европейской южной обсерватории (Чили) в 2004 году*

С начала 2004 года по март 2012 года получено 31 изображение экзопланет в 27 планетных системах. Например, в протопланетном диске, окружающем молодую звезду  $\beta$  Живописца, сфотографирована планета, весьма похожая на Юпитер, только массивнее. Ситуация там напоминает молодую Солнечную систему, в которой новорожденный Юпитер активно влиял на формирование в околосолнечном диске остальных планет. Наблюдать этот процесс «вживую» давно мечтали астрономы.

В конце 2008 года с помощью телескопа «Хаббл» удалось сфотографировать планету в пылевом диске, окружающем яркую звезду Фомальгаут ( $\alpha$  Южной Рыбы). Хотя эта звезда светит почти в 20 раз мощнее Солнца, она не могла бы настолько сильно осветить свою планету, чтобы сделать ее заметной с Земли. Ведь обнаруженная планета удалена от Фомальгаута в 115 раз дальше, чем Земля от Солнца. Поэтому астрономы предполагают, что планета окружена гигантским отражающим свет кольцом, намного большим кольца Са-

турна. В нем, по-видимому, формируются спутники этой планеты, как в эпоху юности Солнечной системы формировались спутники планет-гигантов.

Не менее любопытна и фотография сразу трех планет у звезды HR 8799 в созвездии Пегас, полученная с помощью наземных телескопов «Кек» и «Джемини». Эта система удалена от нас примерно на 130 световых лет. Каждая из ее планет почти на порядок массивнее Юпитера, но движутся они примерно на тех же расстояниях от своей звезды, что и наши планеты-гиганты. В проекции на небо эти расстояния составляют 24, 38 и 68 а.е. Весьма вероятно, что на месте Венеры, Земли и Марса в той системе обнаружатся земледобные планеты. Но пока это за пределами технических возможностей.

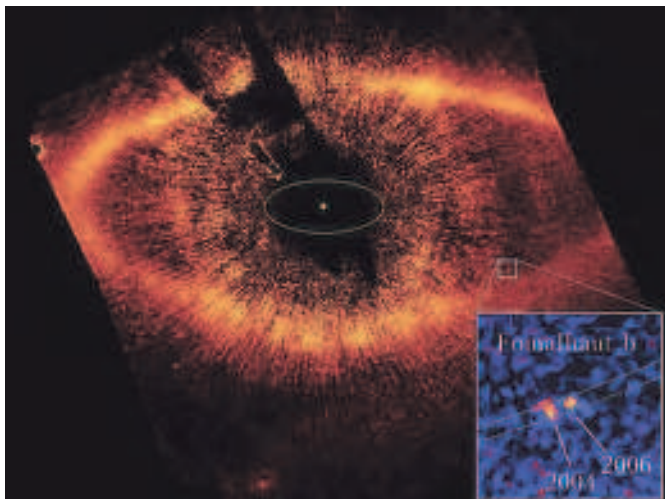


*Первое изображение планеты (вверху слева) вблизи нормальной звезды солнечного типа. Эта звезда удалена от нас на 490 световых лет, имеет массу 0,85 $M_{С}$  и температуру поверхности 4060 К. А планета в 8 раз массивнее Юпитера, и температура ее поверхности 1800 К (поэтому она светится сама). Возраст звезды и планеты, вероятно, около 5 миллионов лет. Расстояние между ними в проекции около 330 а.е. Фото получено в 2008 году в ближнем ИК диапазоне телескопом Джемини-Север (обсерватория Мауна-Кеа, Гавайские острова)*

Получение прямых снимков экзопланет – важнейший этап в их изучении. Во-первых, этим окончательно подтверждается их существование. Во-вторых, открыт путь к изучению свойств этих планет: их размеров, температуры, плотности, характеристик поверхности. И самое волнующее – не за горами расшифровка спектров этих планет, а значит, выяснение газового состава их атмосферы. О такой возможности давно мечтают экзобиологи.

### Впереди – самое интересное!

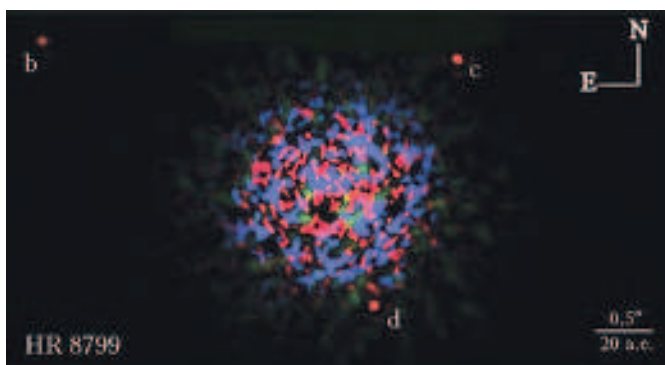
Обнаружение первых внесолнечных планетных систем стало одним из крупнейших научных достижений XX века. Решена важнейшая проблема: теперь мы точно знаем, что Солнечная система не уникальна, что формирование планет рядом со звездами – это законо-



В мощном пылевом диске (красный) вокруг звезды Фомальгаут (желтая точка в центре указывает ее положение) космический телескоп «Хаббл» дважды сфотографировал планету (в белом квадрате) — в 2004 и в 2006 году. Сама звезда закрыта темным экраном. Тонкие радиальные лучи — технический эффект. Желтый эллипс, показанный для масштаба, имеет размер орбиты Нептуна. За два года экзопланета сместилась незначительно, поскольку период ее обращения по орбите составляет около 900 лет

мерный этап эволюции. Несколько столетий астрономы бьются над загадкой происхождения Солнечной системы. Главная проблема заключается в том, что нашу планетную систему до сих пор не с чем было сравнивать. Теперь ситуация изменилась: в последнее время астрономы открывают в среднем по 2–3 планетные системы в неделю. В первую очередь, что естественно, в них заметны планеты-гиганты, но уже обнаруживаются и планеты земного типа. Становится возможной классификация и сравнительное изучение планетных систем. Это значительно облегчит отбор жизнеспособных гипотез и построение правильной теории формирования и ранней эволюции планетных систем, в том числе — нашей Солнечной системы.

В то же время стало ясно, что наша планетная система нетипична: ее планеты-гиганты, движущиеся



Планетная система звезды HR 8799. Изображение в условных цветах получено в ближнем ИК диапазоне с использованием тонкой техники цифровой обработки данных. Разноцветное пятно в центре — это шум, оставшийся от изображения звезды после операции его «глушения». Изображения планет отмечены буквами b, c, d

по круговым орбитам вне «зоны жизни» (область умеренных температур вокруг Солнца), позволяют длительное время существовать внутри этой зоны планетам земного типа, одна из которых — Земля — даже имеет биосферу. Среди обнаруженных экзопланетных систем большинство не обладает этим качеством. Мы понимаем, конечно, что массовое обнаружение «горячих юпитеров» — временное явление, связанное с ограниченными возможностями нашей техники. Но сам факт существования таких систем поражает: очевидно, что газовый гигант не может сформироваться рядом со звездой, но тогда как же он туда попал?

В поисках ответа на этот вопрос теоретики моделируют формирование планет в околозвездных газопылевых дисках и узнают при этом много нового. Оказывается, планета в период своего роста может путешествовать (мигрировать) по диску, приближаясь к звезде или удаляясь от нее, в зависимости от структуры диска, массы планеты и ее взаимодействия с другими планетами. Эти теоретические исследования чрезвычайно интересны, поскольку результаты моделирования можно сразу же проверять на новом наблюдательном материале. Расчет эволюции протопланетного диска занимает на хорошем компьютере около недели, а за это время наблюдатели успевают открыть пару новых планетных систем.

Без преувеличения можно сказать, что открытие внесолнечных планет — это великое событие в истории науки. Сделанное на исходе XX века, оно в перспективе станет одним из важнейших событий прошедшего века, наравне с овладением ядерной энергией, выходом в космос и открытием механизмов наследственности. Уже сейчас ясно, что недавно начавшийся XXI век станет временем расцвета планетологии — ветви астрономии, изучающей природу и эволюцию планет. Несколько столетий лаборатория планетологов ограничивалась дюжиной объектов Солнечной системы, и вдруг, всего за несколько лет, число доступных объектов увеличилось в сотни раз, а диапазон условий, в которых они существуют, оказался обескураживающе широким. Современного планетолога можно уподобить биологу, который многие годы изучал лишь флору и фауну пустыни и вдруг попал в тропический лес. Сейчас планетологи находятся в состоянии легкого шока, но скоро они оправятся и сориентируются в гигантском многообразии новооткрытых планет.

Вторая наука, а точнее протонаука, ощущающая мощный эффект от открытия планет у иных звезд, — это биология внеземной жизни, экзобиология. Учитывая темп обнаружения и исследования экзопланет, можно ожидать, что XXI век принесет нам открытие биосфер на некоторых из них и ознаменует этим долгожданное и окончательное рождение экзобиологии, до сих пор развивавшейся в скрытом состоянии из-за отсутствия реального объекта исследования.

# О трех работах Эйнштейна 1905 года

**В. ТИХОМИРОВ**

**Р**ОДИТЕЛИ АЛЬБЕРТА ЭЙНШТЕЙНА (1879–1955) беспокоились о судьбе своего сына. Он казался им ни на что не способным. Учился он неважно. Они даже вынуждены были отправить его в Швейцарию, где преподавание было либеральнее, чем в Германии. Там он кончил гимназию и поступил в Цюрихский университет. В университете Альберт учился без блеска. Герман Минковский, лекции которого слушал Эйнштейн, невысоко оценивал его возможности. Ни о какой научной карьере речь не шла, и юноша устроился на скромную должность эксперта в патентное бюро. Ему пошел двадцать шестой год, однако ничего, кроме нескольких заметок, на которые никто не обратил внимания, у Эйнштейна не было.

Но внутри молодого человека шла огромная, неведомая никому творческая работа, итоги которой выплеснулись в 1905 году. В тот год Эйнштейн опубликовал четыре статьи. В первой он сделал фундаментальный вклад в основы квантовой теории излучения, во второй – в основы молекулярной физики. Однако оба эти сверхвыдающиеся достижения были перекрыты его третьей работой, в которой он изложил начала специальной теории относительности. До осознания значимости его общеизвестной ныне формулы  $E_0 = mc^2$ , выводу которой он посвятил свою четвертую статью, время тогда еще не пришло.<sup>1</sup> Но ныне это одна из самых известных формул в физике.

Давайте разберемся в первых трех работах Эйнштейна. Для них всех характерна какая-то детская простодушная естественность. Недаром Эйнштейну приписывают такие слова: «Мир устроен просто. Очень просто. Но не более того».

Первая публикация Альберта Эйнштейна 1905 года называлась так: «Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света». Эта статья 18 марта 1905 года поступила в редакцию ведущего физического журнала Германии «Annalen der Physik» («Анналы физики») и в том же году была напечатана в одном из выпусков журнала.

Совершим очень короткий экскурс в историю. Вопрос о происхождении света возник в XVII веке. Роберт

Гук (1635–1703) считал, что свет имеет волновое происхождение, как звук; эту точку зрения поддержал и Христиан Гюйгенс (1629–1695). А вот Исаак Ньютон (1643–1727) возражал им – он полагал, что свет состоит из частиц. Авторитет Ньютона взял верх, и восторжествовала корпускулярная теория света. Но в начале XIX века победила волновая теория света. И она считалась истинной до 1905 года, когда появилась статья Эйнштейна. За пять лет до того в работе Макса Планка (1858–1947) было высказано предположение, что энергия света выделяется дискретно, определенными порциями – квантами. И Эйнштейн во введении к



своей работе пишет так: «Согласно сделанному здесь предположению, энергия пучка света, вышедшего из некоторой точки, не распределяется непрерывно во все возрастающем объеме, а складывается из конечного числа локализованных в пространстве неделимых квантов энергии, поглощаемых или возникающих только целиком». Это предположение согласовывалось с планковской гипотезой.

В 1887 году было открыто явление фотоэффекта – «выбивание» электронов из металла при освещении его светом. Эксперимент показывал, что максимальная начальная скорость электрона на выходе из металла определяется частотой света и не зависит от его интенсивности, а от интенсивности зависит число электронов, вырывающихся из металла в единицу времени. И при этом существует минимальная частота (определяемая химической природой вещества), при которой фотоэффект вообще возможен. Эти результаты явно противоречили волновой теории света.

Эйнштейн объяснил все это очень естественно, дополнив волновую теорию. Суть дела виделась Эйнш-

<sup>1</sup> Индекс «0» у энергии подчеркивает, что речь идет об энергии покоя частицы.

тейну в том, что электрон в металле находится как бы в тюрьме – его удерживают внутри металла некие силы. Для того чтобы преодолеть внешние силы и выскочить из металла, электрону нужна дополнительная энергия. Эту энергию, как предположил Эйнштейн, электрон получает порциями, поглощая, при освещении металла светом, один фотон, имеющий энергию  $h\nu$ , где  $h$  – некая постоянная, которую стали называть постоянной Планка, а  $\nu$  – частота света. Словом, Эйнштейн в своих рассуждениях допустил совместимость корпускулярной и волновой теорий.

Обозначим через  $\nu_0$  минимальную частоту, при которой возможен выход электрона из металла. Если  $\nu \leq \nu_0$ , ничего не происходит – электрон остается в металле. Если же  $\nu > \nu_0$ , то при вылете электрон приобретает скорость. При этом, в соответствии с законом сохранения энергии, максимальная скорость  $v(\nu)$  определяется равенством

$$\frac{mv^2(\nu)}{2} = h(\nu - \nu_0), \text{ или } \frac{mv^2(\nu)}{2} = h\nu - A_{\text{вых}},$$

где  $A_{\text{вых}} = h\nu_0$  – работа выхода электрона из металла. Таково *уравнение Эйнштейна для фотоэффекта*.

Это уравнение получило многократные подтверждения многочисленными экспериментами. Величины, измеряемые слева, как функции известных частот, на графике представляли собой параллельные прямые, угловой коэффициент которых равен постоянной Планка  $h$ . Среднее значение постоянной Планка, полученное в результате этих экспериментов, оказалось очень близким к принятой ныне величине постоянной Планка: точность составила доли процента.

Теория фотоэффекта, предложенная Эйнштейном, сыграла огромную роль в формировании новой механики – квантовой механики. Она была сочтена Нобелевским комитетом достойной присуждения Эйнштейну в 1921 году Нобелевской премии по физике.

Вторая статья Эйнштейна – «О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты» – была завершена в начале мая 1905 года, поступила в редакцию 11 мая 1905 и была опубликована в «Annalen der Physik» в том же томе, что и первая статья.

В этой работе Эйнштейн строит теорию хаотического движения очень мелких (видимых лишь под микроскопом) взвешенных частиц в неподвижной жидкости, выводит уравнение для плотности числа частиц и обнаруживает, что оно в точности совпадает с уравнением теплопроводности (или диффузии – эти уравнения выглядят одинаково).

И снова совершим краткий экскурс в историю. В 1822 году Жан Батист Фурье (1768–1830), выдающийся математик и физик, выпустил в свет свой мемуар «Аналитическая теория тепла». В нем он дал математическое описание распространения тепла в различных средах. Для этого Фурье вывел уравнение теплопроводности, которое призвано описывать поведение температуры  $u(t, x)$  в момент  $t$  в точке  $x$

бесконечного в обе стороны теплопроводящего стержня. Согласно Фурье, функция  $u(t, x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2},$$

которое и называют уравнением теплопроводности.<sup>2</sup> Легко проверить, что функция

$$u_0(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

является решением уравнения теплопроводности. Число  $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$  равно, по Фурье, температуре стержня в точке  $x$  в момент  $t$  при условии, что в нулевой момент времени в начале координат стержню передали единицу количества теплоты (как бы коснувшись стержня в нулевой точке другим раскаленным стержнем).

В 1827 году английский ботаник Роберт Броун (1773–1858) обнаружил видимое только в микроскоп беспорядочное движение мельчайших взвешенных частиц в неподвижной жидкости. Нам следовало бы называть фамилию ботаника Браун, поскольку по-английски она пишется Brown, но в старину транскрибировали фамилии не согласуясь с произношением. Ученого назвали Броун, и за открытым им беспорядочным движением частиц закрепилось название *броуновское движение*. Сейчас в учебниках по физике пишут, что «закономерности броуновского движения были изучены Эйнштейном (1905)». Это несомненно так, но сам Эйнштейн в работе, которую мы обсуждаем, считал необходимым в преамбуле статьи оговориться. Он пишет: «Возможно, что рассматриваемые движения тождественны с так называемым броуновским движением; однако, доступные мне данные относительно последнего настолько неточны, что я не мог составить об этом определенного мнения».

Эйнштейн мысленно смоделировал поведение хаотически двигающихся частиц следующим образом. Частица двигается по точкам с координатами  $k\Delta x$ , где  $k$  – целое число,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , в моменты времени  $l\Delta t$ , где  $l$  – натуральное число  $0, 1, 2, \dots$ , бросает монетку и двигается вправо, если выпал орел, или влево, если выпала решка. Положим  $\Delta t = \frac{1}{n}$ ,  $\Delta x = \alpha\sqrt{\frac{1}{n}}$ , тогда в точке  $k\alpha\sqrt{\frac{1}{n}}$  частица будет находиться с вероятностью  $\frac{C_n^k}{2^n}$ ,  $-n \leq k \leq n$ , ибо всех исходов  $2^n$ , а исходов, при которых частица попадет в данную точку,  $C_n^k$ . Если построить ступенчатую функцию, на отрезке

<sup>2</sup> Это уравнение означает, что производная по  $t$  функции  $u(t, x)$  при фиксированном  $x$  равна половине второй производной функции по  $x$  при фиксированном  $t$ . Так уравнение теплопроводности пишут математики. А физики умножают правую часть на размерный коэффициент, представляющий собой дробь, в которой числитель есть удвоенный коэффициент теплопроводности, а в знаменателе стоит произведение плотности на удельную теплоемкость.

$[k\Delta t; (k+1)\Delta t]$  равную  $\frac{C_n^k}{2^n}$ , то эта функция будет очень близка к функции

$$f_0(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{x^2}{2D}},$$

где  $D$  – некоторый коэффициент, зависящий от  $\alpha$  и называемый коэффициентом диффузии.

Если теперь запустить  $n$  частиц двигаться описанным образом независимо друг от друга и перейти к пределу при  $n$ , стремящемся к бесконечности, то окажется, что число частиц на отрезке  $[x; x+dx]$  в момент времени  $t$ , обозначим это число частиц через  $f(t, x)dx$ , будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}.$$

Это, разумеется, уравнение теплопроводности, но в применении к описываемому процессу его называют *уравнением диффузии*. Исходя из физических соображений, Эйнштейн вычислил коэффициент диффузии

$D$ . Он оказался равным  $\frac{RT}{aN_A}$ , где  $a$  – число, зависящее от размера частиц и от коэффициента трения жидкости,  $N_A$  – постоянная Авогадро,  $T$  – абсолютная температура, а  $R$  – некая универсальная постоянная.

К моменту написания этой статьи Эйнштейна вопрос о молекулярно-кинетической теории теплоты еще был открыт. Еще неясно было, сколько молекул имеется в одном моле вещества. Это число определяла постоянная Авогадро, величина которой еще не была достаточно точно оценена. В аннотации к статье Эйнштейн говорит, что экспериментальное подтверждение ее результатов будет сильным доводом в пользу молекулярно-кинетической теории теплоты, а опровержение ее будет по его словам «веским аргументом против молекулярно-кинетического представления о теплоте».

В самом конце статьи автор пишет, что найденные им соотношения «могут быть применены для определения числа  $N$ » (числа Авогадро  $N_A$ ). И это вскоре произошло! Французский экспериментатор Жан Перрен (1870–1942) серией очень тонких опытов в 1906 году получил значение числа Авогадро, близкое к  $6,8 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>. Затем Перреном были произведены опыты с броуновскими частицами, поведение которых было описано Эйнштейном. Результаты совпали, и это стало торжеством молекулярно-кинетической теории. За все это Жан Перрен в 1926 году был удостоен Нобелевской премии по физике.

Мы видим, что и вторая работа Эйнштейна была нобелевского уровня. Вскоре теория Эйнштейна была развита М.Смолуховским, затем А.Фоккером и М.Планком.

Потом за дело взялись математики. Н.Винер описал случайный процесс, который был навеян движением броуновской частицы. А.Н.Колмогоров в своей знаменитой статье «Аналитические методы в теории вероятностей» (1931) ввел понятие марковского процесса, обобщил и развил достижения физиков, о чем он сам узнал после опубликования своей

работы. Начиная с 1933 года Колмогоров упоминает работы Смолуховского, Фоккера и Планка, но почему-то обходит своим вниманием работы истинного родоначальника теории – Эйнштейна.

Переходим к обсуждению третьей, и самой знаменитой, статьи Эйнштейна не только среди опубликованных в 1905 году, но и вообще во всем его творчестве. Эта статья под названием «К электродинамике движущихся тел» поступила в редакцию 30 июня 1905 года и была опубликована в «Annalen der Physik» опять-таки в том же самом томе! В этой статье излагалась теория, получившая впоследствии название *специальной теории относительности*.

Специальная теория относительности может быть выведена (и мы сделаем это) из двух постулатов.

Первый постулат, называемый принципом относительности, можно сформулировать так: в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одинаковых условиях протекают одинаково. Как и в случае галилеевой механики, находясь в занавешенном поезде, способном двигаться равномерно, прямолинейно и бесшумно, нельзя установить, движется поезд или стоит.

А второй постулат явился следствием опытов Альберта Майкельсона (1852–1931), установившего, что скорость света в вакууме постоянна, что она не зависит от движения источника света.

Как тут не вспомнить легенду, похожую на апокриф, о юноше (при этом называют Планка), который обратился к мэтру с просьбой о напутствии – он хотел стать физиком. Мэтр сказал, что не видит у физики перспектив: на почти безоблачном небе открытых истин видны лишь два небольших облачка – опыт Майкельсона и законы теплового излучения. Скоро они рассеются, и в физике нечего будет делать. О законах излучения, которые, благодаря гипотезе Планка, открыли окно в диковинный микромир, было чуточку рассказано выше. А опыт Майкельсона вообще перевернул наши представления о времени и пространстве.

Обсудим вопрос о сложении скоростей в галилеевской и в эйнштейновской механике. Представим себе железнодорожную станцию, на которой стоит с флажком дежурный по станции  $D$ . Мимо него со скоростью  $v$  проносится поезд. В поезде стоит курильщик  $K$ , а мимо него проходит пассажир  $P$ , который идет по ходу поезда со скоростью  $v'$ . Допустим, что в нулевой момент времени все три человека находились на одной прямой. Через время  $t$  курильщик  $K$  будет находиться на расстоянии  $vt$ , а пассажир  $P$  – на расстоянии  $(v+v')t$  от дежурного  $D$ , т.е.  $P$  будет двигаться относительно  $D$  со скоростью  $V = v + v'$ . Это – формула Галилея. И до конца девятнадцатого века казалось, что если в нулевой момент времени все трое одновременно пустили бы луч света по направлению движения, то луч  $P$  опережал бы луч  $K$ , а тот, в свою очередь, опережал бы луч  $D$ . (Ведь если бы они выстрелили одновременно, то пуля, пущенная  $P$ , неслась бы впереди двух других – в этом никто сомневался.) Однако опыт Майкельсона показал, что со светом дело обстоит не так: все лучи в нашем мысленном опыте будут распространяться не отставая и не опережая друг



друга. Это может означать только одно: *часы в движущемся поезде и часы дежурного на станции идут по-разному.*

Будем считать, что скорость света равна единице. Пусть одна и та же точка на прямой имеет координаты  $(x, t)$ , где  $x$  – положение поезда,  $t$  – момент времени по показанию часов дежурного, когда курильщик в поезде пересекает точку  $x$ , в неподвижной системе координат, и  $(x', t')$  – в подвижной системе координат. Закон сохранения скорости света приводит к равенству

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2.$$

Было сделано предположение, что переход от одной системы координат к другой совершается линейно. Линейные отображения, сохраняющие форму  $x_1^2 + x_2^2$ , это повороты:

$$x'_1 = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \quad x'_2 = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha.$$

Линейные отображения, сохраняющие форму  $x^2 - t^2$ , это *гиперболические повороты*:

$$x = x' \operatorname{ch} \alpha + t' \operatorname{sh} \alpha, \quad t = x' \operatorname{sh} \alpha + t' \operatorname{ch} \alpha,$$

$$x' = x \operatorname{ch} \alpha - t \operatorname{sh} \alpha, \quad t' = -x \operatorname{sh} \alpha + t \operatorname{ch} \alpha, (*)$$

где  $\operatorname{ch} \alpha$  и  $\operatorname{sh} \alpha$  – гиперболический косинус и гиперболический синус соответственно.

Вернемся к нашим героям. По прошествии времени  $t$  стоящий в поезде пассажир  $K$  будет находиться в точке  $(vt, t)$  в неподвижной системе координат и в точке  $(0, t')$  в подвижной, а идущий пассажир  $\Pi$  будет иметь в тех же системах координаты  $(Vt, t)$  (где  $V$  – скорость  $\Pi$  относительно  $D$ ) и  $(v't', t')$ . В силу того что точка  $(0, t')$  перешла в точку  $(vt, t)$ , из равенств  $(*)$  получаем

$$0 = vt \operatorname{sh} \alpha - t \operatorname{ch} \alpha, \text{ откуда } v = \operatorname{cth} \alpha,$$

где  $\operatorname{cth} \alpha$  – гиперболический котангенс. Аналогично,

точка  $(v't', t')$  совпадает с точкой  $(Vt, t)$ , откуда снова из  $(*)$  получаем

$$Vt = v't' \operatorname{ch} \alpha + t' \operatorname{sh} \alpha, \quad t = v't' \operatorname{sh} \alpha + t' \operatorname{ch} \alpha.$$

Деля первое равенство на второе и затем деля числитель и знаменатель на  $\operatorname{ch} \alpha$ , приходим к формуле Эйнштейна для сложения скоростей:

$$V = \frac{v + v'}{1 + vv'},$$

полученной в его знаменитой работе 1905 года.

Группу преобразований, сохраняющих форму  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2$  (ее частный случай был рассмотрен нами выше), А. Пуанкаре назвал *группой Лоренца*. В ряде статей, предшествующих работе Эйнштейна, Пуанкаре утверждал, что имеет место принцип относительности, согласно которому законы природы в двух системах координат, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью, одинаковы. В сочетании с постоянством скорости света это приводит, как было показано, к формуле сложения скоростей, полученной нами. Примерно с той же легкостью можно было бы извлечь из двух постулатов и другие парадоксы, вроде парадокса близнецов, изменения длин и т.п. Эти парадоксы стали достоянием всех после работы Эйнштейна 1905 года. По-видимому, все это понимал к тому времени и Пуанкаре – один из величайших ученых всех времен. Но почему он никогда и никому не говорил об этом, остается загадкой.

Четвертая работа Эйнштейна, была озаглавлена так: «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?» Она поступила в редакцию 27 сентября 1905 года и была опубликована в «Annalen der Physik» в том же 1905 году, но уже в следующем томе. Ей была посвящена статья Б. Болотовского, опубликованная в журнале «Квант» №2 за 1995 год. Прочитайте эту статью.

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВЛОМОК

### Тайская головоломка

(Начало см. на 2-й странице обложки)

Читатели могут сделать еще несколько подобных головоломок. Стороны большей грани каждого бруска относятся как 3 к 1, и мы можем мысленно разделить ее на три одинаковых квадрата. Каждый из них может остаться пустым, или к нему может быть приклеена половина шара, или в нем может быть просверлено отверстие. Отверстие должно быть сквозным, поэтому с другой стороны бруска дырку нельзя заклеить «полушарием». Если аккуратно посчитать, то получится, что есть 48 разных по форме брусочков (проверьте!). А всего различных наборов по 6 брусочков будет 9050623104. Здесь учтено, что в набор могут входить одинаковые брусочки. Читатели наверняка

заметили, что в тайской головоломке есть две одинаковых детали.

Конечно, не все наборы из этого разнообразия могут быть плотно упакованы. Если, например, в наборе будет четыре брусочка, к каждому из которых приклеены по шесть половинок шаров, то такой набор точно не поместится в коробку.

Напротив, каждый из наборов, в которых вообще нет «полушарий», можно плотно упаковать в коробочку. Но их никак не назовешь головоломками.

Читатели могут не только изготовить такие головоломки, но и написать соответствующие программы для их решения. Возможно, кому-то удастся провести исследование и ответить на вопрос: «Сколько наборов по 6 брусочков из возможных можно плотно упаковать?»

В. Журавлев

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2-2012» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2254» или «Ф2260». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvantjournal.ru](mailto:math@kvantjournal.ru) и [phys@kvantjournal.ru](mailto:phys@kvantjournal.ru) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2254, М2255 предлагались на региональном этапе IV Олимпиады имени Леонарда Эйлера, задачи М2256, М2258, М2259 – на региональном этапе XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## Задачи М2254–М2260, Ф2260–Ф2267

**М2254.** Существуют ли 10 попарно различных рациональных чисел таких, что произведение любых двух из них является целым числом, а произведение любых трех – нет?

*О.Подлипский*

**М2255.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  углы  $ABC$  и  $ADC$  – прямые. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  взяты точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно так, что  $KLMN$  – прямоугольник. Докажите, что середина диагонали  $AC$  равноудалена от прямых  $KL$  и  $MN$ .

*Д.Швецов*

**М2256.** В волейбольном турнире с участием 73 команд каждая команда сыграла с каждой по одному разу. В конце турнира все команды разделили на две непустые группы так, что любая команда первой группы одержала ровно  $n$  побед, а любая команда второй группы – ровно  $m$  побед. Могло ли оказаться, что  $m \neq n$ ?

*Н.Агаханов*

**М2257.** Пусть  $\alpha$  не равно  $\frac{\pi t}{6}$  ни для какого целого  $t$ . Известно, что среди чисел  $\sin \alpha, \sin 2\alpha, \dots, \sin n\alpha$  есть иррациональные. Докажите, что таких чисел не меньше  $\frac{n}{3}$ .

*В. Сендеров*

**М2258.** Дан квадрат  $n \times n$ . Изначально его клетки раскрашены в белый и черный цвета в шахматном порядке, причем хотя бы одна из угловых клеток черная. За один ход разрешается в некотором квадрате  $2 \times 2$  одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в черный цвет, каждую черную – в зеле-

ный, а каждую зеленую – в белый. При каких  $n$  за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой черный и белый цвета поменялись местами?

*Б.Трушин*

**М2259.** Выпуклый четырехугольник  $ABCD$  таков, что  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ . Докажите, что

$$\angle BAC + \angle CBD + \angle DCA + \angle ADB = 180^\circ.$$

*И.Богданов, К.Кноп*

**М2260.** Сто неотрицательных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  расставлены по кругу так, что сумма любых трех подряд идущих чисел не превосходит 1 (т.е.  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ ,  $x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$ , ...,  $x_{100} + x_1 + x_2 \leq 1$ ). Найдите наибольшее значение суммы

$$S = x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_5 + x_4 x_6 + \dots + x_{99} x_1 + x_{100} x_2.$$

*И.Богданов*

**Ф2260.** а) Аппетитный колобок массой  $m = 0,1$  кг спасается бегством от господина  $N$ , бегущего со скоростью  $v = 3$  м/с (рис.1). Но колобок хочет не только спастись сам, но и спасти свои запасы яблок.



Рис. 1

Тележка с яблоками общей массой  $M = 0,4$  кг находится на расстоянии  $s = 2$  м от кругого ската. Колобок разбегается до скорости  $V = 2$  м/с и прыгает на тележку. Как только тележка докатывается до ската, никакой господин  $N$  догнать ее уже не сможет. Спасется ли колобок, если расстояние от господина  $N$  до тележки в момент соприкосновения колобка и тележки равно  $l = 4$  м? Размерами тележки пренебречь, все объекты движутся по одной прямой, трения нет, сопротивление воздуха отсутствует, вулканической и радиационной активности в радиусе 84 км не наблюдается.

б) Найдите, какой должна быть масса колобка, чтобы он мог спастись. Ответ дайте в виде неравенства.

*С.Иванов (ученик 9 класса Московской школы 179)*

**Ф2261.** По горизонтальному прямому участку железной дороги движется по инерции платформа массой  $M = 90$  кг. Колеса платформы очень легкие, трением о рельсы можно пренебречь. В некоторый момент времени, когда скорость платформы была  $v = 10$  м/с, пошел дождик из ежейков, каждый из которых имеет массу  $m = 0,5$  кг. Каждую секунду на платформу падает один ежик и остается на ней, так как борта платформы достаточно высокие. У всех ежейков установившаяся скорость падения имеет горизонтальную составляющую, равную  $u = 1$  м/с и направленную навстречу первоначальной скорости платформы. На какое расстояние  $L$  от положения в момент начала дождя сместится платформа к тому моменту, когда ее скорость станет равной нулю? (При расчетах разрешается пользоваться компьютером.)

*Д.Ежов*

**Ф2262.** Один конец однородной цепочки массой  $M$  и длиной  $L$  закрепили в лапке штатива. При этом вся цепочка повисла, вытянувшись в вертикальном направлении и не касаясь пола. Затем другой ее конец подняли над местом закрепления первого конца на высоту  $H < L$  и начали медленно перемещать в горизонтальном направлении до тех пор, пока касательная к цепочке вблизи ее закрепленного конца не стала горизонтальной. Какова сила натяжения цепочки вблизи ее нижнего конца? А вблизи верхнего?

*Ц.Почкин*

**Ф2263.** Тело представляет собой два склеенных однородных полушара, центры которых совпадают (рис.2).



Рис. 2

Нижний полушар имеет радиус  $R_1$  и сделан из материала с плотностью  $\rho_1$ , верхний полушар имеет радиус  $R_2$  и плотность  $\rho_2$ . При каких значениях  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  положение тела, изображенное на рисунке, будет устойчивым?

*С.Муравьев*

**Ф2264.** Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 3, состоит из двух батареек с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 5$  В и  $\mathcal{E}_2 = 2$  В и пяти одинаковых вольтметров. Найдите показания каждого из вольтметров. Со-

противления батареек много меньше сопротивлений вольтметров.

*О.Шведов*

**Ф2265.** У вас есть жесткий штатив с элементами креплений. В магазине имеются детали и оборудование для физических экспериментов. Невесомая пружина с жесткостью каждого метра длины 100 Н/м стоит 100 руб./м и продается только кусками с длинами, которые могут быть равны целому числу дециметров. Грузы с двумя крючками продаются порциями по 1 кг. Каждый груз стоит 10 руб. У вас есть 100 руб. Нужно собрать колебательную систему, в которой пружины могли бы только изменять свою длину, а грузы могли бы двигаться только в вертикальном направлении, с максимально возможным периодом малых колебаний. Как вы распорядитесь имеющимися средствами?

*П.Максимов*

**Ф2266.** Маленький шарик находится на главной оптической оси тонкой собирающей линзы. Отношение объема шарика  $V$  и объема его изображения  $v$  равно 16. Линзу отодвинули от шарика вдоль оси дополнительно на расстояние  $L$ , и отношение объемов стало равным 81. Какова оптическая сила линзы?

*С.Шариков*

**Ф2267.** Плоскость маленького зеркала все время вертикальна. Зеркало находится в руках Буратино, который крутит его равномерно с угловой скоростью  $360^\circ/\text{с}$  вокруг вертикальной оси, проходящей ровно через середину зеркала. Мальвина, стоя на расстоянии 1 м от оси вращения, изредка видит свое изображение, пролетающее мимо. Какова скорость движения изображения относительно неподвижной Мальвины в те моменты, когда Мальвина его видит?

*К.Барабас*

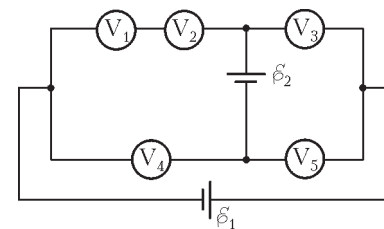


Рис. 3

### Решения задач М2236–М2245, Ф2243–Ф2252

**М2236.** На доске написаны девять приведенных квадратных трехчленов:  $x^2 + a_1x + b_1$ ,  $x^2 + a_2x + b_2$ , ...,  $x^2 + a_9x + b_9$ . Известно, что последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_9$  и  $b_1, b_2, \dots, b_9$  – арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех девяти трехчленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трехчленов может не иметь корней?

**Ответ:** 4.

Обозначим  $P_i(x) = x^2 + a_ix + b_i$ ,  $P(x) = P_1(x) + \dots + P_9(x)$ . Заметим, что

$$P_i(x) + P_{10-i}(x) = 2x^2 + (a_i + a_{10-i})x + (b_i + b_{10-i}) = 2P_5(x).$$



Значит,  $P(x) = 9P_5(x)$ , и условие равносильно тому, что  $P_5(x)$  имеет хотя бы один корень. Обозначим через  $x_0$  какой-нибудь из его корней. Тогда  $P_i(x_0) + P_{10-i}(x_0) = 2P_5(x_0) = 0$ , т.е. либо  $P_i(x_0) \leq 0$ , либо  $P_{10-i}(x_0) \leq 0$ . Поскольку старшие коэффициенты трехчленов положительны, из этого следует, что в каждой из пар  $(P_1, P_9)$ ,  $(P_2, P_8)$ ,  $(P_3, P_7)$ ,  $(P_4, P_6)$  хотя бы один из трехчленов имеет корень. Значит, есть не меньше пяти трехчленов, имеющих хотя бы по одному корню. Поэтому есть не более четырех трехчленов без корней.

Осталось привести пример, когда ровно пять трехчленов (и один из них –  $P_5$ ) имеют хотя бы по одному корню. Годятся, например, трехчлены  $x^2 - 4$ ,  $x^2 - 3$ ,  $x^2 - 2, \dots, x^2 + 4$ .

И. Богданов

**M2237.** Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их  $2011 \cdot 2010/2$  попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3 и еще ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3?

**Ответ:** могло.

Пусть в нашем наборе  $a$ ,  $b$  и  $c$  чисел, дающих, соответственно, остатки 0, 1 и 2 при делении на 3. Тогда условие переписывается в виде

$$\frac{a(a-1)}{2} + bc = \frac{b(b-1)}{2} + ac = \frac{c(c-1)}{2} + ab,$$

$$a + b + c = 2011.$$

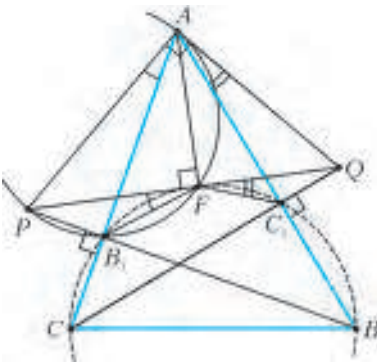
Несложно видеть, что этим условиям удовлетворяет, например, набор чисел  $a = c = 670$ ,  $b = 671$ , ибо

$$\frac{671 \cdot 670}{2} + 670^2 = \frac{670 \cdot 699}{2} + 670 + 670^2 =$$

$$= \frac{670 \cdot 699}{2} + 670 \cdot 671.$$

И. Богданов

**M2238.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . На продолжениях его высот  $BB_1$  и  $CC_1$  за точки  $B_1$  и  $C_1$  выбраны соответственно точки  $P$  и  $Q$  такие, что угол  $PAQ$  – прямой. Пусть  $AF$  – высота треугольника  $APQ$ . Докажите, что угол  $BFC$  – прямой.



Точки  $B_1$  и  $C_1$  лежат на окружности, построенной на  $BC$  как на диаметре. Для решения достаточно доказать, что  $F$  также лежит на этой окружности, т.е. достаточно доказать, что четырехугольник  $CB_1FC_1$  – вписанный (см. рисунок).

Так как  $\angle AB_1P = \angle AFP = 90^\circ$ , то точки  $B_1$  и  $F$  лежат на окружности, построенной на  $AP$  как на диаметре. Поэтому  $\angle PFB_1 = \angle PAB_1$ . Аналогично,  $\angle QFC_1 =$

$= \angle QAC_1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \angle B_1FC_1 &= 180^\circ - \angle PFB_1 - \angle QFC_1 = \\ &= 180^\circ - \angle PAB_1 - \angle QAC_1 = \\ &= 180^\circ - (\angle PAQ - \angle B_1AC_1) = 90^\circ + \angle B_1AC_1 = \\ &= 90^\circ + (90^\circ - \angle ACC_1) = 180^\circ - \angle B_1CC_1. \end{aligned}$$

Таким образом, четырехугольник  $CB_1FC_1$  – вписанный.

А. Полянский

**M2239.** На столе лежит куча из более чем  $n^2$  камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, первым берет Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее  $n$ , либо любое кратное  $n$  число камней, либо один камень. Докажите, что Петя может действовать так, чтобы взять последний камень независимо от действий Васи.

Предположим противное: Вася может всегда действовать так, чтобы помешать Пете. Поскольку в любой ситуации, кроме конечной, можно сделать ход, это означает, что у Васи есть стратегия, позволяющая ему гарантированно взять последний камень. Пусть  $d$  – изначальное количество камней, а  $r$  – остаток от деления  $d$  на  $n$ . Ясно, что  $r \neq 0$ , иначе Петя может сразу взять все камни.

Петя после первого своего хода может, взяв кратное  $n$  количество камней, оставить любое количество вида  $a_k = r + nk$ , где  $0 \leq k \leq n-1$  (все эти количества меньше  $n^2$ ). Пусть  $c_k$  – ответный ход в Васиной стратегии при  $a_k$  камнях в куче. Тогда  $c_k$  не делится на  $n$ , иначе

после его хода остается  $r + n\left(k - \frac{c_k}{n}\right)$  камней, и Петя может выиграть, действуя по Васиной стратегии для этого числа. Значит,  $c_k < n$  при всех  $0 \leq k \leq n-1$ , а тогда два из этих чисел совпадают, скажем  $c_k = c_l$  при  $0 \leq k < l \leq n-1$ . Напомним, что у Васи есть стратегия выигрыша в ситуации, когда в куче  $a_k - c_k$  камней и ход Пети.

Пусть теперь Петя первым ходом оставит  $a_l$  камней; Вася в ответ возьмет  $c_l$  камней. Теперь Петя может взять  $n(l-k)$  камней, оставляя  $a_l - c_l - n(l-k) = a_k - c_k$ , и дальше действовать по вышеупомянутой Васиной стратегии. Таким образом, он выигрывает. Противоречие.

С. Берлов

**M2240.** Для натуральных чисел  $a > b > 1$  определим последовательность  $x_1, x_2, \dots$  формулой  $x_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1}$ . Найдите наименьшее  $d$  такое, что эта последовательность не содержит  $d$  последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких  $a$  и  $b$ .

**Ответ:** 3.

При  $a = 4$ ,  $b = 2$  имеем  $\frac{4^1 - 1}{2^1 - 1} = 3$ ,  $\frac{4^2 - 1}{2^2 - 1} = 5$ . Осталось показать, что больше двух простых чисел подряд не встретится.

Докажем более сильное, чем требуется, утверждение: при  $n \geq 2$  хотя бы одно из чисел  $\frac{a^n - 1}{b^n - 1}$ ,  $\frac{a^{n+1} - 1}{b^{n+1} - 1}$  не является простым.

Предположим противное; тогда

$$a^n - 1 = p(b^n - 1), \quad (1)$$

$$a^{n+1} - 1 = q(b^{n+1} - 1), \quad (2)$$

где  $p$  и  $q$  – простые числа. Заметим, что

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a^n - 1, a^{n+1} - 1) &= \text{НОД}(a^n - 1, a^{n+1} - 1 - a(a^n - 1)) = \\ &= \text{НОД}(a^n - 1, a - 1) = a - 1 \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\text{НОД}(b^n - 1, b^{n+1} - 1) = b - 1.$$

Тогда НОД левых частей (1) и (2) равен  $a - 1$ , а НОД правых частей (1) и (2) равен одному из чисел  $b - 1$ ,  $p(b - 1)$ ,  $q(b - 1)$ ,  $pq(b - 1)$ .

В первом случае  $a - 1 = b - 1$ , откуда  $a = b$ , и каждая из данных в условии дробей равна 1, что невозможно.

При  $n \geq 2$  имеем

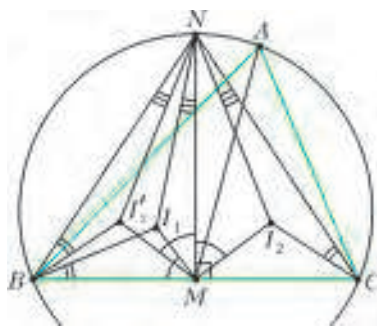
$$p = \frac{a^n - 1}{b^n - 1} = \frac{(a - 1)(a^{n-1} + \dots + a + 1)}{(b - 1)(b^{n-1} + \dots + b + 1)} > \frac{a - 1}{b - 1}$$

и, аналогично,  $q = \frac{a^{n+1} - 1}{b^{n+1} - 1} > \frac{a - 1}{b - 1}$ . Значит, ни один из оставшихся случаев ( $\frac{a - 1}{b - 1}$  равно  $p$ ,  $q$  или  $pq$ ) невозможен.

*Е.Александрова, ученица 10 класса*

*Примечание.* Решение удостоено специального приза Всероссийской олимпиады

**M2241\*.** Дан неравносторонний треугольник  $ABC$ . Пусть  $N$  – середина дуги  $BAC$  его описанной окружности, а  $M$  – середина стороны  $BC$ . Обозначим через



$I_1$  и  $I_2$  центры вписанных окружностей треугольников  $ABM$  и  $ACM$  соответственно. Докажите, что точки  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $A$ ,  $N$  лежат на одной окружности.

Заметим, что прямоугольные треугольники  $BMN$  и  $CMN$  симметричны относительно

но  $MN$ . Пусть точка  $I'_2$  симметрична  $I_2$  относительно  $MN$  (см. рисунок). Имеем

$$\begin{aligned} \angle BMI_1 + \angle BMI'_2 &= \angle BMI_1 + \angle CMI_2 = \\ &= \frac{1}{2}(\angle BMA + \angle CMA) = 90^\circ = \angle BMN, \end{aligned}$$

поэтому лучи  $MI_1$  и  $MI'_2$  симметричны относительно

биссектрисы угла  $BMN$ . Далее,

$$\begin{aligned} \angle MBI_1 + \angle MBI'_2 &= \angle MBI_1 + \angle MCI_2 = \\ &= \frac{1}{2}(\angle MBA + \angle MCA) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BNC = 90^\circ - \angle BNM = \angle MBN, \end{aligned}$$

поэтому лучи  $BI_1$  и  $BI'_2$  симметричны относительно биссектрисы угла  $MBN$ .

Отсюда следует, что точки  $I_1$  и  $I'_2$  – изогонально сопряженные точки в треугольнике  $BMN$ , а следовательно, и лучи  $NI_1$  и  $NI'_2$  симметричны относительно биссектрисы угла  $MNB$ . Значит,  $\angle BNM = \angle MNI_1 + \angle MNI'_2$ . Получаем

$$\begin{aligned} \angle I_1AI_2 &= \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BNM = \angle MNI_1 + \angle MNI'_2 = \\ &= \angle MNI_1 + \angle MNI_2 = \angle I_1NI_2. \end{aligned}$$

Это и означает, что точки  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $A$ ,  $N$  лежат на одной окружности.

*Примечание.* Другие решения этой задачи см. в статье А.Полянского «Воробьями по пушкам!» и в статье А.Блинкова, Ю.Блинкова «Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике...» в этом номере журнала.

*П.Кожевников, М.Кунгожин*

**M2242\*.** Клетчатый квадрат  $2010 \times 2010$  разрезан на трехклеточные уголки. Докажите, что можно в каждом уголке отметить по клетке так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали было поровну отмеченных клеток.

Обозначим  $n = 2010/3 = 670$ . Назовем линией строку или столбец; пронумеруем строки сверху вниз, а столбцы – слева направо. Заметим, что для выполнения условий задачи достаточно, чтобы при любом  $k$  в левых  $k$  столбцах и в верхних  $k$  строках содержалось по  $kn$  отмеченных клеток.

Скажем, что уголок смотрит из  $i$ -й вертикали влево, если две его клетки находятся в  $i$ -й вертикали, а третья – левее. Аналогично определим взгляд в других трех направлениях; каждый уголок, таким образом, смотрит в двух направлениях.

Отметим для начала в каждом уголке среднюю клетку. Теперь в каждом уголке можно либо оставить эту клетку на месте, либо сдвинуть ее ровно в одном из двух направлений, в которые этот уголок смотрит. Выясним, сколько таких сдвигов надо сделать.

Наложим дополнительное условие: между каждыми двумя соседними линиями все сдвиги должны идти в одну сторону. Рассмотрим, скажем, два соседних столбца:  $k$ -й и  $(k + 1)$ -й. Предположим, что в левых  $k$  столбцах сейчас содержится  $d_k \geq nk$  отмеченных клеток. Далее, пусть в  $k$ -м столбце есть  $a_k$  уголков, смотрящих вправо, а в  $(k + 1)$ -м –  $b_k$  уголков, смотрящих влево. Тогда в первых  $k$  столбцах на-

ходится  $\frac{3kn - 2a_k - b_k}{3}$  целых уголков, и потому

$d_k = \frac{3kn - 2a_k - b_k}{3} + a_k = kn + \frac{a_k - b_k}{3}$ . Значит, чтобы добиться нужного количества отмеченных, надо сдвинуть  $s_k = \frac{a_k - b_k}{3} \leq \frac{a_k}{3}$  отмеченных клеток из  $k$ -го столбца вправо. В этом случае выделим  $s_k = \frac{a_k - b_k}{3}$  непересекающихся пар среди  $a_k$  уголков, смотрящих из  $k$ -го столбца вправо, и потребуем, чтобы ровно в одном уголке из каждой пары клетка была сдвинута вправо. Аналогично, если  $d_k < nk$ , то мы выделим  $\frac{b_k - a_k}{3}$  непересекающихся пар среди  $b_k$  уголков, смотрящих из  $(k+1)$ -го столбца влево.

Проделав такую операцию с каждой парой соседних линий, мы получим некоторое количество выделенных пар уголков, в каждой из которых надо выбрать по уголку; при этом все выбранные уголки должны быть различными. Осталось показать, что это возможно.

Соединим два уголка, находящихся в одной паре, ребром. Заметим, что каждый уголок лежит не более чем в двух парах: по одной на два направления, в которых он смотрит. Значит, мы получим граф, в котором из каждой вершины выходит не более двух ребер. Тогда этот граф распадается на циклы и пути. Теперь в каждом цикле  $U_1 - U_2 - \dots - U_n - U_1$  в паре  $(U_i, U_{i+1})$  выберем уголок  $U_i$ , а в паре  $(U_n, U_1)$  – уголок  $U_n$ . Аналогичную операцию сделаем с путем. Очевидно, что все условия выполнены – а значит, и задача решена.

И. Богданов

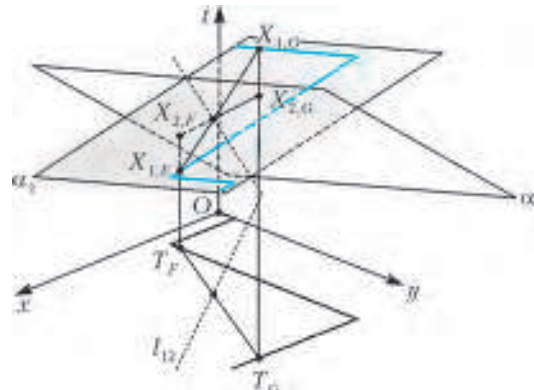
**M2243\***. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населенных пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населенных пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населенных пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причем около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

Введем в пространстве систему координат  $Oxyt$ . Обозначим через  $M$  точку шоссе, в которой в начальный момент находится первый автомобиль. Каждой точке шоссе  $A$  сопоставим точку  $T_A$  на плоскости  $Oxy$  с координатами  $T_A(x_A, y_A)$ , где  $x_A$  – суммарная длина участков пути  $AM$  в населенных пунктах, а  $y_A$  – вне населенных пунктов. Тогда шоссе изображается некоторой ломаной на этой плоскости.

Далее, для  $i$ -й машины нарисуем график ее движения, состоящий из всех точек  $X_{i,A} = (x_A, y_A, t_{i,A})$ , где  $t_{i,A}$  – момент времени, в который эта машина находилась в точке  $A$ . Если эта машина была в точке  $M$  в момент  $t_i$ , а скорости этой машины в населенных пунктах и вне их равны  $u_i$  и  $v_i$ , то  $t_{i,A} = t_i + x_A/u_i + y_A/v_i$ ; таким образом, весь график движения  $i$ -й машины лежит в

плоскости  $t = t_i + x/u_i + y/v_i$ . Обозначим эту плоскость через  $\alpha_i$ .

Рассмотрим теперь порядок, в котором машины проедут мимо некоторого флажка  $F$ . Он совпадает с порядком, в котором плоскости  $\alpha_i$  будут пересекать прямую, параллельную  $Ot$  и проходящую через точку  $T_F$ . Пусть для двух флажков  $F$  и  $G$  этот порядок различается (скажем, 1-я и 2-я машины проехали мимо него в разном порядке). Тогда отрезки  $X_{1,F}X_{1,G}$  и  $X_{2,F}X_{2,G}$  пересекаются (см. рисунок). Таким образом,



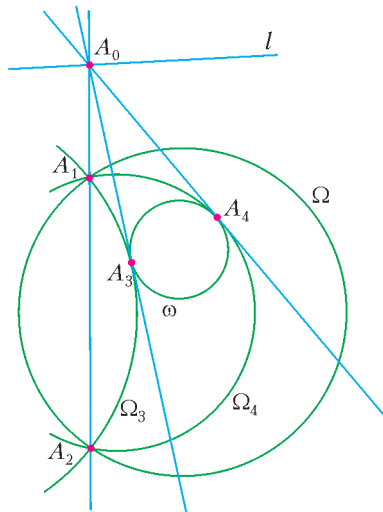
если спроектировать прямую пересечения плоскостей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на плоскость  $Oxy$ , то точки  $T_F$  и  $T_G$  будут лежать по разные стороны от полученной проекции  $l_{ij}$ . Итак, рассмотрим все прямые  $l_{ij}$ . Нетрудно показать индукцией по  $n$ , что  $n$  прямых разбивают плоскость не более чем на  $\frac{n(n+1)}{2} + 1$  часть. Поскольку количество наших прямых не больше  $C_{10}^2 = 45$ , они разобьют плоскость не более чем на  $\frac{45 \cdot 46}{2} + 1 = 1036$  частей. Значит, найдутся такие флажки  $F$  и  $G$ , что точки  $T_F$  и  $T_G$  попадают в одну часть. Тогда ни одна проекция прямых их не разделяет, поэтому на этих флажках порядок машин будет одинаков.

*Замечание.* Заметим, что 45 прямых разбивают плоскость ровно на 1036 частей только тогда, когда никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. В нашем случае для любых трех плоскостей  $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$  прямые их пересечения либо попарно параллельны, либо пересекаются в одной точке. Значит, этим же свойством обладают и их проекции; таким образом, прямые из решения разобьют плоскость несколько меньше, чем на 1036 частей.

С. Берлов

**M2244\***. Пусть даны точки  $A_1, A_2, B_1, B_2$  и  $C_1, C_2$ , лежащие на одной окружности, а также некоторая окружность  $\omega$ . Через точки  $A_1$  и  $A_2$  проведем две окружности, касающиеся  $\omega$ , обозначим их точки касания с  $\omega$  через  $A_3$  и  $A_4$ . Точки  $B_3, B_4$  и  $C_3, C_4$  определяются аналогично. Докажите, что прямые  $A_3A_4, B_3B_4$  и  $C_3C_4$  пересекаются в одной точке.

Пусть  $\Omega$  – окружность, на которой лежат данные шесть точек, а  $\Omega_3, \Omega_4$  – окружности, проходящие через  $A_1$  и  $A_2$ , которые касаются  $\omega$  в точках  $A_3$  и  $A_4$  соответственно.



Если  $\Omega$  и  $\omega$  – концентрические окружности, то, как легко видеть, прямые  $A_3A_4$ ,  $B_3B_4$  и  $C_3C_4$  проходят через их общий центр.

Иначе рассмотрим радикальную ось  $l$  окружностей  $\Omega$  и  $\omega$ . Прямая  $A_1A_2$  – радикальная ось окружностей  $\Omega$  и  $\Omega_3$ . Общая касательная  $m_3$  к окружностям  $\omega$  и  $\Omega_3$ , проведенная в  $A_3$ , – это их радикальная ось. Значит,  $A_1A_2$ ,  $l$  и  $m_3$  – попарные радикальные оси окружностей  $\Omega$ ,  $\Omega_3$  и  $\omega$ , следовательно, они пересекаются в одной точке  $A_0$  (или параллельны – в этом случае считаем  $A_0$  бесконечно удаленной точкой) (см. рисунок). Аналогично, общая касательная  $m_4$  к окружностям  $\omega$  и  $\Omega_4$ , проведенная в точке  $A_4$ , проходит через точку  $A_0$ . Итак, точка  $A_0$  лежит на  $l$  и является точкой пересечения касательных к  $\omega$ , проведенных через  $A_3$  и  $A_4$ . Аналогично определяем точки  $B_0$  и  $C_0$ . Прямые  $A_3A_4$ ,  $B_3B_4$  и  $C_3C_4$  являются, соответственно, полярными<sup>1</sup> точек  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  относительно окружности  $\omega$ . Так как  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  лежат на прямой  $l$ , то  $A_3A_4$ ,  $B_3B_4$  и  $C_3C_4$  проходят через полюс прямой  $l$  относительно окружности  $\omega$ .

С.Ильясов, А.Акопян

**M2245\***. Пусть  $\mathcal{S}$  – конечное множество точек на плоскости, содержащее хотя бы две точки. Известно, что никакие три точки множества  $\mathcal{S}$  не лежат на одной прямой. Назовем мельницей следующий процесс. Вначале выбирается прямая  $l$ , на которой лежит ровно одна точка  $P \in \mathcal{S}$ . Прямая  $l$  вращается по часовой стрелке вокруг центра  $P$  до тех пор, пока она впервые не пройдет через другую точку множества  $\mathcal{S}$ . В этот момент эта точка, обозначим ее  $Q$ , становится новым центром, и прямая продолжает вращаться по часовой стрелке вокруг точки  $Q$  до тех пор, пока она снова не пройдет через точку множества  $\mathcal{S}$ . Этот процесс продолжается бесконечно.

а) Докажите, что можно выбрать некоторую точку  $P$  множества  $\mathcal{S}$  и некоторую прямую  $l$ , проходящую через  $P$ , так, что для мельницы, начинающейся с прямой  $l$ , каждая точка множества  $\mathcal{S}$  выступит в роли центра бесконечно число раз.

<sup>1</sup> О свойствах полярного соответствия см., например, статью С.Харалампиева «Полюс и поляр относительно окружности» в «Кванте» № 7 за 1986 год.

б) Докажите, что можно выбрать некоторую точку  $P$  множества  $\mathcal{S}$  такую, что для мельницы, начинающейся с любой прямой  $l$ , проходящей через  $P$ , каждая точка множества  $\mathcal{S}$  выступит в роли центра бесконечно число раз.

Пусть множество  $\mathcal{S}$  состоит из  $n$  точек. Рассмотрим, что происходит в процессе некоторой мельницы.

Зададим на прямой  $l$  единичный направляющий вектор  $\vec{a}$ , который непрерывно вращается вместе с ней. Одну из полуплоскостей относительно  $l$  назовем *красной*, а другую *синей*, и пусть синяя полуплоскость находится справа от  $l$ , если смотреть на плоскость так, чтобы  $\vec{a}$  был направлен вертикально вверх.

Сформулируем ключевое соображение для решения данной задачи: в тот момент, когда центр мельницы меняется с точки  $T$  на другую – точку  $U$ , – точка  $T$  оказывается такого же цвета, что и  $U$  до момента изменения центра (рис. 1).

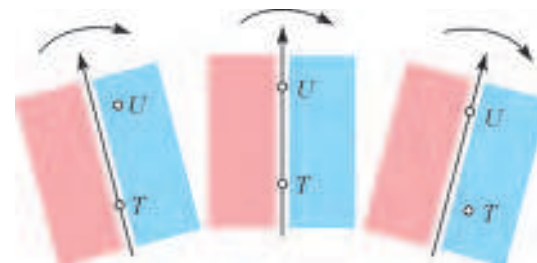


Рис. 1

из  $\mathcal{S}$  красного (или синего) цвета остается неизменным в процессе вращения (здесь мы исключаем моменты, когда  $l$  проходит через две точки множества  $\mathcal{S}$ ).

Рассмотрим произвольный момент, когда  $l$  не параллельна прямой, соединяющим пары точек из  $\mathcal{S}$ , и занумеруем точки множества  $\mathcal{S}$  в том порядке, в каком располагаются их проекции вдоль вектора  $\vec{a}$  (на рисунке 2 показана нумерация множества из четырех точек  $A, B, C, D$  для трех различных положений вектора  $\vec{a}$ ). Тем самым, каждая точка  $Q \in \mathcal{S}$  приобре-

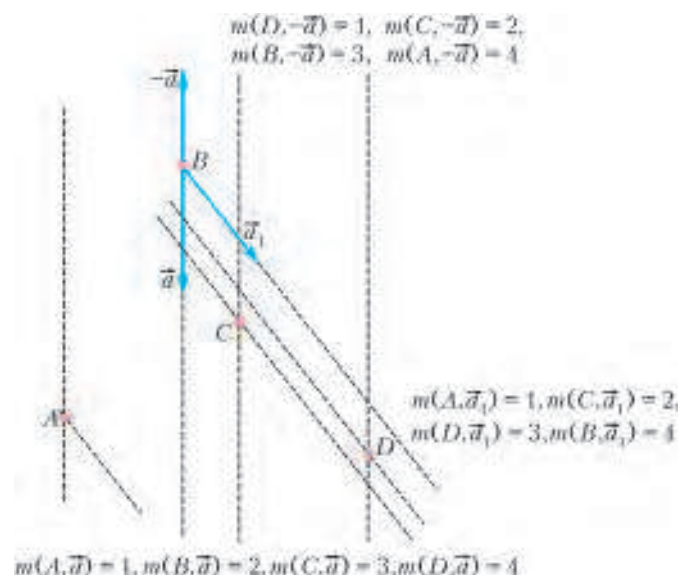


Рис. 2

тает свой номер  $m(Q, \bar{a})$  (в зависимости от  $\bar{a}$ ).<sup>1</sup> Ключевое соображение теперь можно переформулировать так: номер центра мельницы не изменяется в процессе вращения.

Так как никакие три точки множества  $\mathcal{S}$  не лежат на одной прямой, при непрерывном вращении  $\bar{a}$  номер  $m(Q, \bar{a})$  данной точки  $Q$  будет меняться на  $\pm 1$  (изменение номера точки  $Q$  происходит в тот момент, когда прямая  $l$  параллельна прямой, соединяющей  $Q$  с некоторой другой точкой множества  $\mathcal{S}$ ), значит, множество номеров точки  $Q$  (при всевозможных  $\bar{a}$ ) – это некоторый отрезок натурального ряда  $\{a(Q), a(Q)+1, \dots, b(Q)\}$  (здесь  $a(Q)$  и  $b(Q)$  – минимальное и максимальное значения, которые может принимать  $m(Q, \bar{a})$ ). После того как  $\bar{a}$  сделает из начального положения поворот на  $180^\circ$ , проекции точек множества  $\mathcal{S}$  будут идти в порядке, противоположном исходному. Таким образом,  $m(Q, -\bar{a}) + m(Q, \bar{a}) = n$ . Отсюда следует, что  $a(Q) + b(Q) = n$ .

Значит, для решения задачи а) достаточно взять начальную прямую  $l$  так, чтобы центр мельницы  $P$  имел номер  $\left[\frac{n+1}{2}\right]$  (или, что эквивалентно, чтобы в красной полуплоскости лежало ровно  $\left[\frac{n-1}{2}\right]$  точек). Действительно, для любой точки  $Q \in \mathcal{S}$  отрезок  $[a(Q); b(Q)]$  всегда содержит «среднее» число  $\left[\frac{n+1}{2}\right]$  отрезка  $[1; n]$ , т.е. точка  $Q$  в некоторый момент имеет номер  $\left[\frac{n+1}{2}\right]$  и, значит, в этот момент является центром мельницы. Для решения задачи б) достаточно выбрать начальный центр мельницы  $P$  с наибольшим значением  $a(P)$  среди всех точек множества  $\mathcal{S}$ .<sup>2</sup> Номер центра такой мельницы – постоянное число  $k$  из отрезка  $[a(P); b(P)]$ .

Для любой точки  $Q \in \mathcal{S}$  имеем  $k \in [a(P); b(P)] \subset [a(Q); b(Q)]$ , а значит, точка  $Q$  побывает в роли центра.

П. Кожевников

**Ф2243.** Длинная прямая лестница состоит из ступенек с горизонтальными поверхностями, каждая из которых имеет ширину  $L = 29$  см и высоту  $h = 15$  см. Маленькому мячу радиусом  $R = 1$  см придали такую начальную горизонтальную скорость  $v$  и такую угловую скорость вращения  $\omega$ , что он стал спускаться по ступенькам, «пересчитывая» их одну за одной, ударя-

ясь о каждую ступеньку на одном и том же расстоянии от края ступеньки, причем над каждой ступенькой после удара он поднимался на одну и ту же высоту. Отношение высоты, на которую поднялся мяч над первой ступенькой после удара о нее, к высоте, с которой его бросили, равно  $0,7$ . Коэффициент трения мяча о поверхность ступенек не равен нулю, но скорость вращения мяча при ударах не меняется, так как мгновенная скорость движения нижней точки мяча имеет все время нулевую горизонтальную составляющую. Какими были начальные скорости мяча  $v$  и  $\omega$  и на какой высоте  $H$  над ступенькой, о которую он в первый раз ударился, находился мяч при старте?

Уравнение для нахождения высоты  $H$  над первой ступенькой имеет вид

$$0,7H + h = H,$$

откуда находим

$$H = \frac{h}{0,3} = 50 \text{ см}.$$

Если считать, что время одного удара мало в сравнении с промежутком времени между двумя последовательными ударами, то для нахождения горизонтальной скорости  $v$  нужно решить уравнение

$$v \left( \sqrt{\frac{2H}{g}} + \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \right) = L.$$

Отсюда получаем

$$v = 50 \text{ см/с}.$$

Угловая скорость вращения мяча связана со скоростью центра мяча  $v$  соотношением  $v = \omega R$ , поэтому

$$\omega = \frac{v}{R} = 50 \text{ с}^{-1}.$$

С.Полтинников

**Ф2244.** На легкой короткой нити к ветке сосны подвешена гирька массой  $m = 1$  кг. К ней привязана еще одна легкая нить с длиной в недеформированном состоянии  $l = 1$  м и жесткостью  $k = 1$  кН/м, на конце которой висит еще одна гирька массой  $m = 1$  кг. Система находилась в равновесии до момента, когда верхнюю нить перебил дятел. Гирьки упали на землю одновременно. Каково расстояние от ветки до земли?

До перебивания верхней нити нить между грузами была растянута на  $mg/k = 1$  см. Эта величина значительно меньше не только длины нерастянутой нити, но и размеров гирек. Растянутая нить в течение некоторого времени после старта системы ускоряла верхнюю гирю и притормаживала нижнюю. Это время  $\Delta t$  равно четверти периода колебаний системы, состоящей из легкой пружины (нити) и двух одинаковых грузов:

$$\Delta t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} \approx 0,035 \text{ с},$$

т.е. оно весьма мало. За такое время с момента старта центр масс системы сместился всего на  $g\Delta t^2/2 \approx 6$  мм. Следовательно, можно считать, что преобразование

<sup>1</sup> Идея поставить в соответствие направлению порядок, в котором идут проекции точек, оказывается полезной при решении других классических задач, скажем, задачи «О направлениях» (см., например, книгу: М.Айгнер, Г.Циглер. «Доказательства из Книги»).

<sup>2</sup> Величина  $a(P)$  является в некотором смысле «глубиной» точки  $P$  относительно множества  $\mathcal{S}$  (например, все вершины выпуклой оболочки множества  $\mathcal{S}$  имеют глубину 1, а точки, лежащие строго внутри выпуклой оболочки, имеют глубину больше 1). Тем самым, в решении задачи б) за искомым центром надо брать самую глубокую точку множества  $\mathcal{S}$ .



потенциальной энергии растянутой пружины в кинетическую энергию грузов в системе отсчета, связанной с центром масс, произошло быстро. В соответствии с законом сохранения энергии, получаем

$$\frac{(mg)^2}{2k} = 2 \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда находим скорость сближения гири в полете:

$$2v = g\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

Так как гири упали на землю одновременно, их время падения равно

$$t = \frac{l}{2v}.$$

Следовательно, расстояние от ветки до земли составляет

$$L = \frac{l}{2} + \frac{gt^2}{2} = \frac{l}{2} + \frac{kl^2}{4mg} = 25,5 \text{ м}.$$

В сравнении с этой высотой 6 мм и 1 см действительно весьма малые величины.

В.Дятлов

**Ф2245.** «Водяная ракета» представляет собой полуторалитровую бутылку с резиновой пробкой, в которую налито небольшое количество воды массой  $m_0 = 200$  г. Ракета несет полезный груз, укрепленный на ее корпусе снаружи. На какую высоту взлетит ракета, запущенная вертикально вверх из перевернутого положения, в результате быстрого выброса воды при повышении давления в бутылке до  $p = 5$  атм? В момент старта ракета была неподвижна. Общая масса взлетевшей ракеты с «боеголовкой»  $M = 0,5$  кг. Считайте, что давление в бутылке при выбросе воды меняется несильно. Массой пробки пренебречь.

Избыточное давление внутри бутылки по сравнению с атмосферным давлением  $p_0 = 1$  атм равно

$$\Delta p = p - p_0 = 4 \text{ атм} = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Вязкость воды весьма мала, поэтому для движения воды можно пользоваться уравнением Бернулли. В соответствии с этим уравнением и с учетом того, что давление внутри бутылки (по условию) меняется мало, для скорости  $v$ , с которой вода покидает бутылку, можно записать

$$\frac{\rho v^2}{2} = \Delta p,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = 28,3 \text{ м/с}.$$

Пренебрежем влиянием силы тяжести за короткое время выброса воды из бутылки и запишем уравнение движения тела переменной массы в виде

$$v dm = -m du,$$

где  $m$  и  $u$  – масса и скорость ракеты в произвольный момент времени. Решение этого уравнения для начальной массы бутылки с водой  $M + m_0 = 0,7$  кг и оставшей-

ся массы  $M = 0,5$  кг имеет вид

$$u = v \ln \frac{M + m_0}{M} = 9,5 \text{ м/с}.$$

Следовательно, высота, на которую поднимется бутылка, будет равна

$$h = \frac{u^2}{2g} = 4,5 \text{ м}.$$

А.Гуденко

**Ф2246.** Вася нашел старую медную проволоку с сильно попорченной изоляцией. Намереваясь сдать медь в пункт приема цветных металлов, он скомкал проволоку и бросил комок в костер. После такой обработки полностью избавленная от изоляции медь массой 2 кг имела температуру  $600$  °С. Вася зацепил проволоку железной кочергой и, не торопясь, опустил горячий комок проволоки в открытое ведро с 5 литрами воды. Когда шипение прекратилось, Вася круговыми движениями комка проволоки перемешал воду в ведре. Начальная температура воды была  $20$  °С. Какой стала температура воды в ведре после того, как медь остыла? Молярная масса меди  $63,5$  г/моль, молярная теплоемкость меди  $25$  Дж/(моль·К), молярная теплота испарения воды  $40$  кДж/моль.

Медь при опускании в воду быстро охлаждается до температуры  $100$  °С. Теплопроводность воды весьма мала, поэтому сильно греется и переходит в пар только тонкий слой воды, прилегающий к опускающейся проволоке. При этом образовавшийся водяной пар улетает из ведра. Оставшаяся в ведре вода нагревается медью, которая охлаждается от  $100$  °С. (Заметим, что молярная теплоемкость меди равна  $C = 25$  Дж/(моль·К)  $\approx 3R$  – это значение, характерное для молярных теплоемкостей многих металлов в диапазоне от  $200$  К до  $1000$  К, соответствует закону, открытому Дюлонгом и Пти.) На испарение пойдет  $25$  Дж/(моль·К)  $\times$   $\times (2000/63,5)$  моль  $\cdot (600 - 100)$  К  $\approx 400$  кДж тепла. При этом испарится  $400$  кДж /  $(40$  кДж/моль :  $18$  г/моль) =  $180$  г воды. Оставшиеся  $4,820$  кг воды будут нагреваться от  $20$  °С до установившейся температуры  $t$ . Запишем уравнение теплового баланса:

$$4200 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot 4,82 \text{ кг} \cdot (t - 20) \text{ К} = \\ = 25 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)} \cdot (2000/63,5) \text{ моль} \cdot (100 - t) \text{ К}.$$

Отсюда находим

$$t \approx 23 \text{ °С},$$

т.е. температура воды в ведре установится равной примерно  $23$  °С.

В.Паров

**Ф2247.** В большом сосуде с жесткими и не проводящими тепло стенками находится газообразный водород при температуре  $T_1 = 50$  К. При такой температуре вращательные степени свободы двухатомных молекул водорода «заморожены». Предположим, что эти степени свободы «размораживаются» при фиксиро-

(Продолжение см. на с. 34)

# Анализ информации

Во всех задачах этого калейдоскопа надо придумать некоторую конструкцию, иногда очень неожиданную. Многие задачи состоят из двух частей: найти быстрый алгоритм и доказать его оптимальность. Вторая часть обычно более проста – анализируя имеющиеся у нас возможности, несложно объяснить, что быстрее алгоритма не бывает. А вот первая часть требует некоторой изобретательности. Попробуйте!

Мы начнем с совсем простой задачи.

**1.** Имеются чашечные весы, на одну чашу которых кладут гири, а на другую – крупу.

а) Подберите какие-нибудь 5 гирь, позволяющие отмерить как можно больше разных весов.

б) Какое наименьшее число гирь нужно для того, чтобы можно было отмерить за одно взвешивание любое целое число килограммов от 1 до 7?

в) А от 1 до 77?

**Решение.** а) Достаточно подобрать такие гири, чтобы любой их набор давал свою уникальную массу. Подойдут, например, гири 1, 10, 100, 1000 и 10000 кг. Суммарная масса любого набора из этих гирь будет числом из единиц и нулей: единица на  $k$ -м с конца месте означает, что  $k$ -я гиря входит в набор. Видно, что при разных наборах гирь получаются разные суммы.

А сколько всего можно взять таких наборов? Каждую гирю можно либо включить в набор, либо нет. Значит, всего наборов  $2^5 = 32$  (мы учли также вариант не взять ни одной гири), т.е. удастся отмерить 32 разных веса (включая нулевой).

б) Хватит трех гирь, например 1 кг, 2 кг и 4 кг (проверьте). Двумя гирями обойтись не удастся: из них можно будет составить не больше чем 4 разных веса (одна гиря, другая, их сумма и нулевой вес).

в) Подойдут, например, такие семь гирь: 1 кг, 2 кг, 4 кг, 8 кг, 16 кг, 32 кг и 64 кг. Никаких шести гирь не хватит – ведь каждую можно либо положить на чашу, либо нет, т.е. всего способов положить гири на чашу не больше 64. А наших семи гирь достаточно, потому что любое число можно записать в виде суммы различных степеней двойки (см., например, статью И.Акулича «Всего лишь степени двойки» в этом номере журнала). Ясно, что при записи числа от 1 до 77 в виде суммы степеней двойки не могут участвовать степени, начиная с  $2^7 = 128$ , так что удастся обойтись меньшими степенями, т.е. массами наших гирь. На самом деле нашими гирями можно отмерить 128 разных весов.

**2.** Как изменятся ответы в пунктах предыдущей задачи, если разрешить класть гири на обе чаши весов (а крупу – только на одну чашу)?

Вот еще одна очень известная задача.

**3.** Петя задумал целое число от 1 до 64. Вася может задавать Пете любые вопросы, на которые тот сможет ответить «да» или «нет».

а) Как Васе узнать Петино число, задав не более 6 вопросов?

б) Может ли Вася всегда угадывать Петино число, задавая не более 5 вопросов?

**Решение.** Пусть первый вопрос Васи будет такой: «больше ли задуманное тобой число, чем 32?». В случае, когда Петя ответит «нет», задуманное Петей число находится среди тридцати двух чисел 1, 2, ..., 32. В случае, когда ответит «да», задуманное Петей число находится среди тридцати двух чисел 33, 34, ..., 64.

Следующим вопросом Вася узнает, среди каких шестнадцати чисел находится задуманное Петей число: в первом случае надо спросить «больше ли твое число, чем 16?», а во втором – «больше ли твое число, чем 48?». Действуя далее аналогично, Вася каждым очередным вопросом сужает вдвое количество «подозрительных» чисел, и после шестого вопроса узнает задуманное число.

б) **Ответ:** не сможет.

Предположим противное: у Васи есть способ отгадать задуманное число за 5 вопросов. Пусть Вася после каждого своего вопроса записывает на бумажку плюс, если Петя ответил «да», и минус, если Петя ответил «нет». Получив все пять ответов, Петя запишет на бумажке последовательность из пяти знаков, каждый знак – плюс или минус. Всего таких последовательностей  $2^5 = 32$ . По каждой из них Вася должен однозначно угадывать число. Но тогда Вася сможет отгадать не больше 32 разных чисел. Противоречие.

**4.** Изменится ли ответ в предыдущей задаче, если мы должны будем заранее составить список вопросов, а потом, получив ответы на все вопросы, назвать задуманное число?

**Подсказка.** Оказывается, нет – просто вопросы надо чуть хитрее задавать. Первый вопрос будет такой же, как и раньше, второй – уже немного другой: «верно ли, что твое число от 17 до 32 или от 49 до 64?» и так далее.

**5.** В каждую клетку доски  $8 \times 8$  записано целое число от 1 до 64 (каждое по разу). За один вопрос, указав любую совокупность полей, можно узнать числа, стоящие на этих полях (без указания, какую клетку какое число занимает). За какое наименьшее число вопросов всегда можно узнать, какие числа где стоят?

**Решение.** Кажется, эта задача совершенно непохожа на предыдущую. Но так ли это? Занумеруем клетки доски и спросим сначала, какие числа стоят на клетках с 1-й по 32-ю? В результате мы узнаем, какие числа стоят на клетках 1 – 32, и какие – на клетках 33 – 64. Задача свелась к двум аналогичным задачам, но число клеток в каждой задаче уменьшилось вдвое. Ясно, какой будет следующий вопрос? Например, такой: какие числа стоят на клетках 1 – 16, 33 – 48. В результате мы узнаем, какие числа стоят на клетках 1 – 16, какие – на клетках 17 – 32, какие – на клетках 33 – 48, и какие – на клетках 49 – 64. И так далее! Так мы найдем все числа в клетках за 6 вопросов.

А почему за 5 не удастся? Первым вопросом мы как бы разделим доску на две части и про каждую часть узнаем, каков набор чисел записан в клетки этой части. Хотя бы в одной из частей будет минимум 32 клетки. После второго вопроса среди этих 32 клеток найдутся 16

с таким же свойством – мы будем знать только набор записанных там чисел, и ничего более. После 5 вопросов у нас останутся минимум 2 клетки, про которые мы будем знать только, какой набор чисел в них записан, но в какой клетке какое число – мы различить не сможем.

**6.** Петя задумал целое число от 1 до 16. Вася может задавать Пете любые вопросы, на которые можно ответить «да» или «нет». Отвечая на эти вопросы, Петя может один раз соврать (но неизвестно, когда). Как Васе узнать Петино число, задав не более 7 вопросов?

**7.** (Турнир городов) Туристы взяли в поход 80 банок консервов, веса которых известны и различны (есть список). Вскоре надписи на банках стерлись, и только завхоз знает, где что. Он хочет доказать всем, что в какой банке находится, не вскрывая банок и пользуясь только списком и чашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашах. Хватит ли ему для этого а) четырех; б) трех взвешиваний?

**8.** Обезьяна хочет узнать, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть а) 1; б) 2; в) 3 ореха. Какого наименьшего числа бросков ей заведомо хватит? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)

**9.** а) Задуманы  $k$  цифр  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . За один вопрос разрешается выбрать любые натуральные числа  $b_1, b_2, \dots, b_k$  и узнать сумму  $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k$ . Можно ли всего за один такой вопрос наверняка отгадать все задуманные цифры?

б) А хватит ли всего двух вопросов, если задуманы произвольные натуральные числа?

**Решение.** а) Достаточно взять в качестве  $b_1, b_2, \dots, b_k$  числа  $1, 10, \dots, 10^{k-1}$ . Тогда в ответ на наш вопрос мы просто получим число  $a_ka_{k-1} \dots a_2a_1$  – задуманные цифры будут идти в нем одна за другой.

б) Кажется невероятным, что нам может хватить двух вопросов – мы же ничего не знаем о величине наших чисел. Но ведь можно для первого вопроса взять в качестве  $b_1, b_2, \dots, b_k$  все единицы. Тогда мы узнаем сумму наших чисел. Она меньше какой-то степени числа 10, скажем, меньше  $10^n$ . Тогда в качестве  $b_1, b_2, \dots, b_k$  можно взять числа  $10^n, 10^{2n}, \dots, 10^{kn}$  – и наши числа выстроятся в ряд друг за дружкой.

Следующая «совершенно непохожая» задача решается почти точно так же!

**10** (Турнир Городов). Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен  $P(x)$  с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения  $P(2)$  и  $P(P(2))$ . Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

**11** (Турнир Городов). а) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные – картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.

б) Та же задача, но первый выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не

выкладывает. Второй должен угадать невыложенную карту.

**12.** Доступ к сейфу имеют 11 членов комиссии. Сколькими замками достаточно снабдить сейф и какие кому раздать ключи от этих замков, чтобы любые 6 членов комиссии, собравшись вместе, могли открыть сейф, а никакие 5 членов комиссии не могли бы?

**Решение.** Найдем количество всевозможных групп по 5 человек, которые можно составить из нашей комиссии. Их будет  $C_{11}^5 = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462$ .

Тогда сделаем 462 замка, каждому набору из пяти человек сопоставим один замок, а каждому человеку из набора дадим все ключи, кроме ключа от этого замка.

Ясно, что никакие 5 человек сейф не откроют – им не хватит ключа, сопоставленного этому набору.

А почему сейф откроют любые 6 человек? Да потому, что иначе найдется ключ, которого у них нет, а значит, каждый из этих шести человек входит в набор, сопоставленный этому ключу. Но в этом наборе только 5 человек – противоречие.

А вот, казалось бы, совсем другая задача. Но так ли это на самом деле?

**13** (Московская математическая олимпиада). Арена цирка освещается  $n$  различными прожекторами. Каждый прожектор освещает некоторую выпуклую фигуру. Известно, что если выключить один произвольный прожектор, то арена будет по-прежнему полностью освещена, а если выключить произвольные два прожектора, то арена полностью освещена не будет. При каких значениях  $n$  это возможно?

**Подсказка.** Для каждого двух прожекторов должен быть свой уникальный кусочек арены, освещенный только ними.

**14.** а) Король объявил сотне мудрецов, что устроит им испытание. Мудрецам завяжут глаза, наденут каждому на голову черный или белый колпак, построят в колонну и развяжут глаза. Затем мудрецы по очереди, начиная с последнего, должны будут назвать цвет своего колпака. Король требует, чтобы ошибся не больше чем один мудрец. Могут ли мудрецы действовать так, чтобы гарантированно выполнить требование? (Каждый видит всех впереди стоящих; у мудрецов до испытания есть время, чтобы договориться.)

б) А если колпаки могут быть  $k$  данных цветов?

в) А если колпаки могут быть 100 данных цветов, мудрецы стоят по кругу (видят друг друга) и называют цвета своих колпаков одновременно, причем король требует, чтобы цвет своего колпака угадал хотя бы один мудрец?

**15** (Санкт-Петербургская математическая олимпиада). Секретный код к любому из сейфов ФБР – это целое число от 1 до 1700. Два шпиона узнали по одному коду каждый и решили обменяться информацией. Сгласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала первый шпион кинул в воду один или несколько камней, потом – второй, потом – опять первый, и так далее до тех пор, пока камни не кончились. Затем шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация? (Шпионы не сказали друг другу ни слова.)

Материал подготовил С. Дориченко

$$a_1b_1 + a_2b_2$$

(Начало см. на с. 24)

ванной температуре  $T_0 = 80$  К. Сосуд движется с некоторой скоростью  $v$ , а затем сталкивается с очень жестким препятствием и мгновенно останавливается. Какая температура  $T_2$  установится в сосуде? Теплоемкостью стенок сосуда можно пренебречь.

Начальная внутренняя энергия (измеренная в системе центра масс газа) и кинетическая энергия движения газа как целого вместе равны внутренней энергии газа после удара и установления теплового равновесия. Молярная теплоемкость водорода в изохорическом процессе равна  $C_{V_1} = 3R/2$  при температурах меньше  $T_0$  и  $C_{V_2} = 5R/2$  при температурах выше  $T_0$ . А при температуре  $T_0$  газ испытывает фазовый переход. Если скорость движения сосуда такова, что температура газа не поднимется выше 79,9 К, то из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m}{M} \cdot \frac{3}{2} R \cdot T_1 = \frac{m}{M} \cdot \frac{3}{2} R \cdot T_2.$$

Это соответствует скоростям  $v < \sqrt{3R(T_0 - T_1)/M} = 611$  м/с, при этом формула для расчета конечной температуры такова:

$$T_2 = T_1 + \frac{Mv^2}{3R}.$$

Предположим, что конечная температура газа в сосуде выше  $T_0$ . Тогда из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m}{M} \cdot \frac{3}{2} R \cdot T_1 = \frac{m}{M} \cdot \frac{5}{2} R \cdot T_2.$$

Это соответствует скоростям  $v > \sqrt{R(5T_0 - 3T_1)/M} = 1019$  м/с. В этом случае формула для расчета конечной температуры будет такой:

$$T_2 = \frac{3}{5} T_1 + \frac{Mv^2}{5R}.$$

А при скоростях сосуда, лежащих в диапазоне от 611 м/с до 1019 м/с, конечная температура газа будет  $T_2 = T_0 = 80$  К.

С. Варламов

**Ф2248.** Если две одинаковые проводящие пластины, каждая площадью  $S$ , находятся на расстоянии  $d \ll \sqrt{S}$  параллельно друг другу, то электрическая емкость такого конденсатора равна  $C$ . Четыре такие пластины расположены параллельно друг другу, расстояния между соседними пластинами равны  $d$  и две внешние

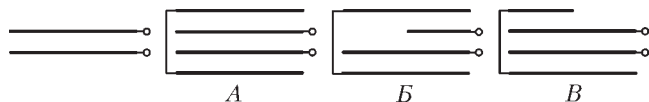


Рис. 1

пластины соединяются тонким проводом (рис. 1, случай А). Какова емкость системы проводников в этом случае, если ее измеряют между указанными на рисунке точками? Затем от одной из пластин отре-

зали и удалили половину (по площади). Какова теперь емкость системы проводников (случаи Б и В)?

Представим каждую внутреннюю пластину в виде сложенных двух тонких пластинок, которые соединены проволокой. Потенциалы этих двух пластинок одинаковы, поле между ними равно нулю. Пластины можно раздвинуть. В результате схема, эквивалентная случаю А, будет выглядеть так, как показано на рисунке 2. Емкость такой системы конденсаторов равна

$$C_A = C + \frac{C}{2} = \frac{3}{2} C.$$

Заметим, что один конденсатор емкостью  $C$  можно представить в виде двух соединенных параллельно конденсаторов, суммарная емкость которых равна  $C$ . Для случая Б это представлено на рисунке 3. Емкость такой системы конденсаторов равна

$$C_B = \frac{C}{2} + \frac{(C/2)(5C/4)}{(C/2) + (5C/4)} = \frac{6}{7} C.$$

Для случая В (рис. 4) аналогичные преобразования дают такой результат:

$$C_V = C + \frac{(C/2)C}{(C/2) + C} = \frac{4}{3} C.$$

С. Дмитриев

**Ф2249.** Вокруг закрепленного точечного положительного заряда  $Q$  вращается небольшой отрицательный заряд  $-q$  с массой  $m$ . Каков период его обращения, если наибольшее расстояние между зарядами в процессе движения в три раза больше наименьшего расстояния, равного  $r_0$ ?

Заряженные частицы взаимодействуют между собой, и их взаимодействие описывается законом Кулона. Этот закон аналогичен закону всемирного тяготения Ньютона. Движение заряженных частиц так же, как и движение планет вокруг Солнца, происходит в соответствии с законами Кеплера. Большая ось орбиты частицы в рассматриваемой задаче равна  $4r_0$ . Поэтому период обращения частицы с зарядом  $q$  (по модулю) и массой  $m$  вокруг заряда  $Q$  будет таким же, как и период обращения этой же частицы по круговой орбите радиусом  $2r_0$ . Из второго закона Ньютона и закона Кулона следует уравнение

$$\frac{mv^2}{2r_0} = \frac{kQq}{(2r_0)^2},$$

где  $k$  — это электрическая постоянная. Отсюда находим

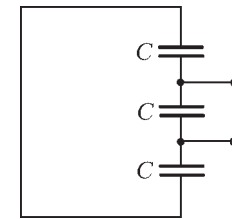


Рис. 2

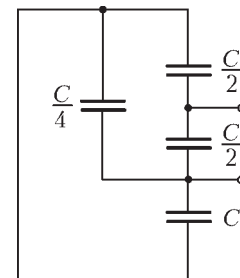


Рис. 3

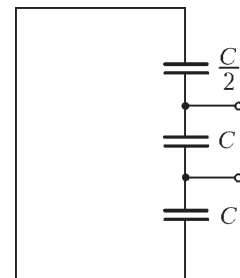


Рис. 4

период обращения:

$$T = \frac{2\pi \cdot 2r_0}{v} = 4\pi r_0 \sqrt{\frac{2mr_0}{kQq}}$$

А.Гуденко

**Ф2250.** На одном конце легкой и достаточно длинной пружины укреплен массивный шарик. Другой конец пружины жестко удерживается в тисках. Пружина имеет большую продольную жесткость и гораздо меньшую «изгибную» жесткость, а шарик может совершать колебания, изгибая пружину. Когда ось пружины в положении равновесия занимает вертикальное положение и шарик находится выше закрепленного конца пружины, то период малых колебаний равен  $T_{\text{верх}}$ . Если же шарик находится ниже закрепленного конца пружины, то период малых колебаний равен  $T_{\text{нижн}} < T_{\text{верх}}$ . Каким будет период малых колебаний шарика, если ось пружины в положении равновесия занимает горизонтальное положение? Длина пружины вдоль ее оси при всех рассматриваемых положениях шарика практически не меняется.

Изгибная жесткость пружины  $k_1$  обеспечивает возникновение силы, возвращающей шарик к положению равновесия. Действие силы тяжести в нижнем положении помогает шарика возвращаться к положению равновесия, а в верхнем положении, наоборот, препятствует этому возвращению. Это соответствует тому, что в верхнем положении «работает» эквивалентная пружина с меньшей жесткостью  $k_1 - k_2$ , а в нижнем положении работает эквивалентная пружина с большей жесткостью  $k_1 + k_2$ . В среднем положении, когда ось пружины горизонтальна, сила тяжести обеспечивает только сдвиг шарика в вертикальном направлении и не влияет на частоту колебаний, которая определяется только одной жесткостью пружины  $k_1$ . Величина, обратная квадрату периода колебаний, в этих трех случаях пропорциональна соответствующей эквивалентной жесткости. Отсюда следует такое равенство:

$$\frac{1}{T_{\text{нижн}}^2} + \frac{1}{T_{\text{верх}}^2} = 2 \frac{1}{T_{\text{средн}}^2},$$

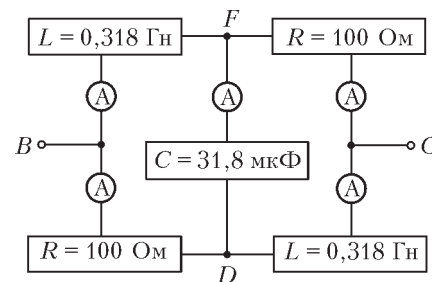
или

$$T_{\text{средн}} = \sqrt{2} \frac{T_{\text{нижн}} T_{\text{верх}}}{\sqrt{T_{\text{нижн}}^2 + T_{\text{верх}}^2}}$$

В.Сергеев

**Ф2251.** К сети переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц точками В и G Вася подключил электрическую схему из различных элементов (см. рисунок). У элементов схемы значения таковы, что  $R = L\omega = 1/(C\omega) = 100 \text{ Ом}$ . Идеальные амперметры показывают эффективные значения тока. Чему равны эти значения?

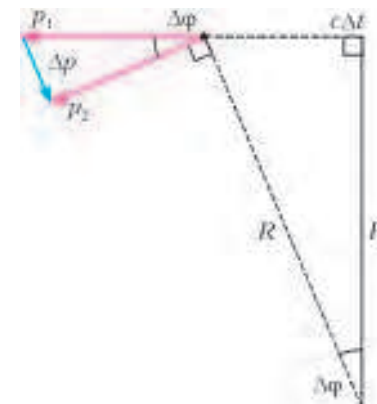
У всех элементов цепи на частоте 50 Гц сопротивления одинаковы и равны 100 Ом. Сопротивление между точками В и D равно нулю, поэтому амперметр слева внизу показывает ноль. И сопротивление между точка-



ми F и G тоже равно нулю, поэтому амперметр справа сверху тоже показывает ноль. А вот левый верхний, правый нижний и средний амперметры показывают одинаковые токи, равные 2,2 А.

А.Зильберман

**Ф2252.** По проекту в Большом адронном коллайдере протоны во встречных пучках будут летать, имея каждый энергию  $E = 7 \text{ ТэВ} = 7 \cdot 10^{12} \text{ эВ}$ . При этом скорость движения частиц всего на несколько метров в секунду меньше скорости света в вакууме  $c$ . Связь между энергией  $E$  частицы и модулем ее импульса  $p$  при таких условиях выглядит очень просто:  $E \approx cp$ . Магнитное поле обеспечивает движение частиц по кольцу общей длиной  $L = 27 \text{ км}$ . Второй закон Ньютона в виде  $\Delta \vec{p}/\Delta t = \vec{F}$  при таких скоростях остается справедливым. Считая кольцо круглым, оцените модуль индукции магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца.



Радиус кольца коллайдера равен  $R = L/(2\pi)$ . При равномерном движении протона по этому кольцу за малое время  $\Delta t$  вектор импульса протона поворачивается на малый угол  $\Delta \phi$ , изменяясь от  $\vec{p}_1$  до  $\vec{p}_2$  (см. рисунок). При этом модуль вектора изменения импульса протона равен  $\Delta p = p\Delta \phi$ , где  $p = p_1 = p_2$  – модуль импульса протона. За это же время протон проходит по дуге окружности расстояние  $c\Delta t = R\Delta \phi$ . Из записанных формул и из второго закона Ньютона следует такая цепочка равенств:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{cp}{R} = \frac{E}{R} = \frac{2\pi E}{L} = F$$

Так как протоны в коллайдере движутся в магнитном поле, на них действует сила Лоренца, равная  $F = ecB$ . Отсюда для модуля индукции магнитного поля получаем

$$B = \frac{F}{ec} = \frac{2\pi E}{ecL} \approx 5,4 \text{ Тл}$$

В.Бак

## Задачи

1. Играют двое: они по очереди ставят фишки, среди которых 2 белые, 2 синие, 2 красные и 2 зеленые, в кружочки фигуры, изображенной на рисунке. Может ли игрок, делающий ход вторым, добиться того, чтобы любые четыре подряд стоящие фишки были разного цвета?

*Фольклор*



2. Винни-Пуху подарили 40 конфет. Он съел сколько влезло, а остальными хотел угостить поровну трех гостей. Но тут пришел четвертый гость. Пришлось хозяину съесть еще 3 конфеты, чтобы число оставшихся делилось на 4. Когда пришел пятый гость, пришлось съесть еще 4 конфеты, чтобы делилось на 5. И тут пришел шестой гость. Сколько конфет придется съесть на этот раз, чтобы оставшиеся поделить поровну на шестерых?

*И. Раскина*



3. Три квадрата со сторонами 10 см, 8 см, 6 см составили так, как показано на рисунке. Определите площадь закрашенной фигуры.

*Фольклор*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Задача 5 предлагалась на X Московской городской устной олимпиаде по математике для 6–7 классов.



4. Какой угол могли образовывать часовая и минутная стрелки часов, если через 20 минут они образовывали такой же угол?

*Фольклор*



5. На острове рыцарей и лжецов путешественник пришел в гости к своему знакомому рыцарю и увидел его за круглым столом с пятью гостями.

– Интересно, а сколько среди вас рыцарей? – спросил он.

– А ты задай каждому какой-нибудь вопрос и узнай сам, – посоветовал один из гостей.

– Хорошо. Скажи мне каждый: кто твои соседи? – спросил путешественник.

На этот вопрос все ответили одинаково.

– Данных недостаточно! – сказал путешественник.

– Но сегодня день моего рождения, не забывай об этом, – сказал один из гостей.

– Да, сегодня день его рождения! – сказал его сосед.

И путешественник смог узнать, сколько за столом рыцарей. Действительно, сколько же их?

*Д. Шноль*



*Иллюстрации Д. Гришуковой*

# Картезианский водолаз — генерация Р

А. ПАНОВ

*Он проводил ее и — картезианским стеклянным человеком, вытянувшимся в струнку призрачным Временем — поднялся на пустынный пятый этаж.*

Владимир Набоков. Ада

**В**ЛАДИМИР НАБОКОВ РОДИЛСЯ В 1899 ГОДУ. РЕНЕ Декарт, латинизированный вариант — Картезий, родился в 1596 году. Большая латинская Р в заголовке — начальная буква слова Pepsi (Пепси). Но — обо всем по порядку.

Именно Декарт придумал игрушечного водолаза. Впервые я увидел картезианского водолаза шестьдесят лет назад в Москве, в подземном переходе под Охотным Рядом. Он выглядел в точности, как описал его Набоков, — в центре наполненного огненной жидкостью сосуда сверкающим эмбрионом висел стеклянный чертик.

Много лет спустя я прочел в журнале «Квант» (№2 за 1973 г.) статью А. Виленкина об этой игрушке, где рассказывалось, как ее сделать и как она действует.

Нужна стеклянная бутылка с широким горлышком, стеклянный аптечный пузырек и тонкая резиновая пленка — кусочек оболочки надувного шарика. В бутылку доверху наливается вода. Пузырек, частично заполненный водой, вверх дном опускается в бутылку. При этом количество воды в пузырьке должно быть отрегулировано таким образом, чтобы он обладал ми-

нимальной плавучестью — при самом слабом толчке он должен уходить глубоко под воду. Эта регулировка — самое хлопотное дело при создании водолаза, с ней трудней всего справиться. После этого на горлышко бутылки следует туго натянуть, обеспечивая герметичность, резиновую пленку и зафиксировать ее ниткой. Водолаз готов.



При нажатии на пленку стеклянный пузырек уходит на дно. Когда пленку отпускаешь, водолаз поднимается. Понаблюдав за поведением водолаза, нетрудно сообразить, в чем здесь дело. При надавливании на пленку воздух внутри бутылки сжимается, в том числе — и в самом пузырьке. Видно, как в пузырек заходит вода, он становится тяжелее и начинает опускаться.

Итак, предложенная конструкция состоит из трех компонентов:

*стеклянная бутылка — аптечный пузырек — резиновая пленка.*

В этой цепочке самым слабым звеном является среднее — очень уж неудобно регулировать количество жидкости в пузырьке.

Много позднее я прочел — судя по рисунку, в книге Х. Рачлиса «Физика в ванне» (серия «Библиотечка «Квант», выпуск 51), — что одну аптечную принадлежность можно заменить на другую: пузырек — на пипетку. В самом деле, в пипетку легко набирается жидкость. Количество жидкости в пипетке можно регулировать очень точно, буквально по капле. Наконец, пипетку можно перемещать с места на место, не теряя при этом ни капли жидкости. Эти функциональные качества пипетки позволяют легко отрегулировать ее плавучесть в любом удобном сосуде, например в тазу, а потом переместить ее в любую бутылку с любым горлышком.

Эта замена приводит к гораздо более удобной конструкции:

*стеклянная бутылка — пипетка — резиновая пленка.*

Если присмотреться к этой цепочке, то здесь можно увидеть еще одно



слабое звено – резиновую пленку. Во-первых, не так уж просто ее зафиксировать и обеспечить герметичность, а во-вторых, слишком уж часто она рвется. Нынешние времена позволяют сделать радикальный шаг и вообще избавиться от пленки.

Сходите за пластиковой бутылочкой из-под пепси. Заполните ее водой по самое горлышко. Опустите туда подготовленную пипетку и поплотнее завинтите крыш-

ку – водолаз готов к действию. При нажатии на пластиковую бутылку объем воздуха внутри пипетки уменьшается, и она опускается вниз. Отпускаем бутылку – пипетка всплывает вверх.

В результате мы получили очень простой в изготовлении и очень современный вариант картезианского водолаза генерации Р:

*пластиковая бутылка – пипетка.*

## Всего лишь степени двойки

И. АКУЛИЧ

ДАВАЙТЕ РАССМОТРИМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЧИСЕЛ, первое из которых равно 1, а каждое последующее вдвое больше: 1, 2, 4, 8, 16, ... Используя показатели степени, ее можно записать в эквивалентном виде:  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ . Называется она вполне ожидаемо: *последовательность степеней двойки*. Кажалось бы, ничего выдающегося в ней нет – последовательность как последовательность, не лучше и не хуже других. Тем не менее, она обладает весьма примечательными свойствами.

Несомненно, многие читатели встречали ее в классической истории об изобретателе шахмат, который попросил у правителя в награду за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, за вторую – два, за третью – четыре, и так далее, все время удваивая число зерен. Понятно, что суммарное их количество равно

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63}. \quad (1)$$

Но так как эта сумма невероятно велика и во много раз превосходит годовой урожай зерновых по всему миру, вышло, что мудрец ободрал правителя как липку.<sup>1</sup>

Однако зададимся сейчас другим вопросом: как с наименьшими затратами труда подсчитать величину  $S$ ? Обладатели калькулятора (или, паче того, компьютера) вполне могут за обозримое время выполнить перемножения, а затем сложить полученные 64 числа, получив ответ: 18446744073709551615. А поскольку объем вычислений немалый, то и вероятность ошибки весьма велика.

Кто похитрей, могут углядеть в этой последовательности *геометрическую прогрессию*. Не знакомые же с этим понятием (или те, кто попросту забыл стандартную формулу суммы геометрической прогрессии) могут использовать следующие рассуждения. Давайте-ка умножим обе части равенства (1) на 2. Так как при удвоении степени двойки ее показатель увеличивается на 1, то получим

$$2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{64}. \quad (2)$$

<sup>1</sup> Впрочем, действительно ли правитель согласился выплатить требуемое, история умалчивает. Более вероятно, что для мудреца все закончилось длительным тюремным заключением по статье «за наглость».

Теперь из (2) вычтем (1). В левой части, понятное дело, получится  $2S - S = S$ . В правой же части произойдет массовое взаимное уничтожение почти всех степеней двойки – от  $2^1$  до  $2^{63}$  включительно, и останется лишь  $2^{64} - 2^0 = 2^{64} - 1$ . Итак:

$$S = 2^{64} - 1.$$

Что ж, выражение заметно упростилось, и теперь, имея калькулятор, позволяющий возводить в степень, можно найти значение этой величины без малейших проблем.

А если и калькулятора нет – как быть? Перемножать в столбик 64 двойки? Еще чего не хватало! Опытный инженер или математик-прикладник, для которого главный фактор – время, сумел бы быстро *оценить* ответ, т.е. найти его приближенно с приемлемой точностью. Как правило, в быту (да и в большинстве естественных наук) вполне допустима погрешность в 2–3%, а если она не превосходит 1% – то это просто великолепно! Оказывается, подсчитать наши зерна с такой погрешностью можно вообще без калькулятора, и всего за несколько минут. Как? Сейчас увидите.

Итак, надо возможно точнее найти произведение 64 двоек (единицу в силу ее ничтожности отбросим сразу). Разобьем их на отдельную группу из 4 двоек и еще на 6 групп по 10 двоек. Произведение двоек в отдельной группе равно  $2^4 = 16$ . А произведение 10 двоек в каждой из остальных групп равно  $2^{10} = 1024$  (убедитесь, кто сомневается!). Но 1024 – это около 1000, т.е.  $10^3$ . Поэтому  $S$  должно быть близко к произведению числа 16 на 6 чисел, каждое из которых равно  $10^3$ , т.е.  $S \approx 16 \cdot 10^{18}$  (ибо  $18 = 3 \cdot 6$ ). Правда, погрешность здесь все же великовата: ведь 6 раз при замене 1024 на 1000 мы ошибались в 1,024 раза, а всего мы ошиблись, как легко видеть, в  $1,024^6$  раз. Так что теперь – дополнительно перемножить 1,024 шесть раз само на себя? Нет уж, обойдемся! Известно, что для числа  $x$ , которое во много раз меньше 1, с высокой точностью справедлива следующая приближенная формула:  $(1+x)^n \approx 1+nx$ . Поэтому  $1,024^6 = (1+0,24)^6 \approx 1+0,24 \cdot 6 = 1,144$ . Посему надо найденное нами число  $16 \cdot 10^{18}$  умножить на число 1,144, в результате чего получится



18304000000000000000, а это отличается от правильного ответа менее чем на 1%. Чего мы и добивались!

В данном случае нам крупно повезло: одна из степеней двойки (а именно – десятая) оказалась весьма близка к одной из степеней десятки (а именно – третьей). Это позволяет нам быстро оценивать значение любой степени двойки, не обязательно 64-й. Среди степеней других чисел подобное встречается нечасто. Например,  $5^{10}$  отличается от  $10^7$  также в 1,024 раза, но... в меньшую сторону.<sup>2</sup> Впрочем, это того же поля ягода: поскольку  $2^{10} \cdot 5^{10} = 10^{10}$ , то во сколько раз  $2^{10}$  превосходит  $10^3$ , во столько же раз  $5^{10}$  меньше, чем  $10^7$ .

Другая интересная особенность рассматриваемой последовательности заключается в том, что любое натуральное число можно построить из *различных* степеней двойки, причем единственным способом. Например, для номера текущего года имеем

$$2012 = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}.$$

Доказать эти возможность и единственность не составляет особого труда. Начнем с *возможности*. Пусть нам надо представить в виде суммы различных степеней двойки некоторое натуральное число  $N$ . Сначала запишем его в виде суммы  $N$  единиц. Так как единица – это  $2^0$ , то первоначально  $N$  есть сумма *одинаковых* степеней двойки. Затем начнем объединять их по парам. Сумма двух чисел, равных  $2^0$ , – это  $2^1$ , так что в результате получится *заведомо меньшее* количество слагаемых, равных  $2^1$ , и, возможно, одно число  $2^0$ , если ему не нашлось пары. Далее попарно объединяем одинаковые слагаемые  $2^1$ , получая еще меньшее количество чисел  $2^2$  (здесь тоже возможно появление непарной степени двойки  $2^1$ ). Затем снова объединяем равные слагаемые попарно, и так далее. Рано или поздно процесс завершится, ибо количество одинаковых степеней двойки после каждого объединения уменьшается. Когда оно станет равным 1 – дело кончено. Осталось сложить все получившиеся непарные степени двойки – и представление готово.

Что касается доказательства *единственности* представления, то здесь хорошо подходит метод «от противного». Пусть одно и то же число  $N$  удалось представить в виде *двух* наборов различных степеней двойки, которые не полностью совпадают (т.е. имеются степени двойки, входящие в один набор, но не входящие в другой, и наоборот). Для начала отбросим все совпадающие степени двойки из обоих наборов (если таковые имеются). Получатся два представления одного и того же числа (меньшего или равного  $N$ ) в виде суммы различных степеней двойки, причем *все* степени в представлениях *различны*. В каждом из представлений выделим *наибольшую* степень. В силу изложенного выше, для двух представлений эти степени *различны*. То представление, для которого эта степень больше,

назовем *первым*, другое – *вторым*. Итак, пусть в первом представлении наибольшая степень равна  $2^m$ , тогда во втором она, очевидно, не превышает  $2^{m-1}$ . Но поскольку (и мы с этим уже сталкивались выше, подсчитывая зерна на шахматной доске) справедливо равенство

$$2^m = (2^{m-1} + 2^{m-2} + \dots + 2^0) + 1,$$

то  $2^m$  *строго больше* суммы всех степеней двойки, не превосходящих  $2^{m-1}$ . По этой причине уже наибольшая степень двойки, входящая в первое представление, наверняка больше суммы *всех* степеней двойки, входящих во второе представление. Противоречие!

Фактически мы только что обосновали возможность записи чисел в *двоичной* системе счисления. Как известно, в ней используются лишь две цифры – ноль и единица, и каждое натуральное число записывается в двоичной системе единственным способом (например, упомянутое выше 2012 – как 11111011100). Если пронумеровать разряды (двоичные цифры) справа налево, начиная с нуля, то номера тех разрядов, в которых стоят единицы, как раз и будут показателями степеней двоек, входящих в представление.<sup>3</sup>

Менее известно следующее свойство множества целых неотрицательных степеней двойки. Давайте некоторым из них произвольным образом присвоим знак «минус», т.е. из положительных сделаем отрицательными. Единственное требование – чтобы в результате и положительных, и отрицательных чисел оказалось *бесконечное количество*. Например, можно присвоить знак «минус» каждой пятой степени двойки или, допустим, оставить положительными только числа  $2^{10}$ ,  $2^{100}$ ,  $2^{1000}$ , и так далее – вариантов здесь сколько угодно.

Как ни удивительно, но любое *целое* число можно (и притом единственным способом) представить в виде суммы различных слагаемых нашей «положительно-отрицательной» последовательности.<sup>4</sup> И доказать это не очень-то сложно (например, индукцией по показателям степеней двоек). Главная идея доказательства – наличие сколь угодно больших по абсолютной величине как положительных, так и отрицательных слагаемых. Попробуйте выполнить доказательство сами.

Интересно понаблюдать за последними цифрами членов последовательности степеней двойки. Так как каждое последующее число последовательности получается удвоением предыдущего, то последняя цифра каждого из них полностью определяется последней цифрой предыдущего числа. А так как различных цифр ограниченное количество, последовательность последних цифр степеней двойки просто *обязана* быть периодической! Длина периода, естественно, не превы-

<sup>2</sup> Для любопытных вот еще одно хорошее совпадение:  $6^9 = 10077696$ , в котором относительное расхождение с ближайшей степенью десятки всего около 0,8%, что примерно втрое меньше, чем для  $2^{10}$ .

<sup>3</sup> Повсеместно используемая десятичная система устроена по такому же принципу. Только вместо степеней двойки используются степени десятки (потому она так и называется), а цифры в записи показывают, в каком количестве очередную степень десятки надо прибавлять.

<sup>4</sup> При этом число 0 (ноль) представляется как полное отсутствие слагаемых (т.е., формально говоря, *нулевое* их количество).

шает 10 (поскольку именно столько цифр мы используем), но это сильно завышенное значение. Попробуем оценить его, не выписывая пока саму последовательность. Ясно, что последние цифры всех степеней двойки, начиная с  $2^1$ , *четные*. Кроме того, среди них не может быть нуля – потому что число, оканчивающееся нулем, делится на 5, в чем заподозрить степени двойки никак нельзя. А так как четных цифр без нуля имеется всего четыре, то и длина периода не превосходит 4.

Проверка показывает, что так оно и есть, причем периодичность проявляется почти сразу: 1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... – в полном соответствии с теорией!

Не менее успешно можно оценить и длину периода последней пары цифр последовательности степеней двойки. Так как все степени двойки, начиная с  $2^2$ , делятся на 4, то и числа, образованные их последними двумя цифрами, делятся на 4. Не более чем двузначных чисел, делящихся на 4, имеется всего 25 (для однозначных чисел предпоследней цифрой считаем ноль), но из них надо выбросить пять чисел, оканчивающихся нулем: 00, 20, 40, 60 и 80. Так что период может содержать не более  $25 - 5 = 20$  чисел. Проверка показывает, что так и есть, начинается период с числа  $2^2$  и содержит пары цифр: 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, а затем опять 04 и так далее.

Аналогично можно доказать, что длина периода последних  $m$  цифр последовательности степеней двойки не превышает  $4 \cdot 5^{m-1}$  (более того – на самом деле она *равна*  $4 \cdot 5^{m-1}$ , но доказать это значительно сложнее).

Итак, на последние цифры степеней двойки наложены довольно жесткие ограничения. А как насчет *первых* цифр? Здесь ситуация практически противоположная. Оказывается, для *любого* набора цифр (первая из которых – не ноль) найдется степень двойки, начинающаяся с этого набора цифр. И таких степеней двойки *бесконечно много*! Например, существует бесконечное количество степеней двойки, начинающихся с цифр 2012 или, скажем, 33333333333333333333.

А если рассмотреть только одну самую первую цифру различных степеней двойки – какие значения она может принимать? Нетрудно убедиться, что любые – от 1 до 9 включительно (нуля среди них, естественно, нет). Но какие из них встречаются чаще, а какие реже? Как-то сразу не видно причин, по которым одна цифра должна встречаться чаще другой. Однако более глубокие размышления показывают, что как раз равной встречаемости цифр ожидать не приходится. Действительно, если первая цифра какой-либо степени двойки есть 5, 6, 7, 8 или 9, то первая цифра следующей за ней степени двойки будет обязательно *единицей*! Поэтому должен иметь место «перекося», по крайней мере, в сторону единицы. Следовательно, вряд ли и остальные цифры будут «равнопредставленными».

Практика (а именно – прямой компьютерный расчет для первых нескольких десятков тысяч степеней двойки) подтверждает наши подозрения. Вот какова относительная доля первых цифр степеней двойки с округлением до 4 знаков после запятой:

1 – 0,3010  
2 – 0,1761  
3 – 0,1249  
4 – 0,0969  
5 – 0,0792  
6 – 0,0669  
7 – 0,0580  
8 – 0,0512  
9 – 0,0458

Как видим, с ростом цифр эта величина убывает (и потому та же единица примерно в 6,5 раз чаще бывает первой цифрой степеней двойки, чем девятка). Как ни покажется странным, но практически такое же соотношение количеств первых цифр будет иметь место почти для любой последовательности степеней – не только двойки, но, скажем, и тройки, пятерки, восьмерки и вообще *почти любого* числа, в том числе и нецелого (исключение составляют лишь некоторые «особые» числа). Причины этого весьма глубоки и непросты, и для их уяснения надо знать логарифмы. Для тех, кто с ними знаком, приоткроем завесу: оказывается, относительная доля степеней двойки<sup>5</sup>, десятичная запись которых начинается с цифры  $F$  (для  $F = 1, 2, \dots, 9$ ), составляет  $\lg(F+1) - \lg(F)$ , где  $\lg$  – так называемый *десятичный логарифм*, равный показателю степени, в которую надо возвести число 10, чтобы получить число, стоящее под знаком логарифма.<sup>6</sup>

Используя упомянутую выше связь между степенями двойки и пятерки, А.Канель обнаружил интересное явление. Давайте из последовательности первых цифр степеней двойки (1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, ...) выберем несколько цифр *подряд* и запишем их в обратном порядке. Оказывается, эти цифры непременно встретятся *тоже подряд*, начиная с некоторого места, в последовательности первых цифр степеней пятерки.<sup>7</sup>

Степени двойки также являются своеобразным «генератором» для производства широко известных *совершенных чисел*, которые равны сумме всех своих делителей, за исключением себя самого. Например, у числа 6 четыре делителя: 1, 2, 3 и 6. Отбросим тот, который равен самому числу 6. Осталось три делителя, сумма которых как раз равна  $1 + 2 + 3 = 6$ . Поэтому 6 – совершенное число.

Для получения совершенного числа возьмем две последовательные степени двойки:  $2^{n-1}$  и  $2^n$ . Уменьшим большую из них на 1, получим  $2^n - 1$ . Оказывается, если это – простое число, то, домножив его на предыдущую степень двойки, мы образуем совершенное число  $2^{n-1}(2^n - 1)$ . Например, при  $n = 3$  получаем исходные числа 4 и 8. Так как  $8 - 1 = 7$  – простое число,

<sup>5</sup> И не только двойки, как было отмечено ранее!

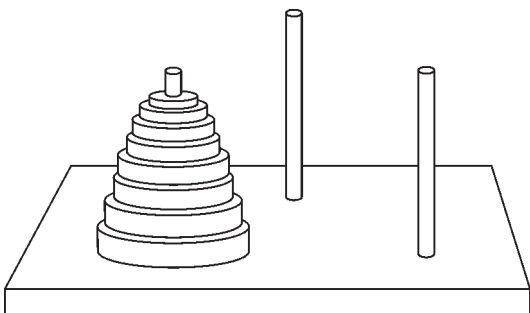
<sup>6</sup> Жаждающие подробностей могут прочесть статью В.Болтянского «Часто ли степени двойки начинаются с единицы?» («Квант» №5 за 1978 г.), а также статью В.Арнольда «Статистика первых цифр степеней двойки и передел мира» («Квант» №1 за 1998 г.).

<sup>7</sup> См. задачу М1599 из «Задачника «Кванта» («Квант» № 6 за 1997 г.).

то  $4 \cdot 7 = 28$  – совершенное число.<sup>8</sup> Более того – в свое время Леонард Эйлер доказал, что все *четные* совершенные числа имеют именно такой вид. Нечетные совершенные числа пока не обнаружены (и мало кто верит в их существование).

Тесную связь имеют степени двойки с так называемыми *числами Каталана*, последовательность которых имеет вид 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429... Они часто возникают при решении различных комбинаторных задач. Например, сколькими способами можно разбить выпуклый  $n$ -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями? Все тот же Эйлер выяснил, что это значение равно  $(n-1)$ -му числу Каталана (обозначим его  $K_{n-1}$ ), и он же выяснил, что  $K_n = K_{n-1} \cdot (4n-6)/n$ . Последовательность чисел Каталана имеет множество любопытных свойств, и одно из них (как раз связанное с темой этой статьи) заключается в том, что порядковые номера всех нечетных чисел Каталана являются степенями двойки!

Степени двойки нередко встречаются в различных задачах, причем не только в условиях, но и в ответах. Возьмем, например, популярную когда-то (да и поныне не забытую) *Ханойскую башню*. Так называлась игра-головоломка, придуманная в XIX веке французским математиком Э.Люка. Она содержит три стержня, на один из которых надето  $n$  дисков с отверстием в середине каждого. Диаметры всех дисков различны, и они расположены в порядке убывания снизу вверх, т.е. самый большой диск – внизу (см. рисунок). Получилась как бы башня из дисков.



Требуется перенести эту башню на другой стержень, соблюдая такие правила: перекладывать диски строго по одному (снимая верхний диск с любого стержня) и всегда класть только меньший диск на больший, но не наоборот. Спрашивается: какое наименьшее число ходов для этого потребуется? (Ходом мы называем снятие диска с одного стержня и надевание его на другой.) Ответ: оно равно  $2^n - 1$ , что легко доказывается по индукции.

Пусть для  $n$  дисков потребное наименьшее число ходов равно  $X_n$ . Найдем  $X_{n+1}$ . В процессе работы рано или поздно придется снимать самый большой диск со стержня, на который первоначально были

надеты все диски. Так как этот диск можно надевать только на пустой стержень (иначе он «придавит» меньший диск, что запрещено), то все верхние  $n$  дисков придется предварительно перенести на третий стержень. Для этого потребуется не меньше  $X_n$  ходов. Далее переносим наибольший диск на пустой стержень – вот еще один ход. Наконец, чтобы сверху его «притиснуть» меньшими  $n$  дисками, опять потребуется не меньше  $X_n$  ходов. Итак,  $X_{n+1} \geq X_n + 1 + X_n = 2X_n + 1$ . С другой стороны, описанные выше действия показывают, как можно справиться с задачей именно  $2X_n + 1$  ходами. Поэтому окончательно  $X_{n+1} = 2X_n + 1$ . Получено рекуррентное соотношение, но для того чтобы его привести к «нормальному» виду, надо еще найти  $X_1$ . Ну, это проще простого:  $X_1 = 1$  (меньше просто не бывает!). Не составляет труда, основываясь на этих данных, выяснить, что  $X_n = 2^n - 1$ .

Вот еще одна интересная задача:

*Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел.*

Давайте проверим сначала наименьшие числа. Ясно, что число 1 в указанном виде непредставимо. Зато все нечетные, которые больше 1, представить, конечно, можно. В самом деле, любое нечетное число, большее 1, можно записать как  $2k + 1$  ( $k$  – натуральное), что есть сумма двух последовательных натуральных чисел:  $2k + 1 = k + (k + 1)$ .

А как обстоят дела с четными числами? Легко убедиться, что числа 2 и 4 нельзя представить в требуемом виде. Может, и для всех четных чисел так? Увы, следующее же четное число опровергает наше предположение:  $6 = 1 + 2 + 3$ . Зато число 8 опять не поддается. Правда, следующие числа вновь уступают натиску:  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ ,  $12 = 3 + 4 + 5$ ,  $14 = 2 + 3 + 4 + 5$ , а вот 16 – вновь непредставимо.

Что ж, накопленная информация позволяет сделать предварительные выводы. Обратите внимание: не удалось представить в указанном виде *только степени двойки*. Верно ли это для остальных чисел? Оказывается, да! В самом деле, рассмотрим сумму всех натуральных чисел от  $m$  до  $n$  включительно. Так как всего их, по условию, не меньше двух, то  $n > m$ . Как известно, сумма последовательных членов арифметической прогрессии (а ведь именно с ней мы имеем дело!) равна произведению полусуммы первого и последнего членов на их количество. Полусумма равна  $\frac{n+m}{2}$ , а количество чисел равно  $n - m + 1$ . Поэтому сумма равна  $\frac{(n+m)(n-m+1)}{2}$ . Заметим, что в числителе находятся два сомножителя, каждый из которых *строго больше 1*, и при этом четность их – различна. Выходит, что сумма всех натуральных чисел от  $m$  до  $n$  включительно делится на нечетное число, большее 1, и потому не может быть степенью двойки. Так что теперь понятно, почему не удалось представить степени двойки в нужном виде.

Осталось убедиться, что *не степени двойки* представить можно. Что касается нечетных чисел, то с ними мы

<sup>8</sup> В настоящее время известны 43 совершенных числа, наибольшее из которых равно  $2^{30402456} (2^{30402457} - 1)$ . Оно содержит свыше 18 миллионов цифр.

уже разобрались выше. Возьмем какое-либо четное число, не являющееся степенью двойки. Пусть наибольшая степень двойки, на которую оно делится, это  $2^a$  ( $a$  – натуральное). Тогда если число поделить на  $2^a$ , получится уже *нечетное* число, большее 1, которое мы запишем в знакомом виде – как  $2k + 1$  ( $k$  – тоже натуральное). Значит, в целом наше четное число, не являющееся степенью двойки, равно  $2^a(2k + 1)$ .

А теперь рассмотрим два варианта:

1)  $2^{a+1} > 2k + 1$ . Возьмем сумму  $2k + 1$  последовательных натуральных чисел, *среднее* из которых равно  $2^a$ . Легко видеть, что тогда *наименьшее* из них равно  $2^a - k$ , а *наибольшее* равно  $2^a + k$ , причём *наименьшее* (и, значит, все остальные) – положительное, т.е. действительно натуральное. Ну, а сумма, очевидно, составляет как раз  $2^a(2k + 1)$ .

2)  $2^{a+1} < 2k + 1$ . Возьмем сумму  $2^{a+1}$  последовательных натуральных чисел. Здесь нельзя указать *среднее* число, ибо количество чисел четное, но указать *пару средних* чисел можно: пусть это числа  $k$  и  $k + 1$ . Тогда *наименьшее* из всех чисел равно  $k + 1 - 2^a$  (и тоже положительное!), а *наибольшее* равно  $k + 2^a$ . Сумма их тоже равна  $2^a(2k + 1)$ .

Вот и все. Итак, ответ: непредставимые числа – это степени двойки, и только они.

А вот еще одна задача (впервые ее предложил В.Произволов, но в несколько иной формулировке):

*Садовый участок окружен сплошным забором из N досок. Согласно приказу тети Полли Том Соьер белит забор, но по собственной системе: продвигаясь*

*все время по часовой стрелке, сначала белит произвольную доску, затем пропускает одну доску и белит следующую, затем пропускает две доски и белит следующую, затем пропускает три доски и белит следующую, и так далее, каждый раз пропуская на одну доску больше (при этом некоторые доски могут быть побелены несколько раз – Тома это не смущает).*

*Том считает, что при такой схеме рано или поздно все доски будут побелены, а тетя Полли уверена, что хотя бы одна доска останется непобеленной, сколько бы Том ни работал. При каких N прав Том, а при каких – тетя Полли?*

Описанная система побелки представляется довольно хаотичной, поэтому первоначально может показаться, что для любого (или *почти* любого)  $N$  каждой доске когда-нибудь достанется своя доля известки, т.е., в основном, прав Том. Но первое впечатление обманчиво, потому что на самом деле Том прав только для значений  $N$ , являющихся степенями двойки. Для остальных  $N$  найдется доска, которая так и останется навеки непобеленной. Доказательство этого факта довольно громоздко (хотя, в принципе, несложно). Предлагаем читателю выполнить его самому.

Вот каковы они – степени двойки. С виду – проще простого, а как копнешь... И затронули мы здесь далеко не все удивительные и загадочные свойства этой последовательности, а лишь те, что бросились в глаза. Ну, а читателю предоставляется право самостоятельно продолжить исследования в этой области. Несомненно, они окажутся плодотворными.

## НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

# Оптические явления в автобусе

**В.КОТОВ**

**В** ОЙДЯ В САЛОН АВТОБУСА, МЫ ПОПАДАЕМ В ОКРУЖЕНИЕ разнообразных оптических «приборов», подобных линзам, призмам, зеркалам. Это и потолок автобуса, и стекла его окон – как чистые, так и покрытые водой и льдом. Опишем некоторые оптические явления, которые можно наблюдать, находясь в салоне автобуса в теплое время года.

**Неровности оконного стекла.** Если вы сидите напротив окна в салоне автобуса, то, глядя через середину окна с

расстояния приблизительно 0,5 м, вы почти не обнаружите искажений предметов, находящихся за окном. Однако если вы переведете взгляд ближе к краю окна, то увидите предметы в заметно искаженном виде. Эти искажения особенно значительны для протяженных прямолинейных предметов – проводов, трамвайных и железнодорожных путей, разметки дороги, всевозможных ограждений. Все они выглядят изломанными, разорванными и сморщенными.

Причина искажения обнаруживается, если перевести взгляд на соседние находящиеся на вашей стороне окна салона. Оказывается, поверхность стекол не идеально плоская, а слегка искривленная. Искривления возникают при вытягивании листа стекла из расплавленной массы с последующей протяжкой через формирующие валки. Вследствие неравномерного вытягивания стекла из расплава и неровностей формирующих валков искривления имеют вид протяженных канавок и валиков, параллельных линии вытягивания стекла. Иными словами, стекло представляет собой набор ориентированных в одном направлении цилиндрических собирающих и рассеивающих линз. В транспорте эти линзы имеют обычно вертикальную ориентацию, но иногда встречается и горизонтальная.

**Задание 1.** Рассмотрите изображение текста в книге и изображение далеких предметов через цилиндрическую со-

бирающую линзу, используя стеклянную палочку, пробирку или тонкий стакан с водой. Обратите внимание на то, что в изображении удаленных предметов меняется местами правое и левое. Поэтому, в частности, при движении автобуса изображение в такой короткофокусной линзе движется по ходу автобуса, а не назад.

Почему же для того чтобы обнаружить искажения изображения и вызывающие их неровности стекла, наблюдателю требуется смотреть на дальние стекла салона?

Во-первых, о состоянии поверхности стекла легче судить в отраженном ею свете, падающем изнутри салона. А коэффициент отражения у стекла для белого света при углах падения, лежащих в пределах от 0 до 50°, не очень велик, но заметно возрастает с увеличением угла падения, приближаясь к единице.

Во-вторых, из-за малой кривизны неровностей стекла образуемые ими цилиндрические линзы слабо отклоняют лучи, падающие на них по оптической оси и под малыми углами к ней. Поэтому при наблюдении под малым углом искажения изображения заметны мало. Иное дело – наблюдение под большим углом зрения, когда существенно возрастает толщина рассматриваемого среза линзы.

**Тень от стекла.** Когда в салон автобуса заглянет солнце, на полу и стенах салона появятся изображения окон в виде светлых параллелограммов. Обратите внимание на темные тени в виде прерывистых полос и пятен, параллельных одной из сторон изображения окна. Своим происхождением они обязаны опять-таки неровностям стекла. Как уже говорилось, поверхность стекла покрыта валиками и бороздами, которые играют роль цилиндрических линз. Участки стекла, обладающие свойствами цилиндрических вогнутых рассеивающих линз, создают на экране (на стене, листе бумаги) освещенность, постоянно уменьшающуюся по мере его удаления от стекла. Для выпуклых цилиндрических собирающих линз освещенность близко расположенного (ближе фокуса) экрана такая же, как и для рассеивающих участков (все рассматриваемые линзы из-за малой кривизны поверхности обычно длиннофокусные). На экране, расположенном в фокусе и позади него, видны светлые полосы, яркость которых уменьшается по мере удаления экрана от фокуса.

Заметим, что все сказанное справедливо и для обычного оконного стекла.

**Задание 2.** Рассмотрите тень от оконного стекла в свете уличного фонаря. На экране, достаточно удаленном от стекла, будет виден ряд почти параллельных полос. Встаньте у экрана (светлой стены) в падающем на него световом потоке, закройте один глаз и, глядя на фонарь, перемещайтесь поперек полос – горизонтально при вертикальном их расположении и вертикально при горизонтальном. Вы увидите, что фонарь мерцает и беспорядочно смещается поперек полос. Это результат изменения углов падения и преломления световых лучей при взгляде на источник света через разные участки стекла.

**Задание 3.** Рассмотрите тень от цилиндрической собирающей линзы (стеклянной палочки, пробирки или тонкого стакана с водой) в свете от сильной электрической лампочки или от солнца. Наблюдая одним глазом, вы заметите описанные выше эффекты.

**Закаленное стекло.** Неоднородность свойств закаленного стекла вызывает разложение и поляризацию света при прохождении через его толщу. При рассматривании стекла в солнечном свете центры напряжений проявляются в виде желтовато-фиолетовых округлых пятен (рис.1). Для стекол автобуса диаметр этих пятен около 1 см. Довольно правильное расположение пятен рядами по всему стеклу соответствует равномерному распределению центров напряжения по его

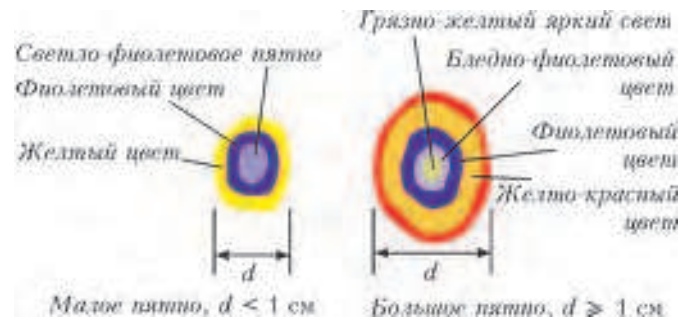


Рис.1. Цветные пятна на закаленном стекле

площади. Надавив слегка на стекло, можно заметить, что пятна немного сместятся, ибо изменится распределение напряжений.

В условиях салона автобуса проводить такие наблюдения нелегко. Автору удавалось это делать, глядя одним глазом под большим углом к стеклу, как в условиях прямого попадания солнечных лучей, так и в рассеянном солнечном свете. При наблюдении пятен в отраженном свете солнце, светившее через противоположное окно автобуса, находилось довольно низко над горизонтом (рис.2). На рисунке 3 дана схема другого наблюдения пятен, проведенного в проходящем солнечном свете.

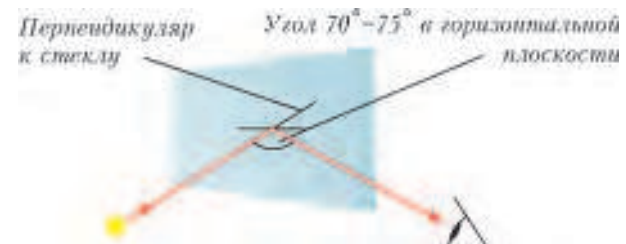


Рис.2. Наблюдение пятен в отраженном свете

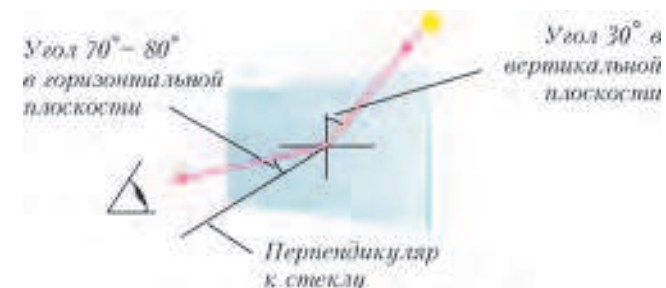


Рис.3. Наблюдение пятен в проходящем свете

**Световые дорожки на поцарапанном стекле.** Взгляните через окно автобуса на сильный источник света (утром это может быть солнце, а вечером – фары автомобилей или фонари). Вы увидите (при условии, что стекло перпендикулярно лучу зрения) на стекле множество тонких прямых царапин, расположенных по касательным к концентрическим окружностям с центром, совпадающим с изображением источника света. Посмотрите через другую часть окна – картина будет такая же. Из этого можно сделать вывод, что стекло покрыто царапинами сплошь во всех направлениях. Но наибольшее число лучей преломляют (и поэтому хорошо видны) лишь царапины, перпендикулярные одной из плоскостей, проходящих через луч зрения (рис.4).

Если же смотреть на источник света через стекло, расположенное под острым углом к лучу зрения, то мы увидим на

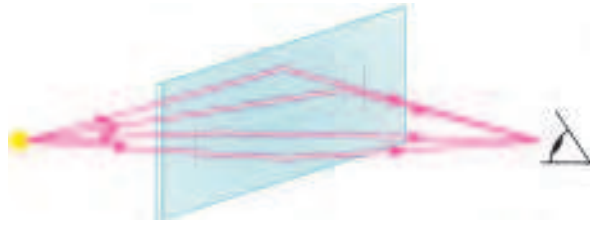


Рис.4. Светящиеся царапины на стекле

стекле световую дорожку из параллельных царапин, проходящую через источник света. Эти царапины располагаются перпендикулярно плоскости, проходящей через луч зрения и перпендикуляр к стеклу. При движении автобуса дорожка перемещается, так как стекло поворачивается. Эта кажущаяся прямой световая дорожка на самом деле является дугой гиперболы, но мы наблюдаем ее на маленьком участке, поэтому направления отрезков световой дорожки по обе стороны изображения источника света немного не совпадают (рис.5). На наблюдения световой дорожки ночью сильно влияют погодные условия. Так, дорожка лучше видна при

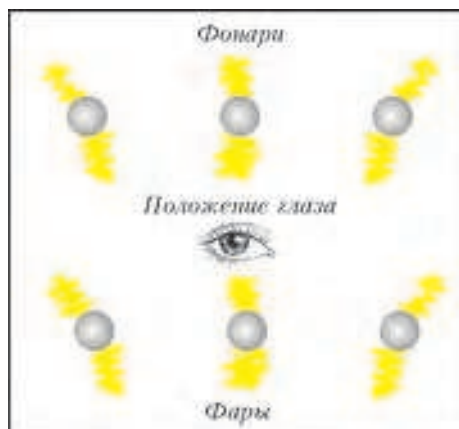


Рис.5. Световые дорожки от разных источников света

повышенной влажности воздуха и низкой положительной температуре – вероятно, из-за оседания влаги на царапинах.

Если наблюдать за световой дорожкой от солнца с разных расстояний до стекла, то можно заметить следующее. По мере удаления глаза от стекла внешние контуры дорожки искажаются, в ней выделяются отдельные более яркие участки и она распадается на ряд светлых пятен. Как уже отмечалось, оконное стекло представляет набор цилиндрических выпуклых и вогнутых линз. Эти длиннофокусные линзы отклоняют лучи от некоторых участков дорожки, не позволяя им попадать в глаз наблюдателя.

Интересное явление можно наблюдать в темное время суток в электропоезде. При движении электропоезда мимо фонаря световые дорожки выглядят состоящими из отдельных более светлых и менее светлых участков, образованных царапинами. Эти участки движутся поступательно. Кроме того, удавалось наблюдать (довольно редко) видимость кругового движения светлых участков в пределах дорожки: свет как бы переходит по окружности с одних светлых участков на соседние. Видимо, эффект вызван неровностями стекла и движением поезда по закруглению.

А теперь рассмотрим дорожку от солнца на стекле. Если царапины очень тонкие, то на них происходит дифракция света. В определенных направлениях световая дорожка излучает свет в виде черточек или огоньков красного, зеле-

ного и синего цвета. Они вспыхивают и гаснут, когда глаз перемещается.

**Задание 4.** Понаблюдайте за свечением царапин и цветами дифракции на них при взгляде на солнце через сильно поцарапанное органическое стекло. Наклоняйте его, меняйте условия преломления света. Обратите внимание на то, что одним и тем же цветом по всей длине светятся царапины, имеющие постоянные размеры (ширину и глубину).

**Световые дорожки на круговых неровностях.** Стеклоочиститель автомобиля часто оставляет концентрические круги на мокром стекле – водяные бороздки и валики, через которые преломляются или от которых отражаются лучи источников света. Глядя на такое стекло, мы можем заметить световую дорожку, направленную по радиусу круга и проходящую через изображение источника света. Данный факт объясняется отражением или максимальным преломлением лучей источника именно от расположенных на световой дорожке склонов круговых бороздок и валиков. Отметим, что не имеет существенного значения способ отклонения световых лучей – отражение или преломление, т.е. внутри или вне салона находится источник света. Главное, что в обоих случаях лучи остаются в плоскости своего падения.

**Задание 5.** Понаблюдайте за световой дорожкой и ее перемещением, используя отражение солнца от поверхности, покрытой концентрическими кругами: компакт-диска, виниловой пластинки, свежего токарного среза детали или зеркала, на котором вспотевшим пальцем проведены круги. Наклоняйте поверхность и заставляйте световую дорожку поворачиваться, как пропеллер.

**Зеркальный потолок.** Известно ли вам, что салон автобуса имеет некоторое сходство с «комнатой смеха»? В нем тоже имеется «кривое» зеркало. Оно, правда, одно, но значительное по величине. Весь обшитый пластиком потолок салона представляет собой вогнутое цилиндрическое зеркало переменной кривизны. Это зеркало не является правильным цилиндром, оно ближе к плоскости с загнутыми краями.

Потолочное зеркало замечательно еще тем, что оно не только искажает изображения предметов салона, но и не позволяет пассажиру увидеть собственное изображение. Эта особенность зависит не от формы потолка, а от оптических свойств покрывающего его материала. Если посмотреть на потолок в салоне автобуса, то над головой он темный и матовый, а по мере удаления от наблюдателя он постепенно переходит в блестящий и зеркальный. Вдали от наблюдателя в потолке, как в зеркале, отражаются расположенные под ним в салоне автобуса предметы, освещенные внешним солнечным светом, и видно отражение окон салона. В темное время суток вдали можно наблюдать отражение от потолка находящихся на нем включенных осветительных плафонов.

Причина удивительной особенности потолка автобуса в том, что потолок по-разному отражает падающие на него под различными углами лучи света. Лучи, падающие под малыми углами, рассеиваются, а падающие под большими углами зеркально отражаются. Таково свойство большинства гладких поверхностей. В глаз наблюдателю в салоне попадают лишь лучи, идущие от удаленных предметов, потому что они падают на потолок под большими углами и испытывают зеркальное отражение. Исходящие же от непосредственно окружающих наблюдателя предметов лучи (которые после отражения от потолка могли бы попасть в его глаза) падают на потолок под малыми углами и рассеиваются.

**Задание 6.** Исследуйте, как изменится наблюдаемая на потолке картина, если изменить расстояние по вертикали от потолка до глаз наблюдателя в автобусе.

# Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике ...

А.БЛИНКОВ, Ю.БЛИНКОВ

РАССМОТРИМ ЛЮБОПЫТНУЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ КОНФИГУРАЦИЮ, которая возникает во многих задачах, в том числе и ставших «классическими»: отрезок  $CD$  разбивает треугольник  $ABC$  на два треугольника, в каждый из которых

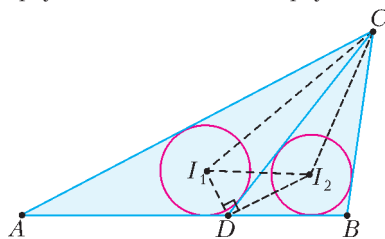


Рис. 1

вписана окружность. Пусть точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры этих окружностей (рис.1).

Некоторые свойства этой конфигурации практически очевидны:

1. а) Треугольник  $I_1DI_2$  – прямоугольный.

Действительно,  $DI_1$  и  $DI_2$  – биссектрисы смежных углов, поэтому  $\angle I_1DI_2 = 90^\circ$ .

б)  $\angle I_1CI_2 = \frac{1}{2} \angle ACB$ .

Действительно,  $CI_1$  и  $CI_2$  – биссектрисы углов  $ACD$  и  $B CD$  соответственно.

2. Пусть  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ACD$  и  $B CD$ ,  $r$  – радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Тогда  $r_1 + r_2 > r$ .

Действительно, так как  $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD}$ , то, используя формулу, выражающую площадь треугольника через радиус вписанной окружности и полупериметр, получим:

$pr = p_1r_1 + p_2r_2 \Leftrightarrow r = \frac{p_1}{p}r_1 + \frac{p_2}{p}r_2$ . Из неравенства треугольника следует, что  $p_1 < p$  и  $p_2 < p$  (см. рис.1), т.е.  $r < r_1 + r_2$ , что и требовалось.

Отметим, что доказанное утверждение можно обобщить для любого описанного многоугольника (см. задачу 1 для самостоятельного решения).

Для того чтобы получить другие свойства рассматриваемой конфигурации, нам потребуется вспомнить один из фактов школьного курса геометрии.

Пусть окружность вписана в треугольник  $ABC$  со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Тогда расстояния от вершин треугольника до точек касания равны  $p - a$ ,  $p - b$  и  $p - c$ , где  $p$  – полупериметр треугольника (рис.2).

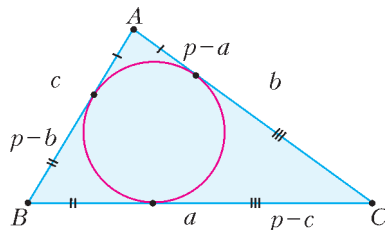


Рис. 2

Доказательство не сложно восстановить по рисунку 2.

3. Пусть окружности, вписанные в треугольники  $ACD$  и  $B CD$ , касаются прямой  $CD$  в точках  $E$  и  $F$  (рис.3).

Выясним, от каких линейных величин зависит длина отрезка  $EF$ .

Введем стандартные обозначения для сторон треугольника  $ABC$ , а также:  $AD = x$ ,  $BD = y$ ,  $CD = d$ . Периметры треугольников  $ACD$  и  $B CD$  обозначим  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. Тогда

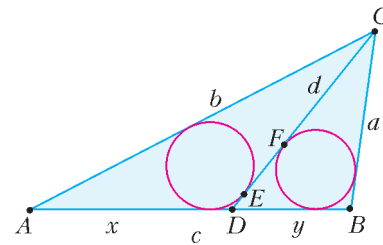


Рис. 3

$$EF = |DF - DE| = |(p_2 - a) - (p_1 - b)| = \left| \frac{d + y - a}{2} - \frac{d + x - b}{2} \right| = \frac{|(b + y) - (a + x)|}{2}.$$

Таким образом, это расстояние зависит от длин четырех отрезков. Это позволяет рассмотреть *важные частные случаи*, которые фигурируют в качестве отдельных задач во многих источниках (см., например, [3], [6] и [7]).

а) Пусть  $a = b$ , т.е. треугольник  $ABC$  – равнобедренный с основанием  $AB$ . Тогда  $EF = \frac{|y - x|}{2}$ , а значит, в этом случае достаточно знать длины отрезков, на которые точка  $D$  разбивает  $AB$ .

б) Пусть точка  $D$  – середина  $AB$ , т.е.  $CD$  – медиана треугольника  $ABC$ . Тогда  $x = y$ , значит,  $EF = \frac{|b - a|}{2}$ , т.е. в этом случае достаточно знать длины сторон  $AC$  и  $BC$ .

в) Пусть  $CD$  – биссектриса треугольника  $ABC$ . Тогда  $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$  и  $x + y = c$ . Решая эту систему уравнений, получим

$$x = \frac{bc}{a + b}, \quad y = \frac{ac}{a + b}. \quad \text{Значит, } EF = \frac{(a + b - c)|b - a|}{2(b + a)}.$$

г) Пусть  $D$  – точка касания окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , со стороной  $AB$ . Тогда  $x = p - a$ ,  $y = p - b$ , где  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$ . Следовательно,  $a + x = b + y$ , поэтому  $EF = 0$ . Геометрически это означает, что обе окружности касаются  $CD$  в одной и той же точке, т.е. эти окружности касаются друг друга.

Полученный результат не только сам по себе интересен, но допускает и некоторую пространственную аналогию (см. задачу 9 для самостоятельного решения).

*Замечание.* Отметим также, что если бы изначально была сформулирована обратная задача: «При каком расположении точки  $D$  окружности касаются друг друга?», то догадаться, что  $D$  – точка касания вписанной окружности со стороной, исходя только из полученной нами общей формулы, было бы весьма непросто. Ниже мы покажем, как этот результат можно получить из других соображений.

Наше дальнейшее исследование будет связано с точками, в которых три окружности касаются стороны  $AB$ .

Пусть  $I$ ,  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$ ,  $ACD$  и  $B CD$  соответственно,  $L$ ,  $M$  и  $K$  – точки касания этих окружностей со стороной  $AB$  (рис. 4).

4. Докажем «ключевой» факт:  $ML = DK$ .  
Действительно,  $DK = p_2 - a = \frac{CD + BD - a}{2}$ ,

$$ML = AL - AM = (p - a) - (p_1 - CD) = \frac{b + c - a}{2} - \frac{b + AD - CD}{2} = \frac{c - a + CD - AD}{2} = \frac{CD + BD - a}{2},$$

так как  $AD + BD = c$ . Следовательно,  $ML = DK$ , что и требовалось.

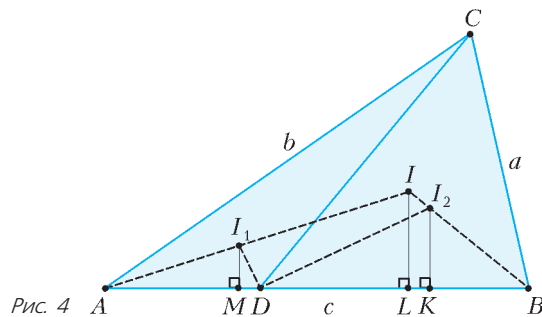


Рис. 4

Используя это равенство, можно последовательно получить другие свойства рассматриваемой конфигурации.

В частности, это дает другой способ доказательства того, что окружности с центрами  $I_1$  и  $I_2$  касаются тогда и только тогда, когда точки  $D$  и  $L$  совпадают. Действительно, касание окружностей с центрами  $I_1$  и  $I_2$  равносильно тому, что они

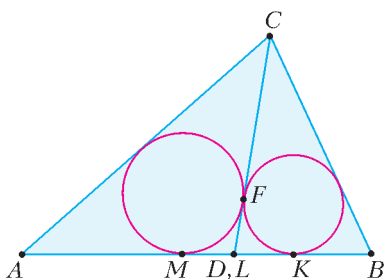


Рис. 5

касаются отрезка  $CD$  в одной и той же точке  $F$ , что, в свою очередь, равносильно равенству отрезков касательных:  $DM = DF = DK$  (рис. 5). Учтывая, что  $ML = DK$ , получим, что это равносильно совпадению точек  $D$  и  $L$ .

Несколько лет назад на олимпиаде по геометрии была предложена следующая задача (V Московская устная олимпиада по геометрии, автор — П.Кожевников). Фиксированы две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , одна из них внешняя касательная  $n$  и одна из внутренних касательных  $t$ . На прямой  $t$  выбирается точка  $X$ , а на прямой  $n$  строятся точки  $Y$  и  $Z$  так, что  $XY$  и  $XZ$  касаются  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, а треугольник  $XYZ$  содержит окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники  $XYZ$ , лежат на одной прямой (рис. 6).

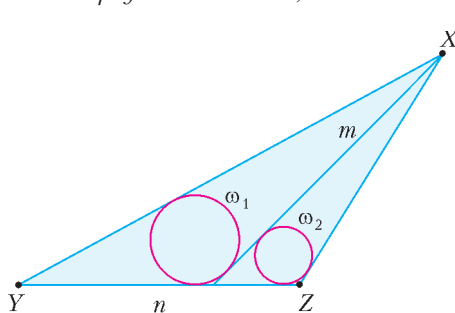


Рис. 6

Если бы мы ранее не рассмотрели свойство точек касания окружностей со стороной  $AB$ , то к этой задаче было бы трудно подступиться. Теперь же надо просто вникнуть в условие. Пусть  $M$  и  $K$  — точки касания данных окружностей с прямой  $n$ ,  $D = n \cap t$ . Рассмотрим рисунок 4, на котором  $X \equiv C$ ,  $Y \equiv A$ ,  $Z \equiv B$ , тогда  $CD \equiv t$ ,  $AB \equiv n$ . Точки  $M$ ,  $K$  и  $D$  фиксированы (следует из условия). Рассмотрим точку  $L$  касания вписанной окружности треугольника  $XYZ$  с прямой  $YZ$ . Так как  $ML = DK$  и  $L$  лежит между  $M$  и  $K$ , то точка  $L$  также фиксирована. Центр  $I$  окружности, вписанной в треугольник  $XYZ$ , лежит на перпендикуляре к  $YZ$ , проходящем через точку  $L$ . Следовательно, центры окружностей, вписанных в треугольники  $XYZ$ , лежат на одной прямой.

**5.** Еще одно важное свойство нашей конфигурации (V Соросовская олимпиада школьников, автор — И.Шарыгин): *точки  $I_1$ ,  $L$ ,  $D$  и  $I_2$  лежат на одной окружности.*

Рассмотрим точку  $Q$  — середину отрезка  $I_1I_2$ , который является большей боковой стороной прямоугольной трапе-

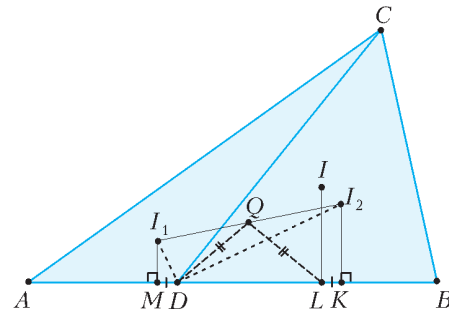


Рис. 7

ции  $MI_1I_2K$  (рис. 7). Тогда точка  $Q$  равноудалена от точек  $M$  и  $K$ . Из равенства  $ML = DK$  следует, что  $MD = LK$ , значит, точка  $Q$  равноудалена также и от точек  $D$  и  $L$ . Так как  $\angle I_1DI_2 = 90^\circ$ , то окружность с диаметром  $I_1I_2$  проходит через точку  $D$ , а тогда эта окружность проходит и через точку  $L$ , что и требовалось.

Это свойство оказывается очень существенным при рассмотрении частного случая, когда  $CD$  — высота треугольника  $ABC$ , лежащая внутри треугольника.

**6.** Докажем, что в этом случае:

- $I_1L = I_2L$ ;
- вершина  $P$  квадрата  $I_1LI_2P$  лежит на прямой  $CD$ .

Рассмотрим окружность с диаметром  $I_1I_2$  (рис. 8). По доказанному, точки  $L$  и  $D$  лежат на этой окружности.

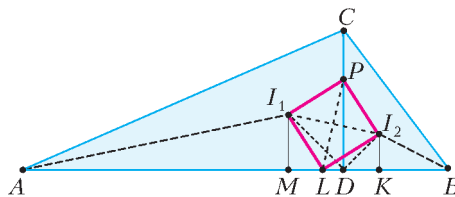


Рис. 8

а)  $\angle I_1LI_2 = 90^\circ$ , поэтому в прямоугольных треугольниках  $I_1ML$  и  $LKI_2$  острые углы соответственно равны. Кроме того, так как  $DI_2$  — биссектриса угла  $BDC$ , то  $\angle I_2DK = 45^\circ$ , значит,  $I_2K = DK = ML$ . Таким образом, треугольники  $I_1ML$  и  $LKI_2$  равны, поэтому  $I_1L = I_2L$ .

б) Если  $I_1LI_2P$  — квадрат, то  $LP$  — диаметр той же окружности, тогда  $\angle LDP = 90^\circ$ , значит, точка  $P$  лежит на высоте  $CD$ .

**7.** Пусть теперь треугольник  $ABC$  — прямоугольный, а  $CD$  — его высота, проведенная к гипотенузе (рис. 9). Докажем, что:

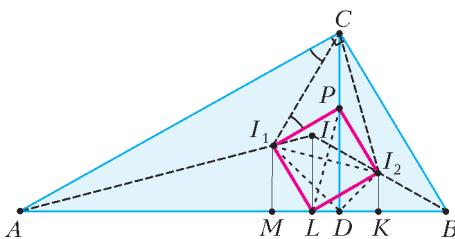


Рис. 9

- точка  $P$  — центр окружности, описанной около треугольника  $I_1CI_2$ ;
- $I_1L \perp AC$  и  $I_2L \perp BC$ ;
- $I_1L = IL = I_2L$ ;
- точки  $A$ ,  $I_1$ ,  $I_2$  и  $B$  лежат на одной окружности.

а) Так как  $\angle I_1CI_2 = 45^\circ$ ,  $\angle I_1PI_2 = 90^\circ$  и точка  $P$  равноудалена от точек  $I_1$  и  $I_2$ , то  $P$  — центр окружности, описанной около треугольника  $I_1CI_2$ .

б) Из доказанного в пункте а) следует, что  $\angle PI_1C =$



$= \angle PCI_1 = \angle ACI_1$ , значит,  $PI_1 \parallel AC$ , тогда  $I_1L \perp AC$ . Аналогично,  $PI_2 \parallel BC$  и  $I_2L \perp BC$ .

в) Пусть  $\angle CAB = \alpha$ , тогда  $\angle AIL = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ , а  $\angle I_1LI = \alpha$  (его стороны соответственно перпендикулярны сторонам угла  $BAC$ ). Значит,

$$\angle I_1LI = 180^\circ - (\angle AIL + \angle I_1LI) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha = \angle I_1IL.$$

Следовательно,  $I_1L = IL$ . Равенство  $I_1L = I_2L$  уже доказано в пункте а) свойства 6.

г) Так как

$$\angle I_1I_2L = \angle I_1LI - \angle I_2LI = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha - 45^\circ = 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha = \angle I_2BA,$$

то четырехугольник  $AI_1I_2B$  – вписанный, что и требовалось.

Широко известны геометрические утверждения, которые легко доказываются «в одну сторону», а доказательство утверждений, им обратных, сопряжено со значительными трудностями. Свойство нашей конфигурации, рассмотренное в пункте 6, дает возможность в очередной раз продемонстрировать этот «эффект обратной задачи».

**8.** Напомним одну известную задачу.

Пусть  $CD$  – высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , проведенная к гипотенузе, а радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$ ,  $ACD$  и  $BDC$ , равны  $r$ ,  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Докажите, что  $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ .

Для ее решения обычно используется тот факт, что треугольники  $ACD$  и  $BDC$  подобны треугольнику  $ABC$  с коэффициентами  $\frac{r_1}{r}$  и  $\frac{r_2}{r}$  соответственно. Тогда  $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{r_1^2}{r^2}$ ,  $\frac{S_{BCD}}{S_{ABC}} = \frac{r_2^2}{r^2}$ . Так как  $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD}$ , то, сложив эти равенства почленно, получим требуемое равенство.

Обратное утверждение столь же просто доказать не получится, так как неоткуда взять подобные треугольники! Зато можно продолжить рассуждения из доказательства свойства 6, а. Действительно, так как  $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ , то  $r_1 < r$  и  $r_2 < r$ , тогда высота  $CD$  лежит внутри треугольника  $ABC$ . Так как треугольники  $I_1ML$  и  $LKI_2$  равны, то  $r_1 = I_1M = LK$  и  $r_2 = I_2K = LM$  (см. рис.8). Значит,  $r_1^2 + r_2^2 = I_1L^2 = I_2L^2$ , тогда  $IL = r = I_1L = I_2L$ , т.е. треугольники  $I_1LI$  и  $I_2LI$  – равнобедренные (см. рис.9). Используем то, что сумма углов четырехугольника  $I_1I_2L$  равна  $360^\circ$ . Учтя, что

$$\angle I_1I_2L = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = \angle I_1LI + \angle I_2LI, \quad \angle I_1LI_2 = 90^\circ,$$

получим, что  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , т.е.  $\angle ACB = 90^\circ$  (где  $\beta = \angle ABC$ ).

Отметим, что и обратную задачу можно решать аналогично.

**9.** Теперь уместно рассмотреть такой вопрос: *могут ли окружности, вписанные в треугольники  $ACD$  и  $BDC$ , иметь равные радиусы?*

Да, конечно. Это легко понять из соображений непрерывности: меняя положение точки  $D$ , мы можем получить как разбиение, при котором первая окружность больше второй, так и разбиение, при котором первая окружность меньше. Тогда, в силу непрерывности перемещения точки  $D$  по отрезку  $AB$ , существует положение точки  $D$ , при котором окружности равны (теорема о промежуточном значении непрерывной функции).

Более того, оказывается, что такую точку  $D$  можно построить с помощью циркуля и линейки! Рассмотрим соответствующую задачу (IV Московская устная олимпиада по геометрии, автор – М.Волчкевич).

Дан произвольный треугольник  $ABC$ . Постройте прямую, проходящую через точку  $C$  и разбивающую его на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей.

Проведем анализ. Пусть  $CD$  – отрезок искомой прямой (точка  $D$  – на стороне  $AB$ ),  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $ACD$ ,  $BDC$  и  $ABC$  соответственно (рис. 10). Тогда точки  $I_1$  и  $I_2$  лежат на лучах  $IA$  и  $IB$  соответственно, причем  $I_1I_2 \parallel AB$ . Кроме того,  $\angle I_1CI_2 = \frac{1}{2}\angle ACB$ .

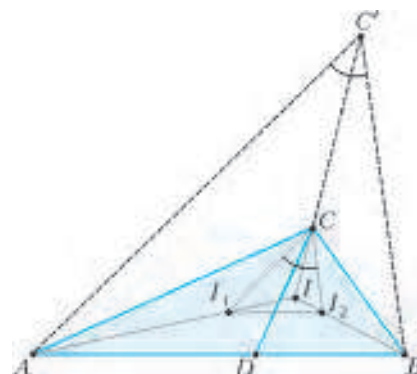


Рис. 10

Рассмотрим такую гомотегию с центром  $I$ , что образами точек  $I_1$  и  $I_2$  являются точки  $A$  и  $B$  соответственно. Тогда образом точки  $C$  является точка  $C'$ , лежащая на луче  $IC$ , из которой сторона  $AB$  видна под углом, равным  $\frac{1}{2}\angle ACB$ . Значит, можно построить точку  $C'$  как пересечение луча  $IC$  с геометрическим местом точек, из которых  $AB$  видна под углом, равным  $\frac{1}{2}\angle ACB$ . Выполнив затем гомотегию с центром  $I$  и коэффициентом  $k = \frac{IC}{IC'}$ , получим точки  $I_1$  и  $I_2$ .

Прямая  $CD$  – общая касательная двух окружностей с центрами в этих точках и радиусами, равными расстоянию между прямыми  $I_1I_2$  и  $AB$  (достаточно построить касательную к одной из окружностей, проходящую через точку  $C$ , тогда она автоматически будет касательной и к другой окружности).

В заключительной части решения можно также использовать то, что отрезок  $I_1I_2$  виден из искомой точки  $D$  под углом  $90^\circ$ .

**10.** Интересен еще один частный случай (автор задачи – И.Кушнир).

Точка  $D$  выбрана на гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  так, что окружности, вписанные в треугольники  $ACD$  и  $BDC$ , имеют равные радиусы. Тогда  $S_{ABC} = CD^2$ .

Докажем это. Пусть  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $ACD$ ,  $BDC$  и  $ABC$  (рис.11).

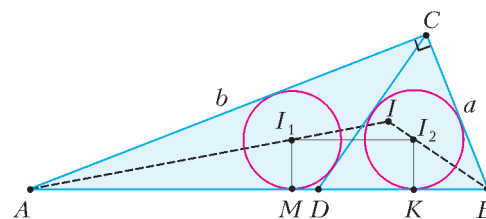


Рис. 11

Тогда точки  $I_1$  и  $I_2$  лежат на лучах  $IA$  и  $IB$  соответственно, причем  $I_1I_2 \parallel AB$ . Следовательно, треугольники  $AIB$  и  $I_1I_2$  подобны, значит,

$$\frac{r}{r - r_1} = \frac{c}{I_1I_2}.$$

Теперь воспользуемся тем, что  $S_{ABC} = S_{ACD} + S_{BCD} = (p_1 + p_2)r_1$ , где  $r_1$  – радиус равных окружностей. Пусть  $CD = d$ , тогда  $p_1 + p_2 = p + d$ , где  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$ . Таким образом,

$$r_1 = \frac{S_{ABC}}{p + d} = \frac{pr}{p + d}.$$

Так как расстояние между точками  $I_1$  и  $I_2$  равно

расстоянию между точками  $M$  и  $K$  касания окружностей со стороной  $AB$ , то

$$I_1I_2 = DM + DK = p_1 - b + p_2 - a = p + d - a - b.$$

Из найденных трех соотношений получим

$$c \left( r - \frac{pr}{p+d} \right) = r(p+d-a-b) \Leftrightarrow$$

$$cd = (p+d)^2 - (p+d)(a+b) \Leftrightarrow$$

$$cd = p^2 + d^2 + 2pd - pa - pb - ad - bd \Leftrightarrow$$

$$p^2 + d^2 = pa + pb \Leftrightarrow d^2 = p(p-c) = pr = S_{ABC}.$$

«Под занавес» рассмотрим две сложные задачи, связанные с нашей конфигурацией.

**11** (автор – Л.Емельянов). В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $CD$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $ACD$  и  $BCD$ , а точки  $J_1$  и  $J_2$  –

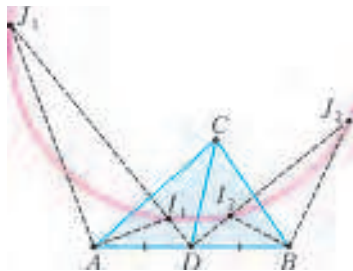


Рис. 12

центры вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон  $AC$  и  $BC$  соответственно (рис. 12). Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

**Доказательство.** Нам потребуется следующая лемма.

Дан треугольник  $ABC$ ,  $I$  – центр вписанной в него окружности,  $Q$  – центр вневписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ . Тогда  $AI \cdot AQ = AB \cdot AC$ .

Доказать это утверждение можно по-разному. Например, рассмотрим треугольники  $ABQ$  и  $AIC$  (рис. 13):  $\angle BAQ = \angle IAC$ , кроме того, так как  $\angle IBQ = 90^\circ$ , то  $\angle ABQ = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$ , а  $\angle AIC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B = \angle ABQ$ . Таким образом,

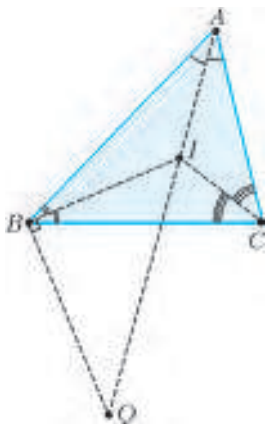


Рис. 13

эти треугольники подобны, значит,  $\frac{AB}{AI} = \frac{AQ}{AC}$ , откуда и следует доказываемое равенство.

Другой способ – использовать симметрию относительно биссектрисы  $AI$  и свойство секущей.

По доказанной лемме для треугольников  $ADC$  и  $BDC$  имеем:  $DI_1 \cdot DJ_1 = DA \cdot DC = DB \cdot DC = DI_2 \cdot DJ_2$ , откуда и следует утверждение задачи.

**12** (заключительный этап XXXVII Всероссийской олимпиады, автор – М.Кунгожин). В неравностороннем треугольнике

$ABC$  проведена медиана  $AM$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABM$  и  $ACM$ ,  $N$  – середина дуги  $BC$  (содержащей вершину  $A$ ). Докажите, что точки  $A$ ,  $N$ ,  $I_1$  и  $I_2$  лежат на одной окружности (рис. 14).

Доказательство будет состоять из нескольких частей, которые мы будем формулировать и доказывать по отдельности.

1) Пусть  $J_1$  и  $J_2$  – центры вневписанных окружностей треугольника  $ABC$ , касающихся сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно. Тогда точка  $N$  – середина отрезка  $J_1J_2$ .

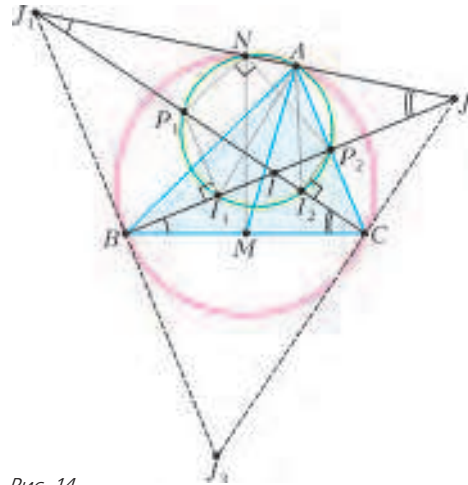


Рис. 14

Действительно, пусть  $J_3$  – центр третьей вневписанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  – основания высот треугольника  $J_1J_2J_3$  (так как угол между внутренней и внешней биссектрисами угла прямой). Следовательно, окружность, описанная около треугольника  $ABC$ , является окружностью девяти точек треугольника  $J_1J_2J_3$ , а значит, она проходит через середины сторон треугольника  $J_1J_2J_3$ . Так как расстояния от середины стороны  $J_1J_2$  до оснований высот  $B$  и  $C$  одинаковы, точка  $N$  совпадает с серединой  $J_1J_2$ .

2) Пусть  $M$  – середина отрезка  $BC$ , тогда точки  $M$  и  $N$  соответствуют друг другу в подобных треугольниках  $IBC$  и  $I_1J_1J_2$ .

Действительно,  $\angle J_1BJ_2 = \angle J_1CJ_2 = 90^\circ$  (углы между внутренними и внешними биссектрисами). Следовательно, точки  $B$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $J_1J_2$ , значит,  $\angle BCJ_1 = \angle BJ_2J_1$ . Тогда указанные треугольники подобны (по двум углам), а точки  $M$  и  $N$  – середины соответствующих сторон этих треугольников.

3) Рассмотрим окружность  $\gamma$ , проходящую через точки  $A$ ,  $I_1$  и  $I_2$ . Пусть  $\gamma$  вторично пересекает  $BI$  и  $CI$  в точках  $P_1$  и  $P_2$  соответственно. Докажем, что  $P_1P_2$  – диаметр этой окружности.

$$\text{Действительно, } \angle I_1P_1I_2 = \angle I_1P_2I_2 = \angle I_1AI_2 = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

С другой стороны,  $\angle BIP_1 = \angle IBC + \angle ICB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ - \angle I_1P_1I_2$ . Следовательно,  $\angle P_1I_1P_2 = \angle P_1I_2P_2 = 90^\circ$ , т.е.

$P_1P_2$  – диаметр окружности  $\gamma$ .

4) Так как  $P_1I_1 \perp BJ_2$  и  $J_1B \perp BJ_2$ , то  $P_1I_1 \parallel J_1B$ , тогда  $\frac{PI_1}{IP_1} = \frac{IB}{IJ_1}$ , т.е. точки  $I_1$  и  $P_1$  соответствуют друг другу в подобных треугольниках  $IBC$  и  $I_1J_1J_2$ . Аналогично, точки  $I_2$  и  $P_2$  – также соответствующие. Таким образом,  $\angle P_1NP_2 = \angle I_1MI_2 = 90^\circ$ , а значит, точка  $N$  лежит на окружности  $\gamma$ , что и требовалось доказать.

#### Задачи для самостоятельного решения

**1.** Описанный многоугольник произвольным образом разбит на треугольники. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники, больше радиуса окружности, вписанной в многоугольник.

**2.** Пусть  $BM$  – медиана треугольника  $ABC$ . В треугольники  $ABM$  и  $CBM$  вписаны окружности радиусов  $r$  и  $R$  ( $r < R$ ).

Докажите, что  $\frac{R}{r} < 2$ .

**3.** В прямоугольном треугольнике с катетами 5 и 12 проведена

медиана к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с гипотенузой.

4. В треугольнике со сторонами 3 и 5 и углом  $120^\circ$  между ними проведена биссектриса к третьей стороне и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с биссектрисой.

5. В прямоугольном треугольнике с катетом 1 и противолежащим углом  $30^\circ$  проведена высота к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

6. В прямоугольном треугольнике проведена высота к гипотенузе и в образовавшиеся треугольники вписаны окружности, расстояние между центрами которых равно  $d$ . Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

7. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $CD$  к гипотенузе  $AB$ . Докажите, что  $r_1 + r_2 + r = CD$ , где  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r$  – радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ACD$ ,  $B CD$  и  $ABC$  соответственно.

8. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $CD$ , лежащая внутри треугольника;  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r$  – радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ACD$ ,  $B CD$  и  $ABC$  соответственно. Докажите, что  $r^2 < r_1^2 + r_2^2$  тогда и только тогда, когда угол  $ACB$  – тупой.

9. Докажите, что суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра равны тогда и только тогда, когда существует сфера, касающаяся всех его ребер. (Такой тетраэдр называют *каркасным*.)

10. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $D$ . Для треугольников  $ADC$  и  $BDC$  рассматриваются вневписанные

окружности, касающиеся сторон  $AC$  и  $BC$  соответственно. Пусть  $P$  и  $Q$  – точки касания этих окружностей с прямой  $DC$ .

а) Найдите  $PQ$ , если  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AD = x$ ,  $BD = y$ .

б) Рассмотрите частные случаи (аналогичные разобранным в свойстве 3).

11 (Л.Емельянов). На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$  так, что равны радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $ACD$ . Докажите, что равны радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон  $AD$  и  $CD$  соответственно.

**Список литературы и веб-ресурсов**

1. Н.Х.Агаханов и др. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009: Заключительные этапы. – М.: МЦНМО, 2010.
2. А.В.Акопян. Геометрия в картинках. – Москва, 2011.
3. Р.К.Гордин. Геометрия. Планиметрия. Задачник для 7 – 9 классов. – М.: МЦНМО, 2004.
4. И.А.Кушнир. Геометрия на баррикадах – 2. – Киев: Знання України, 2011.
5. Материалы для проведения заключительного этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников, 2010/11 учебный год. – Москва, 2011.
6. В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии: в 2 ч. – М.: Наука, 1995.
7. И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. – М.: Астрель, 2001.
8. olympiads.mcsme.ru/ustn – устные геометрические олимпиады.
9. www.problems.ru – база задач по математике.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

# Воробьями по пушкам!

А.ПОЛЯНСКИЙ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ, ПОЛЬЗУЯСЬ ДВУМЯ ПРОСТЫМИ И элегантными фактами, решим две достаточно сложные задачи. Возникает ситуация, обратная пословице «из пушек по воробьям», поэтому мы и назвали статью «Воробьями по пушкам!» Все дальнейшие рассуждения напрямую будут связаны с расположением точек на картинке, поэтому автор надеется, что добросовестный читатель проверит все «в общем случае».

Вначале введем несколько обозначений. Пусть задан неравносторонний треугольник  $ABC$  ( $AB < BC$ ), на его сторонах  $AB$  и  $BC$  выбраны точки  $C_0$  и  $A_0$  соответственно, точка  $B_1$  – середина дуги  $ABC$  описанной окружности  $\omega$  треугольника  $ABC$ , точка  $I$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , точка  $M$  – середина стороны  $AC$ . Равенство  $B_1A = B_1C$  считаем очевидным.

А вот и наши факты-«воробьи».

**Факт 1.** Равенство  $AC_0 = CA_0$  выполняется тогда и только тогда, когда точки  $A_0$ ,  $C_0$ ,  $B_1$ ,  $B$  лежат на одной окружности.

**Доказательство.** Пусть  $AC_0 = CA_0$  (рис. 1). Тогда треугольники  $AC_0B_1$  и  $CA_0B_1$  равны, поскольку  $AC_0 = CA_0$ ,

$AB_1 = CB_1$ ,  $\angle B_1AB = \angle B_1CB$  (как два угла, опирающихся на одну и ту же дугу  $BB_1$ ). Из равенства треугольников получаем

$$\begin{aligned} \angle C_0B_1A_0 &= \angle C_0B_1A + \angle AB_1A_0 = \\ &= \angle AB_1A_0 + \angle A_0B_1C = \angle AB_1C = \angle ABC. \end{aligned}$$

А последнее означает, что точки  $A_0$ ,  $C_0$ ,  $B_1$ ,  $B$  лежат на одной окружности  $\omega_0$ . В обратную сторону утверждение теперь становится очевидным.

**Факт 2.** Окружность, описанная около треугольника  $A_0BC_0$ , проходит через  $I$  тогда и только тогда, когда  $AC_0 + CA_0 = AC$ .

**Доказательство.** Пусть точки  $A_0$ ,  $B$ ,  $C_0$ ,  $I$  лежат на одной окружности (рис.2). Обозначим через

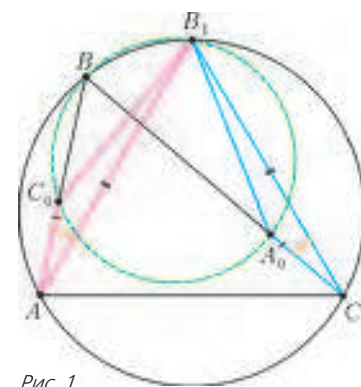


Рис. 1

$C'_0$ ,  $A'_0$ ,  $B'_0$  точки касания вписанной окружности со сторонами  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  соответственно. Если точки  $A_0$  и  $C_0$  совпадают с точками касания вписанной окружности  $A'_0$  и  $C'_0$  (в таком случае четырехугольник  $BC'_0IA'_0$  – вписанный), то  $AC'_0 + CA'_0 = AB'_0 + CB'_0 = AC$ . Если же не совпадают, и точка  $A_0$  лежит между  $A'_0$  и  $C$  (случай, когда  $A_0$  лежит между  $B$  и  $A'_0$ , рассматривается аналогично), то прямоугольные треугольники  $IC'_0C_0$  и  $IA'_0A_0$  равны по катету и углу:  $IC'_0 = IA'_0$  и  $\angle IA_0B = 180^\circ - \angle IC_0B = \angle IC_0A$  (первое равенство углов следует из того, что четырехугольник  $BC_0IA_0$

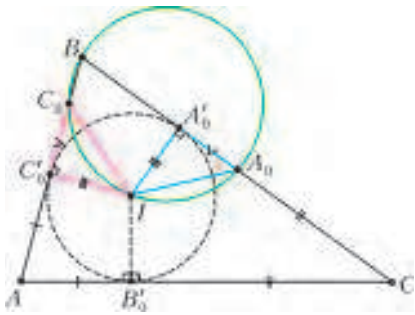


Рис. 2

нются справедливыми. Надо только оговорить, что если  $C_0$  не будет находиться на луче  $AB$  и (или)  $A_0$  не будет находиться на луче  $CB$ , то длины отрезков  $AC_0$  и (или)  $CA_0$  будем считать отрицательными.

Теперь мы готовы начать «стрельбу по пушкам» – т.е. применять наши факты-«воробы» к двум задачам, которые

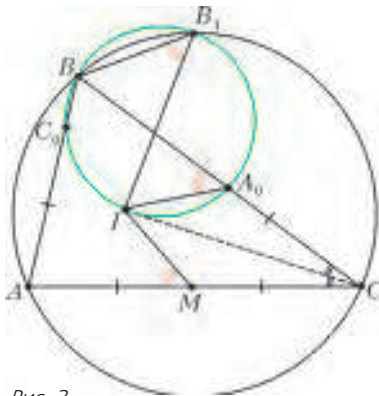


Рис. 3

были далеко не самыми легкими на Всероссийской олимпиаде по математике, окружной этап, 9 и 10 классы, автор – А.Бадзян). Докажите, что  $\angle IB_1B = \angle IMA$ .

**Задача 2** (XXXVII Всероссийская олимпиада, заключительный этап, 11 класс, автор – М.Кунгожин). Докажите, что центры  $I_A$  и  $I_C$  окружностей, вписанных в треугольники  $AMB$  и  $CMB$ , и точки  $B$  и  $B_1$  лежат на одной окружности.

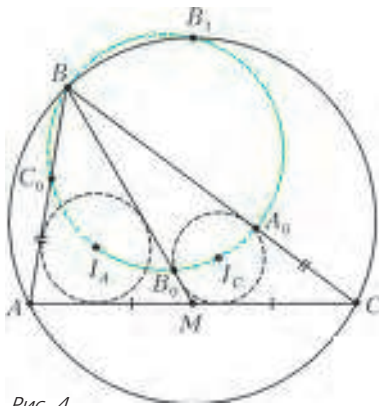


Рис. 4

$CMB$ , получаем, что

$$AC_0 + MB_0 = AM = \frac{AC}{2} = MC = MB_0 + CA_0.$$

Значит,  $AC_0 = CA_0$ . Из факта 1 следует, что данная окружность проходит также и через точку  $B_1$ . Утверждение доказано.

вписанный). Тогда  $C_0C'_0 = A_0A'_0$  и  $AC_0 + CA_0 = AC'_0 + C'_0C_0 + CA'_0 - A'_0A_0 = AC'_0 + CA'_0 = AC$ . В обратную сторону утверждение доказывается аналогично.

**Замечание** (к фактам 1 и 2). Если точки  $C_0$  и  $A_0$  «выбегут» за стороны  $AB$  и  $CB$ , то факты 1 и 2 остаются справедливыми. Надо только оговорить, что если  $C_0$  не будет находиться на луче  $AB$  и (или)  $A_0$  не будет находиться на луче  $CB$ , то длины отрезков  $AC_0$  и (или)  $CA_0$  будем считать отрицательными.

**Задача 1** (XXXI Всероссийская олимпиада, окружной этап, 9 и 10 классы, автор – А.Бадзян). Докажите, что  $\angle IB_1B = \angle IMA$ .

**Решение.** Построим окружность, описанную около треугольника  $BB_1I$  (рис. 3). Она пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $C_0$  и  $A_0$  соответственно. Из факта 1 следует, что  $AC_0 = CA_0$ , а из факта 2 – что  $2AC_0 = AC_0 + CA_0 = AC$ , откуда  $AC_0 = CA_0 = CM = AM$ . Значит, точки  $A_0$  и  $M$  симметричны относительно биссектрисы  $CI$ . Следовательно,  $\angle IMA = \angle IA_0B = \angle IB_1B$  (последние два угла равны как опирающиеся на одну дугу  $BC_0I$ ). Утверждение доказано.

**Решение.** Построим окружность, описанную около треугольника  $VI_AI_C$  (рис. 4). Пусть она пересекает отрезки  $BA$ ,  $BM$ ,  $BC$  в точках  $C_0$ ,  $B_0$ ,  $A_0$  соответственно. Из факта 2, примененного к треугольникам  $AMB$  и

**Замечание.** Интересно, что если  $M'$  – произвольная точка на плоскости, не лежащая на прямых  $AB$  и  $BC$ , то центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABM'$  и  $BCM'$ , и точки  $B$ ,  $B_1$  лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда  $AM' = M'C$ .

Также обратим внимание на то, что оба используемых факта-«воробы» являются частными случаями следующего общего утверждения (предлагаем читателю доказать его самостоятельно).

**Факт 3.** Пусть точки  $X$  и  $Y$  движутся с постоянными скоростями (не обязательно равными) по двум фиксированным прямым, пересекающимся в точке  $O$ . Тогда окружность, описанная около треугольника  $XYO$ , проходит через две фиксированные точки  $O$  и  $Z$ , где  $Z$  является центром поворотной гомотетии, переводящей местоположения точек  $X$  в местоположения точек  $Y$ .

Факт 1 тогда представляет собой случай, когда точки  $X = A$  и  $Y = C$  движутся с одинаковыми скоростями в направлении точки  $O = B$  так, что  $X' = C_0$  и  $Y' = A_0$  – их новые местоположения, а  $Z = B_1$  – центр поворотной гомотетии (с коэффициентом 1).

Аналогично можно сказать и про факт 2: точки  $X = C'_0$  и  $Y = A'_0$  движутся с одинаковыми скоростями в «противоположных» относительно точки  $O = B$  направлениях так, что  $X = C'_0$  и  $Y = A'_0$  – их новые местоположения, а  $Z = I$  – центр поворотной гомотетии (с коэффициентом 1).

Возможно, читателю удастся найти и другие применения приведенных в статье фактов – ведь это не единственные задачи математических олимпиад, где можно было бы использовать полученные знания. В качестве упражнений приведем несколько интересных задач, при решении которых можно использовать результаты данной статьи.

#### Упражнения

**1** (обобщение задачи 1). Пусть на дуге  $BC$  (не содержащей точку  $A$ ) описанной окружности  $\omega$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $E$ , а на стороне  $AC$  – точка  $F$ . Докажите, что луч  $EF$  – биссектриса угла  $AEC$  тогда и только тогда, когда  $\angle IEB = \angle IFA$ , где  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

**2** (XXXI Всероссийская олимпиада, заключительный этап, 11 класс, автор – Л.Емельянов). Пусть  $A_0$ ,  $B_0$  и  $C_0$  – точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника  $ABC$ . Описанные окружности треугольников  $A_0B_0C$ ,  $AB_0C_0$  и  $A_0BC_0$  пересекают второй раз описанную окружность  $\omega$  треугольника  $ABC$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  соответственно. Докажите, что треугольник  $A_1B_1C_1$  подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  с его сторонами.

**3** (XXI Турнир городов, осенний тур, сложный вариант, 10–11 классы, автор – Л.Емельянов). Пусть на сторонах  $BA$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $C_0$  и  $A_0$  соответственно, а точки  $M$  и  $M_0$  – середины отрезков  $AC$  и  $A_0C_0$ . Докажите, что если  $AC_0 = CA_0$ , то прямая  $MM_0$  параллельна биссектрисе угла  $ABC$ .

**4** (автор – И.Шарыгин). Пусть на стороне  $AC$  выбрана точка  $D$ . Обозначим через  $I_A$  и  $I_C$  центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABD$  и  $CBD$  соответственно, а через  $B'_0$  – точку касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  со стороной  $AC$ . Докажите, что угол  $I_A B'_0 I_C$  прямой.

**5** (XXVI Международная математическая олимпиада, автор – И.Шарыгин). Дан треугольник  $ABC$  и окружность с центром  $O$ , проходящая через вершины  $A$  и  $C$  и повторно пересекающая отрезки  $AB$  и  $BC$  в различных точках  $K$  и  $N$  соответственно. Окружности, описанные около треугольников  $ABC$  и  $KBN$ , имеют ровно две общие точки  $B$  и  $M$ . Докажите, что угол  $OMB$  прямой.

# Две дюжины задач на закон Ома

В. ДРОЗДОВ

СРЕДИ ЗАДАЧ НА ЗАКОН ОМА ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ (ПОЛНОЙ) цепи есть много интересных – как учебных, так и конкурсных или олимпиадных (конечно, такое деление задач достаточно условно). В этой статье собрано воедино большое количество таких задач, прошедших «обкатку» в учебном процессе. При этом к половине задач приведены решения, а половина предлагается читателям для самостоятельного решения.

Поскольку закон Ома для замкнутой цепи, изображенной на рисунке 1, весьма подробно изучается в школе, приведем без вывода основные формулы, необходимые для решения задач. Пусть  $I$  – сила тока в цепи,  $\mathcal{E}$  – электродвижущая сила источника тока,  $R$  – внешнее сопротивление,  $r$  – внутреннее сопротивление источника,  $\eta$  – коэффициент полезного действия цепи,  $P$  – мощность, выделяющаяся на внешнем сопротивлении. Тогда справедливы следующие соотношения:

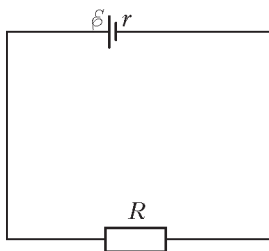


Рис. 1

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}, \quad (1)$$

$$\eta = \frac{R}{R+r}, \quad (2)$$

$$\eta = 1 - \frac{r}{R} I, \quad (3)$$

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}, \quad (4)$$

$$P = \mathcal{E}I - rI^2. \quad (5)$$

Кроме того, полезно знать (и уметь доказать!), что если  $n$  одинаковых источников тока соединяются последовательно, то закон Ома имеет вид

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R+nr}. \quad (6)$$

Для параллельного их соединения –

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}}. \quad (7)$$

А теперь переходим к задачам.

**Задача 1.** Каково максимальное значение произведения мощности  $P$ , выделяющейся на внешнем сопротивлении, на КПД  $\eta$  для цепи, изображенной на рисунке 1? Чему равны при этом  $P$  и  $\eta$ ?

**Решение.** Из формул (3) и (5) получаем

$$P\eta = \frac{r^2}{\mathcal{E}} I^3 - 2rI^2 + \mathcal{E}I.$$

Для исследования многочлена третьей степени применяем производную:

$$(P\eta)' = 0, \text{ или } 3r^2 I^2 - 4r\mathcal{E}I + \mathcal{E}^2 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения равны  $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{3r}$  и  $I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r}$ .

Очевидно, что  $0 < I < \frac{\mathcal{E}}{r}$ . Легко проверить, что при  $I \rightarrow 0$

и  $I \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{r}$  искомое произведение  $P\eta \rightarrow 0$ . Тогда при  $I = \frac{\mathcal{E}}{3r}$  оно будет наибольшим:

$$(P\eta)_{\max} = \frac{4}{27} \frac{\mathcal{E}^2}{r}.$$

При этом

$$P = \frac{2}{9} \frac{\mathcal{E}^2}{r} \text{ и } \eta = \frac{2}{3}.$$

Задача имеет вполне определенную физическую мотивацию. Известно, что в цепи, представленной на рисунке 1, наибольшая мощность достигается при  $R = r$ , т.е. при  $\eta = 0,5$ . Мы же хотели увеличить КПД.

**Задача 2.** Как при параллельном, так и при последовательном соединении двух одинаковых аккумуляторов на внешнем сопротивлении выделялась мощность  $P_0 = 80$  Вт. Какая мощность  $P$  будет выделяться на этом сопротивлении, если замкнуть на него лишь один аккумулятор?

**Решение.** В соответствии с формулами (4), (6), (7) имеем такую систему уравнений:

$$\frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} = P,$$

$$\left(\frac{2\mathcal{E}}{R+2r}\right)^2 R = P_0,$$

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{R+r/2}\right)^2 R = P_0.$$

Приравняв левые части последних двух уравнений системы, легко находим, что  $R = r$ . Тогда система упрощается:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{4R} = P, \quad \frac{4}{9} \frac{\mathcal{E}^2}{R} = P_0.$$

Следовательно,

$$P = \frac{9}{16} P_0 = 45 \text{ Вт}.$$

**Задача 3.** При каком условии сила тока во внешнем сопротивлении получается одной и той же при последовательном и при параллельном соединении  $n$  одинаковых аккумуляторов?

**Решение.** Из формул (6) и (7) получаем уравнение

$$\frac{n\mathcal{E}}{R+nr} = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}},$$

которое легко преобразуется к виду

$$R + nr = Rn + r, \text{ или } (n-1)(R-r) = 0.$$

Так как  $n \geq 2$ , то  $R = r$ , т.е. внутреннее сопротивление аккумулятора должно быть равно внешнему сопротивлению.

**Задача 4.** Три одинаковые батареи, соединенные параллельно, подключены к внешнему сопротивлению. Как изменится ток в этом сопротивлении, если переключить полярность одной из батарей?

**Решение.** Из формулы (7) при  $n = 3$  получаем

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{3}} = \frac{3\mathcal{E}}{3R+r} = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E} + \mathcal{E}}{3R+r}.$$

Если переключить полярность одной батареи, то ток изме-

нится:

$$I_1 = \frac{\varepsilon + \varepsilon - \varepsilon}{3R + r} = \frac{\varepsilon}{3R + r},$$

ибо сумма ЭДС в числителе – алгебраическая. Значит,  $I_1 = \frac{I}{3}$ , т.е. ток уменьшится в три раза.

**Задача 5.** Имеется неограниченное количество одинаковых батареек для карманного фонаря. Можно ли, соединяя их тем или иным способом, зажечь лампу, рассчитанную на очень сильный ток?

**Решение.** Пусть мы располагаем  $m^2$  батареек, причем число  $m$  теоретически может быть сколь угодно велико.

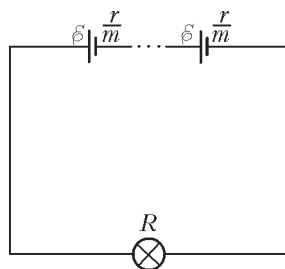


Рис. 2

Соединим параллельно  $m$  батареек и  $m$  таких групп включим последовательно (рис.2). Из формулы (7) следует, что каждая группа эквивалентна одной батарее с ЭДС  $\varepsilon$  и внутренним сопротивлением  $\frac{r}{m}$ . Соединенные последовательно  $m$  групп батареек в силу формулы (6) равносильны одной батарее с ЭДС,

равной  $m\varepsilon$ , и внутренним сопротивлением, равным  $m\frac{r}{m} = r$ . Значит, закон Ома в нашем случае будет выглядеть так:

$$I = \frac{m\varepsilon}{R + r}.$$

Поскольку число  $m$  не ограничено сверху, то ответ на вопрос задачи утвердительный.

**Задача 6** (НГУ, 1985). В цепь, составленную из источника с внутренним сопротивлением  $r$  и резистора сопротивлением  $R$ , включается вольтметр: первый раз параллельно резистору, второй раз последовательно с ним. Показания вольтметра в обоих случаях оказались одинаковыми. Найдите сопротивление вольтметра  $R_V$ .

**Решение.** В первом случае (рис.3) ток в неразветвленной части цепи, очевидно, равен

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r + \frac{RR_V}{R + R_V}}.$$

По первому правилу Кирхгофа для узла А имеем

$$I_1 = I_R + I_V,$$

где  $I_R$  и  $I_V$  – токи, текущие через резистор и вольтметр соответственно. Кроме того,

$$I_R R = I_V R_V.$$

Отсюда легко получаем

$$I_V = \frac{I_1 R}{R_V + R}, \quad U_V = I_V R_V = \frac{I_1 R_V R}{R_V + R}.$$

С учетом выражения для тока  $I_1$  окончательно находим

$$U_V = \frac{\varepsilon R_V R}{r(R_V + R) + RR_V}.$$

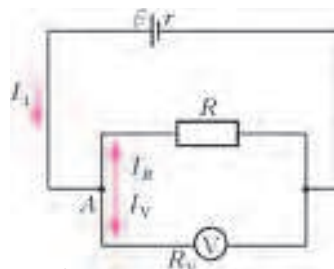


Рис. 3

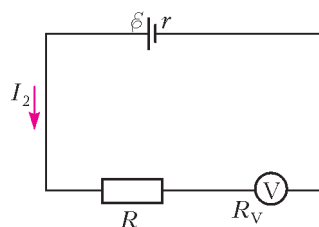


Рис. 4

Второму случаю соответствует рисунок 4. По закону Ома,

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{r + R + R_V}, \quad \text{и} \quad U_V = I_2 R_V = \frac{\varepsilon R_V}{r + R + R_V}.$$

Приравняем два разных выражения для показаний вольтметра:

$$\frac{\varepsilon R_V R}{r(R_V + R) + RR_V} = \frac{\varepsilon R_V}{r + R + R_V},$$

откуда сразу следует ответ:

$$R_V = \frac{R^2}{r}.$$

**Задача 7** (МФТИ, 1985). В цепи, изображенной на рисунке 5, тепловая мощность, выделяемая во внешнем участке цепи, одинакова при замкнутом и при разомкнутом ключе К. Определите внутреннее сопротивление источника  $r$ , если  $R_1 = 12$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом.

**Решение.** Чтобы сделать выкладки менее громоздкими, предварительно найдем условие постоянства выделяемой во внешнем участке цепи мощности при разных внешних сопротивлениях  $R_3$  и  $R_4$ . По формуле (4) имеем уравнение

$$\frac{\varepsilon^2 R_3}{(R_3 + r)^2} = \frac{\varepsilon^2 R_4}{(R_4 + r)^2},$$

которое сразу упрощается, становясь линейным относительно  $r$ :

$$\frac{\sqrt{R_3}}{R_3 + r} = \frac{\sqrt{R_4}}{R_4 + r}.$$

Отсюда находим

$$r = \frac{R_3 \sqrt{R_4} - R_4 \sqrt{R_3}}{\sqrt{R_3} - \sqrt{R_4}},$$

или

$$r = \frac{\sqrt{R_3 R_4} (\sqrt{R_3} - \sqrt{R_4})}{\sqrt{R_3} - \sqrt{R_4}} = \sqrt{R_3 R_4}.$$

В условиях данной задачи

$$R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_4 = R_1.$$

Окончательно получаем

$$r = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = R_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} = 6 \text{ Ом}.$$

**Задача 8.** Сопротивление  $R$  подключено к двум одинаковым элементам с ЭДС  $\varepsilon$  и внутренним сопротивлением  $r$ , соединенным последовательно. Для увеличения мощности, выделяемой в сопротивлении  $R$ , предложено соединить элементы параллельно. Всегда ли это предложение приведет к цели?

**Решение.** Из формул (4) и (6) при  $n = 2$  находим

$$P_1 = \left( \frac{2\varepsilon}{R + 2r} \right)^2 R.$$

Из формул (4) и (7) при  $n = 2$  получаем

$$P_2 = \left( \frac{2\varepsilon}{2R + r} \right)^2 R.$$

Находим отношение мощностей:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left( \frac{R + 2r}{2R + r} \right)^2.$$

По условию задачи должно быть  $P_2 > P_1$ , т.е.  $R + 2r > > 2R + r$ , а значит,  $r > R$ . Следовательно, предложение приведет к цели не всегда, а только при  $r > R$ .

**Задача 9.** На внешнем сопротивлении цепи с аккумулятором выделяется тепловая мощность  $P = 10$  Вт. Когда к концам этого сопротивления присоединили второй такой же аккумулятор, выделяемая мощность стала вдвое больше. Какой она будет, если к концам этого сопротивления присоединить третий такой же аккумулятор?

**Решение.** Из формул (4) и (7) имеем

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2},$$

$$2P = \frac{\varepsilon^2 R}{\left(R + \frac{r}{2}\right)^2},$$

$$P_1 = \frac{\varepsilon^2 R}{\left(R + \frac{r}{3}\right)^2},$$

где  $P_1$  – искомая мощность,  $\varepsilon$  и  $r$  – ЭДС и внутреннее сопротивление одного аккумулятора. Деля почленно первые два уравнения, найдем  $r = R\sqrt{2}$ . Деля левые и правые части третьего и первого уравнений, получим

$$\frac{P_1}{P} = \frac{R^2 + 2Rr + r^2}{R^2 + \frac{2}{3}Rr + \frac{r^2}{9}}.$$

Подставляя сюда  $r = R\sqrt{2}$ , имеем

$$\frac{P_1}{P} = \frac{9(3+2\sqrt{2})}{11+6\sqrt{2}}, \text{ и } P_1 \approx 27 \text{ Вт.}$$

**Задача 10** (МФТИ, олимпиада, 2008). В цепи, изображенной на рисунке 6, амперметр показывает ток  $I_1 = 10$  мА, вольтметр показывает напряжение  $U_1 = 2$  В. После того как вольтметр отключили от резистора и подключили параллельно амперметру, показания амперметра уменьшились до  $I_2 = 2,5$  мА. Определите сопротивление резистора  $R_x$ .

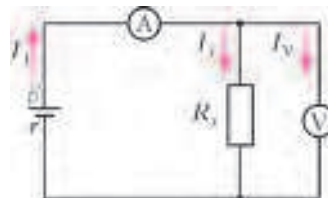


Рис. 6

**Решение.** В схеме на рисунке 6 ток в неразветвленной части цепи по первому правилу Кирхгофа равен

$$I_1 = I_x + I_V = \frac{U_1}{R_x} + \frac{U_1}{R_V},$$

где  $R_V$  – сопротивление вольтметра. С другой стороны, по закону Ома,

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_A + \frac{R_x R_V}{R_x + R_V}},$$

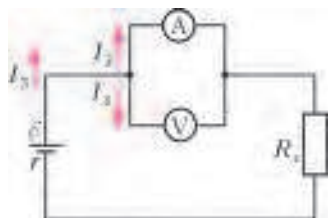


Рис. 7

где  $R_A$  – сопротивление амперметра. В преобразованной схеме, изображенной на рисунке 7, ток в неразветвленной части цепи по закону Ома равен

$$I_3 = \frac{\varepsilon}{R_x + \frac{R_A R_V}{R_A + R_V}}.$$

Исключаем ЭДС  $\varepsilon$ :

$$I_1 \left( R_A + \frac{R_x R_V}{R_x + R_V} \right) = I_3 \left( R_x + \frac{R_A R_V}{R_A + R_V} \right).$$

Ток  $I_3$  разветвляется:

$$I_3 = I_2 + I_4.$$

Поскольку  $I_4 R_V = I_2 R_A$ , то  $I_4 = \frac{R_A}{R_V} I_2$ . Тогда

$$I_3 = I_2 + I_2 \frac{R_A}{R_V}.$$

Получаем систему трех уравнений с четырьмя переменными  $R_x, R_A, R_V, I_3$ :

$$I_1 = U_1 \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_V} \right),$$

$$I_1 \left( R_A + \frac{R_x R_V}{R_x + R_V} \right) = I_3 \left( R_x + \frac{R_A R_V}{R_A + R_V} \right),$$

$$I_3 = I_2 \left( 1 + \frac{R_A}{R_V} \right).$$

Сначала исключаем  $I_3$ , затем исключаем  $R_V = \frac{U_1 R_x}{I_1 R_x - U_1}$ . В результате приходим к одному уравнению с двумя переменными:

$$I_1 R_A + U_1 = I_2 R_x + \frac{I_1 I_2 R_A R_x}{U_1},$$

которое легко преобразуется к виду

$$R_x I_2 (U_1 + I_1 R_A) = U_1 (I_1 R_A + U_1).$$

Отсюда находим

$$R_x = \frac{U_1}{I_2} = 800 \text{ Ом.}$$

Вот и проявилась олимпиадность задачи: «лишняя» переменная  $R_A$  сократилась, а известный ток  $I_1$  оказался избыточным данным.

**Задача 11.** Имеются две батареи с ЭДС  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и внутренними сопротивлениями  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. При каких сопротивлениях нагрузки  $R$  целесообразно эти батареи соединить последовательно для получения максимальной мощности в нагрузке, а при каких – параллельно?

**Решение.** При последовательном соединении (рис.8) батарей их электродвижущие силы, очевидно, складываются:  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Суммируются также и внутренние сопротивления:  $r = r_1 + r_2$ . Тогда по формуле (4) находим

$$P_1 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 R}{(R + r_1 + r_2)^2}.$$

Случай параллельного соединения (рис.9) несколько сложнее. Эквивалентное внутреннее сопротивление равно

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

А как быть с ЭДС? Поскольку общая формула должна действовать в частных и предельных ситуациях, рассмотрим

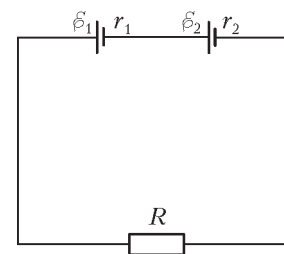


Рис. 8

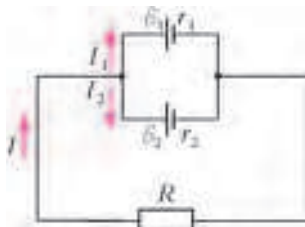


Рис. 9

находим

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

Теперь по формуле (4) вычисляем мощность:

$$P_2 = \frac{(\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1)^2 R}{(R(r_1 + r_2) + r_1 r_2)^2}.$$

Неравенство  $P_1 > P_2$  легко преобразуется к равносильному

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2} > \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2},$$

или

$$R(\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2) > \varepsilon_1 r_2^2 + \varepsilon_2 r_1^2.$$

Следовательно, при  $R > \frac{\varepsilon_1 r_2^2 + \varepsilon_2 r_1^2}{\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2}$  выгоднее последовательное соединение батарей. Соответственно, при

$R < \frac{\varepsilon_1 r_2^2 + \varepsilon_2 r_1^2}{\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2}$  выгоднее параллельное соединение.

**Задача 12.** Гальванический элемент замкнут на два параллельных сопротивления (рис.10). Уменьшатся ли в них токи, если эти сопротивления увеличить?



Рис. 10

Увеличиваем сопротивления: вместо  $R_1$  ставим  $R'_1$ , а вместо  $R_2$  ставим  $R'_2$ . При этом  $R'_1 > R_1$  и  $R'_2 > R_2$ . Очевидно, изменятся и токи:

$$I'_1 = \frac{\varepsilon R'_2}{r(R'_1 + R'_2) + R'_1 R'_2},$$

$$I'_2 = \frac{\varepsilon R'_1}{r(R'_1 + R'_2) + R'_1 R'_2}.$$

Найдем разности новых и старых токов:

$$I'_1 - I_1 = \frac{\varepsilon (r(R_1 R'_2 - R'_1 R_2) + (R_1 - R'_1) R_2 R'_2)}{(r(R_1 + R_2) + R_1 R_2)(r(R'_1 + R'_2) + R'_1 R'_2)},$$

$$I'_2 - I_2 = \frac{\varepsilon (r(R_2 R'_1 - R'_2 R_1) + (R_2 - R'_2) R_1 R'_1)}{(r(R_1 + R_2) + R_1 R_2)(r(R'_1 + R'_2) + R'_1 R'_2)}.$$

Пусть  $R_1 R'_2 - R'_1 R_2 > 0$ . Так как  $R_1 - R'_1 < 0$ , то, меняя  $r$ , можно сделать числитель в первой разностной формуле и положительным, и отрицательным. Иными словами, возможно и увеличение, и уменьшение силы одного из токов (в нашем случае тока  $I_1$ ). Так как все равно, какой ток считать первым, а какой вторым, то неравенство  $R_1 R'_2 - R'_1 R_2 < 0$  рассматривать не надо.

случай короткого замыкания. Ток  $I$  разветвляется на токи  $I_1$  и  $I_2$ , т.е.  $I = I_1 + I_2$ . Для токов короткого замыкания получаем

$$\frac{\varepsilon}{r} = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2},$$

где  $\varepsilon$  – эквивалентная ЭДС. Из двух последних формул

### Упражнения

**1.** При замыкании на сопротивление  $R$  источник с ЭДС  $\varepsilon$  дает ток  $I$ . Ток короткого замыкания источника равен  $I_0$ . Какую наибольшую полезную мощность может дать источник?

**2** (МГУ, мехмат, 1990). При подключении к батарее по очереди двух сопротивлений  $R_1 = 1$  Ом и  $R_2 = 4$  Ом оказалось, что выделяющиеся на них мощности одинаковы. Чему равно внутреннее сопротивление батареи?

**3.** Аккумулятор замкнули сначала на одно сопротивление, потом – на другое, а затем – на оба, соединенные последовательно. В первом случае ток был равен  $I_1$ , во втором  $I_2$  и в третьем  $I_3$ . Какой ток будет проходить через аккумулятор при параллельном соединении этих сопротивлений?

**4** (МФТИ, 1987). При замкнутом ключе  $K$  (рис.11) вольтметр  $V_1$  показывает напряжение  $U_1 = 0,8\varepsilon$  (здесь  $\varepsilon$  – ЭДС батареи). Что покажут вольтметры  $V_1$  и  $V_2$  при разомкнутом ключе, если их сопротивления равны?

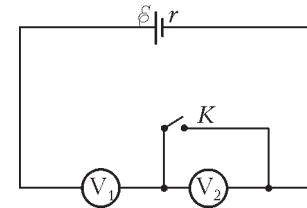


Рис. 11

**5.** Два потребителя подключаются к батарее: один раз последовательно, другой – параллельно. В каком случае КПД будет больше?

**6.** Батарейка для карманного фонаря имеет ЭДС  $\varepsilon = 4,5$  В и внутреннее сопротивление  $r = 3,5$  Ом. Сколько таких батареек надо соединить последовательно, чтобы питать лампу, рассчитанную на: а) напряжение  $U = 127$  В и мощность  $P_1 = 60$  Вт; б) напряжение  $U = 127$  В и мощность  $P_2 = 250$  Вт?

**7** (МФТИ, 1971). В старой аккумуляторной батарее, состоящей из  $n$  последовательно соединенных банок, резко возросло внутреннее сопротивление одной из банок и стало равным  $10r$ , где  $r$  – внутреннее сопротивление нормальной банки. Считая ЭДС всех банок одинаковыми, определите, при каком сопротивлении нагрузки  $R$  мощность, выделяемая на этом сопротивлении, не изменится при коротком замыкании поврежденной банки.

**8** (МИФИ, 1976). Если к источнику тока подключить последовательно два различных вольтметра, то их показания будут  $U_1 = 6$  В и  $U_2 = 3$  В. Если подключить один первый вольтметр, то он покажет напряжение  $U_3 = 8$  В. Определите ЭДС источника тока.

**9** (МАИ, 2001). Аккумулятор замкнут на некоторое сопротивление. Когда в цепь включили параллельно друг другу два амперметра, то они показали токи  $I_1 = 2$  А и  $I_2 = 3$  А. Когда эти же амперметры включили в цепь последовательно, то они показали ток  $I_3 = 4$  А. Какой ток течет в цепи при отсутствии амперметров?

**10.** Две электроплитки, рассчитанные на напряжение  $U = 120$  В, имеют при этом напряжении мощности  $P_1 = 1$  кВт и  $P_2 = 2$  кВт соответственно. Во сколько раз будут отличаться мощности, выделяющиеся в эти плитки, если их поочередно подключать к источнику с внутренним сопротивлением  $r = 14,4$  Ом?

**11** (МГУ, физфак, 1996). При подключении к батарее резистора на нем выделяется мощность  $P_1 = 12$  Вт. При этом КПД системы, состоящей из резистора и батареи, оказался равным  $\eta = 0,5$ . Найдите КПД системы при подключении к батарее другого резистора, на котором выделяется мощность  $P_2 = 9$  Вт.

**12** (МГУ, ВМК, 1995). Нагревательные элементы, сопротивления которых отличаются в  $\alpha$  раз, соединены, как показано на рисунке 12. Найдите  $\alpha$ , если известно, что при замыкании ключа общая мощность, выделяющаяся в цепи, увеличивается в  $k = 2$  раза.

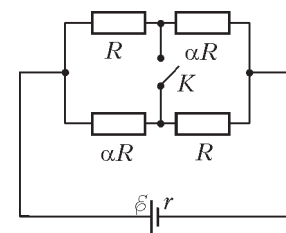


Рис. 12



## ОЛИМПИАДЫ

# Региональный этап XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Олимпиада традиционно прошла в два тура, которые были проведены 27 и 28 января 2011 года. Региональный этап, согласно действующему положению о Всероссийской олимпиаде, носит отборочный характер: состав участников заключительного этапа формируется по рейтингу из числа победителей и призеров региональных олимпиад. Поэтому в варианты были включены как простые (с задачами 5 для 9 класса, 1 для 10 класса, 2 и 5 для 11 класса успешно справились почти все участники во многих регионах), так и достаточно сложные задания – задачи 4 и 8 в каждой параллели решили единицы.

### Задачи

#### 9 класс

##### Первый день

1. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

*И. Богданов*

2. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются внешним образом в точке  $P$ . Через центр  $\omega_1$  проведена прямая  $l_1$ , касающаяся  $\omega_2$ . Аналогично, прямая  $l_2$  касается  $\omega_1$  и проходит через центр  $\omega_2$ . Оказалось, что прямые  $l_1$  и  $l_2$  не параллельны. Докажите, что точка  $P$  лежит на биссектрисе одного из углов, образованных  $l_1$  и  $l_2$ .

*Л. Емельянов*

3. За круглым столом сидят 30 человек – рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них за этим же столом есть ровно один друг, причем у рыцаря этот друг – лжец, а у лжеца этот друг – рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

*С. Агаханов*

4. Целые числа  $a$  и  $b$  таковы, что при любых натуральных  $m$  и  $n$  число  $am^2 + bn^2$  является точным квадратом. Докажите, что  $ab = 0$ .

*А. Голованов*

##### Второй день

5. Фокусник выкладывает 36 карт в виде квадрата  $6 \times 6$  (в 6 столбцов по 6 карт) и просит зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, ее содержащий. После этого фокусник определенным образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата  $6 \times 6$  и просит зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и во второй раз. После ответа зрителя фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?

*Л. Емельянов*

6. Числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a^3 - b^3 = 2$ ,  $a^5 - b^5 \geq 4$ . Докажите, что  $a^2 + b^2 \geq 2$ .

*И. Богданов*

7. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  отметили произвольную точку  $D$ . Пусть  $E$  и  $F$  – точки, симметричные точке  $D$  относительно биссектрис углов  $A$  и  $C$  соответственно. Докажите, что середина отрезка  $EF$  лежит на прямой  $A_0C_0$ , где  $A_0$  и  $C_0$  – точки касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  со сторонами  $BC$  и  $AB$  соответственно.

*Т. Емельянова*

8. См. задачу M2258 «Задачника «Кванта».

#### 10 класс

##### Первый день

1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырех из оставшихся.

*А. Голованов*

2. Дан выпуклый шестиугольник  $ABCDEF$ . Известно, что  $\angle FAE = \angle BDC$ , а четырехугольники  $ABDF$  и  $ACDE$  являются вписанными. Докажите, что прямые  $BF$  и  $CE$  параллельны.

*А. Акопян*

3. Последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots$  задана условиями  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 143$  и  $a_{n+1} = 5 \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  при всех  $n \geq 2$ . Докажите, что все члены последовательности – целые числа.

*М. Мурашкин*

4. На окружности отмечены  $2N$  точек ( $N$  – натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из  $N$  хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовем паросочетание *четным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, четно, и *нечетным* – в противном случае. Найдите разность между количеством четных и нечетных паросочетаний.

*В. Шмаров*

##### Второй день

5. Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася – значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырех различных. Могут ли все числа, выписанные Васей, оказаться различными?

*Н. Агаханов, П. Кожевников*

6. Петя выбрал натуральное число  $a > 1$  и выписал на доску пятнадцать чисел  $1 + a, 1 + a^2, 1 + a^3, \dots, 1 + a^{15}$ . Затем он стер

несколько чисел так, что любые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

*О. Подлипский*

7. См. задачу M2258 «Задачника «Кванта».

8. В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  перпендикулярна основаниям,  $O$  – точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника  $OCD$  взята точка  $S$ , диаметрально противоположная точке  $O$ . Докажите, что  $\angle BSC = \angle ASD$ .

*В. Шмаров*

### 11 класс

#### Первый день

1. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение любых двух различных ее членов – также член этой прогрессии. Докажите, что все ее члены – целые числа.

*Н. Агаханов*

2. Через вершины основания четырехугольной пирамиды  $SABCD$  проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину  $A$  – параллельно  $SC$  и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм.

*Н. Агаханов*

3. На плоскости нарисованы  $n > 2$  различных векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  с равными длинами. Оказалось, что все векторы

$$-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \dots + \vec{a}_n, \quad \dots, \\ \dots, \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n$$

также имеют равные длины. Докажите, что  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = 0$ .

*В. Сендеров*

4. Главная аудитория фирмы «Рога и копыта» представляет собой квадратный зал из восьми рядов по восемь мест. 64 сотрудника фирмы писали в этой аудитории тест, в котором было шесть вопросов с двумя вариантами ответа на каждый. Могло ли так оказаться, что среди наборов ответов сотрудников нет одинаковых, причем наборы ответов любых двух людей за соседними столами совпали не больше чем в одном вопросе? (Столы называются соседними, если они стоят рядом в одном ряду или друг за другом в соседних рядах.)

*К. Чувилин*

#### Второй день

5. Докажите, что для любого натурального  $n$  выполнено неравенство  $(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}$ .

*В. Сендеров*

6. См. задачу M2256 «Задачника «Кванта».

7. Даны различные натуральные числа  $a, b$ . На координатной плоскости нарисованы графики функций  $y = \sin ax$ ,  $y = \sin bx$  и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число  $c$ , отличное от  $a, b$  и такое, что график функции  $y = \sin cx$  проходит через все отмеченные точки.

*И. Богданов*

8. См. задачу M2259 «Задачника «Кванта».

*Публикацию подготовили Н. Агаханов, И. Богданов, П. Кожевников, О. Подлипский, Д. Терёшин*

# Региональный этап XLVI Всероссийской олимпиады школьников по физике

## Теоретический тур

### 9 класс

#### Задача 1. Этажи

Чебурашка и Крокодил Гена решили устроить забег по лестнице в ДOME дружбы. Выяснилось, что Чебурашка успевает три раза добежать до четвертого этажа и вернуться на первый за время, пока Гена поднимается на шестнадцатый этаж.



Рис. 1

На какой этаж успеет подняться Чебурашка, пока Гена будет бегать с первого этажа на шестой и обратно? Считайте, что Чебурашка и Гена бегают вверх-вниз с постоянной скоростью.

*Л. Мельниковский*

#### Задача 2. Лед на привязи

В цилиндрическом сосуде с площадью дна  $S$  с помощью нити удерживают под водой кусок льда, внутри которого имеется воздушная полость (рис. 1). Объем льда вместе с

полостью  $V$ , плотность льда  $\rho_l$ . После того как лед растаял, уровень воды в сосуде уменьшился на  $h$ . Найдите: 1) объем  $V_n$  воздушной полости; 2) силу  $T$  натяжения нити в начале опыта.

*Примечание.* Плотность воды  $\rho_v$  и ускорение свободного падения  $g$  считайте известными.

*А. Шеронов*

#### Задача 3. Камень

Скорость камня  $v_0$ , брошенного под углом  $\varphi = 60^\circ$  к горизонту, уменьшилась вдвое за время  $\Delta t = 1$  с. Найдите модуль перемещения  $s$ , которое за это время совершил камень.

*Примечание.* Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Д. Александров*

#### Задача 4. «Электрическая» цепочка

Из серебряной проволоки массой  $m = 3,91$  г изготовили кольца разного диаметра, которые соединили в цепочку (рис. 2). Электрическое сопротивление между концами такой цепочки равно  $R = 1,00 \cdot 10^{-2}$  Ом. Вычислите длину цепочки  $l$ , если известно, что плотность серебра  $d =$



Рис. 2

$= 10,5 \text{ г/см}^3$ , а его удельное сопротивление  $\rho = 1,49 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}$ . Диаметр поперечного сечения проволоки много меньше диаметра самого маленького колечка. Цепочка натянута. Электрическим сопротивлением колец в месте контакта можно пренебречь.

*В.Бабинцев*

#### Задача 5. Комната с зеркалами

В углу прямоугольной комнаты размером  $a \times b \times H = 9 \times 3,5 \times 4,0 \text{ м}$  на стенах висят два высоких зеркала от пола до потолка шириной  $c = 1 \text{ м}$  каждое, вплотную прижатые друг к другу. На расстоянии  $c$  от зеркал находится такой яркий точечный источник  $S$ , что свет от него попадает только на зеркала (рис.3). Существуют ли в комнате участки стен,



Рис. 3

на которые не попадает свет? Если да, то какова площадь неосвещенной части стен?

*А.Воронов*

#### 10 класс

#### Задача 1. Льдинка с полостью

В частично заполненный водой цилиндрический сосуд, площадь дна которого  $S$ , положили кусок льда с воздушной полостью, в которой находился алюминиевый шарик массой, равной массе льда. При этом уровень воды поднялся на  $h$ , а полностью погруженный в воду лед плавает, не касаясь дна и стенок сосуда. 1) Найдите объем  $V_{\text{п}}$  воздушной полости. 2) Повысится или понизится уровень воды в сосуде после того, как весь лед растает? 3) На сколько изменится уровень воды в сосуде после того, как лед растает? Плотность воды равна  $\rho_{\text{в}}$ , плотность льда —  $\rho_{\text{л}}$ , плотность алюминиевого шарика —  $\rho_{\text{ш}}$ , ускорение свободного падения равно  $g$ .

*А.Шеронов*

#### Задача 2. Максимальная высота

Камень бросили под углом к горизонту с начальной скоростью  $v_0 = 25 \text{ м/с}$ . Через время  $\tau$  он достиг максимальной высоты, удалившись по горизонтали на расстояние  $L = 30 \text{ м}$  от места броска. Найдите время  $\tau$ . Примите ускорение свободного падения равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

*В.Слободянин*

#### Задача 3. На вираже (1)

Автомобиль массой  $m = 1400 \text{ кг}$  движется с постоянной скоростью  $v = 90 \text{ км/ч}$  по прямолинейному горизонтальному участку дороги. При этом на колеса автомобиля передается от двигателя мощность  $P = 25 \text{ кВт}$ . Затем автомобиль въезжает на криволинейный горизонтальный участок дороги с радиусом закругления  $R = 350 \text{ м}$  и движется с прежней скоростью. При каких значениях коэффициента трения между колесами и дорогой возможно такое движение автомо-

биля на: 1) прямолинейном участке; 2) криволинейном участке? Все колеса считать ведущими. Колеса не проскальзывают. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

*В.Чивилёв*

#### Задача 4. Лампочки

См. задачу Ф2227 «Задачника «Кванта».

#### Задача 5. Это что за газ?

Для нагревания  $100 \text{ г}$  некоторого газа на  $4 \text{ °C}$  в процессе с прямой пропорциональностью давления объему требуется на  $831 \text{ Дж}$  тепла больше, чем для такого же нагревания при постоянном объеме. Что это за газ?

*Д.Александров*

#### 11 класс

#### Задача 1. Пустая бутылка

Пусть стеклянная бутылка плавает в цилиндрическом сосуде с водой. Площадь дна сосуда  $S = 250 \text{ см}^2$ . Из чайника в бутылку медленно наливают воду. Когда масса воды достигает  $m = 300 \text{ г}$ , бутылка начинает тонуть. Оказалось, что когда весь воздух из бутылки вышел, то уровень воды в сосуде изменился на  $\Delta h = 0,60 \text{ см}$  по сравнению с тем моментом, когда в бутылку только начали наливать воду. Вычислите вместимость бутылки  $V$ . Плотность воды  $\rho = 1,0 \text{ г/см}^3$ .

*А.Шеронов*

#### Задача 2. Заряженный конденсатор

В электрической цепи (рис.4) конденсатор заряжают до напряжения  $3\varepsilon$ . Затем ключ  $K$  замыкают. Найдите: 1) максимальную силу тока в цепи; 2) силу тока в цепи в момент

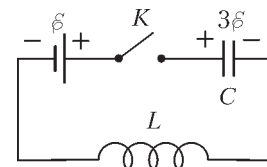


Рис. 4

времени, когда заряд на конденсаторе становится равным нулю; 3) заряд на конденсаторе в момент времени, когда сила тока в цепи становится равной нулю. Все элементы цепи можно считать идеальными.

*А.Шеронов*

#### Задача 3. На вираже (2)

Автомобиль с полным приводом (двигатель вращает все 4 колеса) и массой  $m = 1400 \text{ кг}$  проходит поворот радиусом  $R = 500 \text{ м}$  с постоянной по модулю скоростью. Максимальная мощность двигателя автомобиля не зависит от скорости и равна  $P_{\text{max}}$ . Сила сопротивления воздуха равна  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ , где  $\vec{v}$  — скорость автомобиля,  $\alpha = 40 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$ . Коэффициент трения между колесами и дорогой  $\mu = 0,52$ . Определите максимальное значение  $v_{\text{max}}$  модуля скорости, с которой автомобиль может пройти поворот. Постройте график зависимости  $v_{\text{max}}$  от  $P_{\text{max}}$ .

*А.Аполонский*

#### Задача 4. «Левитация»

Над поверхностью земли находится пластина массой  $M$ . Между ней и землей движется шарик массой  $m$ . В момент любого столкновения пластины с шариком высота пластины над землей равна  $H$ , как будто пластина просто «висит» (рис.5). Все удары абсолютно упругие. Считая, что пластина всегда параллельна поверхности земли и может двигаться только вертикально, найдите кинетическую энергию шарика

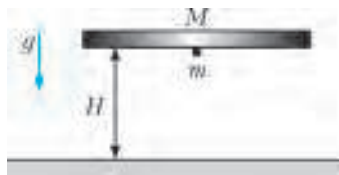


Рис. 5

у поверхности земли при условии  $m \ll M$ . (Скорость шарика при всех столкновениях с пластиной одна и та же.)

М.Осин

### Задача 5. Влажный воздух

В цилиндре под поршнем находится влажный воздух. В изотермическом процессе объем цилиндра уменьшается в  $\alpha = 4$  раза, при этом давление под поршнем увеличивается в  $\gamma = 3$  раза. Какая часть первоначальной массы пара сконденсировалась? В начальном состоянии парциальное давление сухого воздуха в  $\beta = 3/2$  раза больше парциального давления пара.

А.Шеронов

Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин

# Олимпиада «Максвелл-2012»

## Теоретический тур

8 класс

### 7 класс

#### Задача 1. Дорога в школу

Расстояние от школы до дома экспериментатора Глюка равно  $L = 4,0$  км. Это расстояние Глюк преодолевает за  $t_0 = 16$  мин. Сначала он идет до автобусной остановки пешком, потом едет на автобусе со средней скоростью  $v = 51$  км/ч и затем идет пешком еще некоторое время. Скорость Глюка составляет 20% от средней путевой скорости. Найдите время  $t$ , в течение которого он ехал на автобусе.

#### Задача 2. Клетчатая сумка

Сумка, имеющая форму параллелепипеда, сшита из клетчатого материала, причем все стороны сумки выкроены так, что содержат только целое число клеток. Клетки – квадратные со стороной  $a = 3$  см. Длина  $L$  сумки в три раза больше ее ширины  $b$ , а высота  $h$  в два раза больше ширины. Всего на поверхности сумки  $N = 792$  клетки. Сумку заполнили поролоном, в результате чего ее масса стала равна  $M = 8$  кг. Вычислите плотность поролона. Масса пустой сумки  $m = 1$  кг.

#### Задача 3. От заката до рассвета

С помощью светящихся сегментов индикатор электронных часов может показывать 4 цифры и 2 точки (рис.1). Ночью



Рис. 1



Рис. 12

часы являются единственным источником света в комнате. Во сколько раз длинной зимней ночью максимальная освещенность комнаты больше, чем минимальная? На рисунке 2 приведены примеры цифр на индикаторе.

*Примечание.* В декабре солнце заходит за горизонт в 16 часов, а встает из-за горизонта в 8 часов.

#### Задача 4. Часы «Rolex»

Длина часовой стрелки на Московских курантах равна  $L = 2$  м 97 см. Скорость конца этой стрелки и скорость конца секундной стрелки на дамских часах фирмы «Rolex» одинаковы. Какова длина  $l$  секундной стрелки часов «Rolex»?

### Задача 1. Теннисисты

Полная длина теннисного корта равна  $L = 24$  м. Теннисист А произвел подачу мяча с задней линии так, что скорость мяча составила  $v_1 = 172,8$  км/ч. Теннисист Б принял этот мяч на своей задней линии и отправил его на сторону подававшего теннисиста А со скоростью  $v_2 = 129,6$  км/ч. В момент приема мяча теннисистом Б теннисист А побежал к сетке со скоростью  $v = 4$  м/с и отразил летящий ему навстречу мяч со скоростью  $v_3 = 115,2$  км/ч. Этот удар был выполнен плохо, и мяч попал в сетку. Сколько времени длился розыгрыш мяча (время от подачи до касания мяча сетки)? Смещения мяча по вертикали во время полета не учитывать, сопротивлением воздуха пренебречь.

### Задача 2. Драгоценный сплав

Для изготовления ювелирного сплава взяли серебро плотностью  $\rho_c = 10,5$  г/см<sup>3</sup>, золото плотностью  $\rho_z = 19,5$  г/см<sup>3</sup> и платину плотностью  $\rho_n = 21,5$  г/см<sup>3</sup>. В сплаве отношение объемов серебра и платины равно 6, объем использованного золота равен  $V_z = 1,5$  см<sup>3</sup>, а средняя плотность сплава составляет  $\rho = 14,3$  г/см<sup>3</sup>. Найдите массу платины  $m_n$  и массу серебра  $m_c$  в сплаве. Считайте, что объем сплава равен сумме объемов его составных частей.

### Задача 3. Плотность бука

Два одинаковых по размерам бруска, имеющих форму прямоугольных параллелепипедов, плавали в воде так, что их наибольшие грани были параллельны поверхности воды. Один из брусков был изготовлен из сосны плотностью  $\rho_c = 0,4$  г/см<sup>3</sup>, а другой – из бука. Бруски вынули из воды и ту их часть, которая выступала из воды, отпилили и удалили. Получившиеся бруски опять погрузили в воду. Оказалось, что теперь части брусков, выступающие из воды, были одной и той же высоты. Какова плотность бука  $\rho_b$ ? Плотность воды  $\rho_0 = 1,0$  г/см<sup>3</sup>.

### Задача 4. Равновесие треугольника

Кусок проволоки длиной  $L$  согнули в виде прямоугольного треугольника. Длина одной из его сторон (катета) равна  $a = 20$  см. К этой стороне привязали нить на расстоянии  $d = 5,5$  см от прямого угла и подвесили треугольник за эту нить. При этом треугольник повис так, что сторона длиной  $a$  оказалась горизонтальной. Вычислите длину проволоки  $L$ .

Публикацию подготовил  
В.Слободянин

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

#### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №1)

1. За 1 час.

За одну минуту Петя, склеивая два куса, уменьшает общее количество деталей на 1. Через 120 минут у него остался всего один кусок – полностью склеенный пазл. Значит, сначала был 121 кусочек. Склеивая по три куса, Петя будет уменьшать общее число деталей пазла на 2 в минуту. Поэтому вся картинка соберется за один час.

2.  $22 \times 22 \times 11$  см.

При первом способе завязывания ленточка охватывает дважды длину, дважды ширину и четыре раза высоту коробки, т.е. ее длина равна шести сторонам основания плюс бантик. При втором способе завязывания ленточка охватывает дважды длину, четырежды ширину и два раза высоту коробки, т.е. ее длина равна семи сторонам основания плюс бантик. Теперь понятно, что разница в длинах ленточек  $178$  см –  $156$  см =  $22$  см в точности равна стороне основания коробки.

3. 1001.

Если разделить 77 на количество минут в часе, получится количество часов в сутках. Если разделить 91 на количество минут в часе, получится количество секунд в минуте. Значит, на количество минут в часе и 77, и 91 делятся нацело. Поскольку в часе, очевидно, больше одной минуты, в часе получается 7 минут – ни на какое другое число, большее единицы, 77 и

91 одновременно не делятся. Тогда в сутках  $77 : 7 = 11$  часов и  $11 \cdot 91 = 1001$  секунда.

4. Один из возможных ответов приведен на рисунке 1.

5. а) 13; б) 13.

Оказывается, у Ивана есть стратегия, при которой, во-первых, у Кашея каждый раз будет единственный возможный ход и, во-вторых, она приводит к максимальному результату. Будем записывать каждый ход игры так:

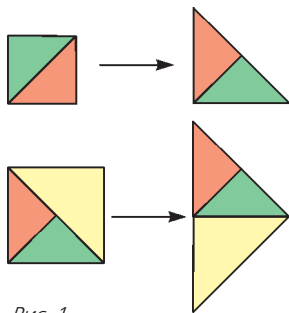


Рис. 1

сначала количество переложенных слитков, а в скобках – оставшееся число слитков у Ивана после хода. Плюс означает, что Иван кладет слитки себе в суму, а минус – что Кашей возвращает слитки в свой сундук.

а)  $+2(2), -1(1), +3(4), -4(0), +6(6), -5(1), +7(8), -8(0), +10(10), -9(1), +11(12), -12(0), +13(13)$ . В итоге все возможные ходы сделаны, и у Ивана все 13 слитков, которые он может унести.

б) Пусть Иван действует точно так же, как в предыдущем пункте. После хода « $+13(13)$ » не сделан только ход «14», но он невозможен, поэтому Иван может унести 13 слитков.

А мог бы Иван действовать так, чтобы унести 14 слитков? Тогда в какой-то момент у него в суме оказались бы все слитки, а в сундуке – пусто. Значит, последним ходил Иван, всего сделано нечетное число ходов, откуда какое-то число от 1 до 14 еще не встретилось при переключивании. Кашей тогда сможет сделать ход с этим числом, и унести все 14 слитков Ивану не удастся.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6-8»

(см. «Квант+» №5-6 за 2011 г.)

6. 21892.

Решим задачу в общем случае. Допустим, эти два политических деятеля – назовем их А и Б – захотели править подряд  $n$

сроков. Сколькими способами они могут это сделать? Каждый способ, которым они могут править Анчурией, будем записывать в виде последовательности длины  $n$  из букв А и Б. Нам нужно посчитать число таких последовательностей, в которых нет кусков длины больше 2 из одинаковых букв. Пусть  $F_n(X)$  – число последовательностей длины  $n$ , начинающихся с буквы X. Вместо X может стоять А или Б. Верно равенство  $F_n(A) = F_n(B)$  (подумайте, почему). Поэтому можно писать просто  $F_n$ , когда это удобно. Ясно, что  $F_1 = 1$  и  $F_2 = 2$ . Найдем  $F_n(A)$  при  $n \geq 3$ . Если на втором месте стоит буква А, то на третьем обязательно будет буква Б, а число таких последовательностей (начинающихся на АА) равно  $F_{n-2}(B)$ . Если на втором месте стоит буква Б, то дальше может стоять любая буква, и таких последовательностей будет  $F_{n-1}(B)$ . Получаем рекуррентное соотношение  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . Теперь, начав с  $F_1 = 1$  и  $F_2 = 2$ , можно последовательно вычислить  $F_n$  при  $n = 3, 4, \dots$ , и, в частности, найти  $F_{20} = 10946$ . Число  $F_{20}(A) + F_{20}(B) = 2F_{20} = 21892$  будет ответом в задаче. А можно вспомнить про числа Фибоначчи  $f_n$  – они задаются той же рекуррентной формулой.<sup>1</sup> Из начальных условий  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 2$  получаем, что  $F_n = f_{n+1}$ . Значит, число способов продержаться этой парочке у власти  $n$  сроков, не нарушая конституцию Анчурии, равно  $2f_{n+1}$ .

7. Нельзя.

Пусть сумма трех чисел в каждой окружности равна  $S$ , тогда, учитывая, что каждое число линзы посчитано дважды, получим уравнение  $12S = (1 + 2 + \dots + 12) + 2(13 + 14 + \dots + 24)$ , которое имеет решение  $S = 43,5$ . Очевидно, этого не может быть, так как сумма  $S$  – целое число.

8.  $-1$  или  $\frac{1}{2}$ .

Прибавим к каждой из дробей по 1. Получим три новых числа:  $\frac{a+b+c}{b+c}, \frac{a+b+c}{c+a}, \frac{a+b+c}{a+b}$ . Но раз исходные дроби

были равны, то и эти должны быть равны друг другу (и числу  $x + 1$ ). Поэтому возможны два случая: либо  $a + b + c = 0$ , либо  $b + c = c + a = a + b$ . В первом случае сразу получается, что  $x = -1$  (это возможно, например, при  $a = b = 1, c = -2$ ).

Во втором случае  $a = b = c$ , а значит,  $x = \frac{1}{2}$ .

9. Будем считать, что все розочки очень маленькие и между ними одинаковые промежутки, поэтому они не мешают проводить прямолинейные разрезы, где нам удобно. Заметим, что обязательно найдется красная розочка, рядом с которой располагается зеленая. Поэтому можно отрезать кусок с этими двумя розочками, а на оставшейся части торта будет по 9 розочек каждого цвета.

Можно добиться большего: разрезать торт на два куса так, чтобы на каждом было по пять розочек каждого цвета. Мысленно разделим торт пополам по диаметру, чтобы в каждой половине было по 10 розочек, и посчитаем разность  $X$  между числом красных и числом зеленых розочек в одной из половин. Если  $X = 0$ , то остается только превратить мысленный разрез в настоящий. В противном случае заметим, что, во-первых, число  $X$  четно (так как это разность двух чисел, которые в сумме дают четное число 10), а во-вторых, аналогичная разность для другой половины торта равна  $-X$ . Будем теперь плавно поворачивать диаметр вокруг центра торта в каком-нибудь направлении и следить за изменением величины  $X$ . Когда диаметр пересечет новую розочку и она попадет в нашу половину (а одна старая розочка пропадет из нашей по-

<sup>1</sup> Тем, кто не помнит, рекомендуем почитать о числах Фибоначчи. Например, «Калейдоскоп «Кванта» в «Кванте» №2 за 2003 год или статью Л.Шибасова и З.Шибасовой «Фибоначчиевы Кролики» в «Кванте» №2 за 2005 год.

ловины), то  $X$  либо не изменится (если новая розочка того же цвета, что и старая), либо изменится на 2 (новая и старая розочки разных цветов). Но после поворота на  $180^\circ$  величина  $X$  поменяет знак, а значит, в какой-то момент она будет равна 0. В этот момент и нужно сделать разрез вдоль диаметра.

10. Допустим, что ни одна из диагоналей четырехугольника  $ABCD$  не проходит через середину другой диагонали. Пусть  $E$  – середина  $AC$ ,  $F$  – середина  $BD$ . Тогда прямая  $EF$  не совпадает ни с одной из диагоналей, а значит, пересекает какую-то пару противоположных сторон четырехугольника. Будем считать, что она пересекает  $AB$  и  $CD$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно (рис.2). Пусть  $S_{ABCD} = S$ . По условию  $S_{AKLD} = \frac{1}{2}S$ . Так

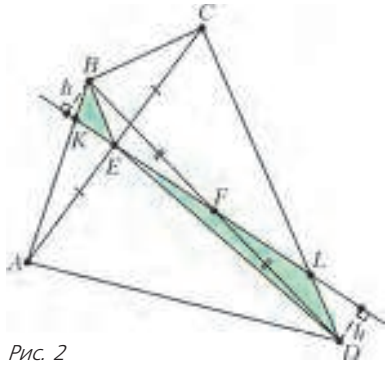


Рис. 2

как  $E$  – середина  $AC$ , то и  $S_{ABED} = \frac{1}{2}S$ . А поскольку каждый из треугольников  $BKE$  и  $DLE$  дополняет четырехугольник  $AKED$  до фигур равной площади, то площади этих треугольников равны:  $S_{BKE} = S_{DLE}$ . Теперь заметим, что поскольку  $F$  середина  $BD$ , то длины перпендикуляров, опущенных из точек  $B$  и  $D$  на прямую  $EF$ , равны. Но эти перпендикуляры являются высотами треугольников  $BKE$  и  $DLE$  соответственно. Поэтому основания тоже должны быть равны, т.е.  $KE = EL$ . Значит,  $AKCL$  – параллелограмм и  $AB \parallel CD$ , следовательно,  $ABCD$  – трапеция или параллелограмм. В первом случае  $EF$  – средняя линия трапеции и, значит, параллельна ее основаниям, а во втором случае точки  $E$  и  $F$  совпадают: и то, и другое противоречит предположению.

### ВОРОБЬЯМИ ПО ПУШКАМ!

1. Пусть  $EF$  – биссектриса угла  $AEC$  (рис.3). Проведем окружность через  $I$ ,  $B$  и  $E$ . Она пересекает лучи  $AB$  и  $CB$  в точках  $C_0$  и  $A_0$  соответственно.

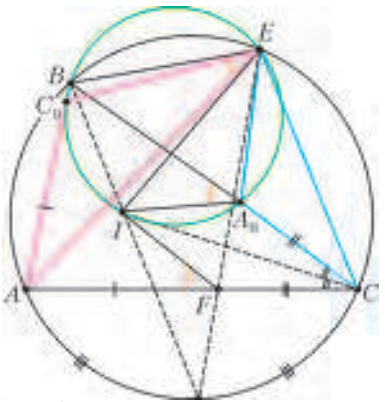


Рис. 3

Из факта 2 следует, что  $AC_0 + CA_0 = AC$ , а по условию  $AF + CF = AC$ . Из факта 3 следует, что  $\triangle AC_0E$  подобен  $\triangle CA_0E$ , т.е.  $AC_0 : CA_0 = AE : CE$ , а из того, что луч  $EF$  – биссектриса угла  $AEC$ , следует  $AF : CF = AE : CE$ . Из этого набора соображений несложно сделать вывод, что  $AF = AC_0$  и  $CF = CA_0$ , тогда точки  $A_0$  и  $F$  симметричны относительно биссектрисы  $CI$ . Следовательно,  $\angle IFA = \angle IA_0B = \angle IEB$  (последнее равенство приведено для углов, опирающихся на одну дугу  $BC_0I$ ). В одну сторону утверждение доказано. В обратную сторону доказательство аналогично, и найти его предоставляется читателю.

2. Как известно, для точек касания вписанной окружности верно, что  $AC_0 = CA_0$  (рис.4). Из факта 1 получаем, что описанная окружность около треугольника  $A_0BC_0$  проходит через точку  $B_1$  – середину дуги  $ABC$  окружности  $\omega$ . Аналогично получаем, что точка  $A_1$  – середина дуги  $CAB$  и точка  $C_1$

– середина дуги  $BCA$ . Точки  $A_1, B, C_1$  делят окружность  $\omega$  на три дуги. Нетрудно проверить, что  $\overset{\frown}{BC_1} = 180^\circ - \angle A$ ,  $\overset{\frown}{A_1B} = 180^\circ - \angle C$ . Значит,  $\overset{\frown}{A_1C_1} = 180^\circ - \angle B$ . Тогда  $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ - \angle B/2$ . Аналогично получаем и для других углов треугольника  $A_1B_1C_1$ , что их величины равны  $\angle B_1C_1A_1 = 90^\circ - \angle C/2$  и  $\angle C_1A_1B_1 = 90^\circ - \angle A/2$ . А именно таковы углы у треугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами треугольника  $ABC$ . Утверждение доказано.

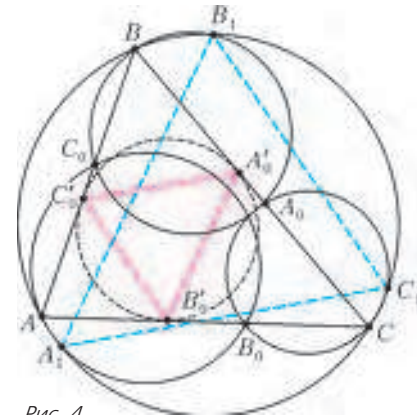


Рис. 4

3. При решении этой задачи нам понадобится то, что биссектриса угла  $B$  пересекает описанную окружность  $\omega$  в середине  $S$  дуги  $AC$ , не содержащей  $B$ , т.е.  $AS = SC$ .

Значит,  $AB_1CS$  – дельтоид, у которого диагонали пересекаются под прямым углом в точке  $M$  – середине  $AC$  (рис.5). Аналогичное можно сказать про окружность  $\omega_0$ , середину  $S_0$  дуги  $A_0C_0$  и середину  $M_0$  отрезка  $A_0C_0$ . Отметим также, что из доказательства факта 1 ясно, что  $\triangle A_0B_1C_0$  является равнобедренным с углом  $ABC$  при вершине, т.е. подобен  $\triangle AB_1C$ .

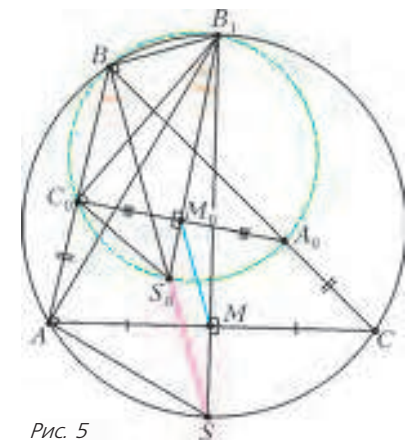


Рис. 5

Теперь мы готовы к решению.  $\triangle S_0C_0B_1$  подобен  $\triangle SAB_1$ , так как  $\angle S_0C_0B_1 = \angle S_0BB_1 = \angle SBB_1 = \angle SAB_1$  (дважды пользовались тем, что углы, опирающиеся на одну дугу, равны) и  $\angle S_0B_1C_0 = \angle S_0BC_0 = \angle SBA = \angle SB_1A$ . Из вышесказанного следует, что  $C_0M_0$  и  $AM$  являются высотами в  $\triangle S_0C_0B_1$  и  $\triangle SAB_1$ . Значит, точки  $M_0$  и  $M$  делят стороны  $B_1S_0$  и  $B_1S$  в равных отношениях, т.е. прямые  $MM_0$  и  $SS_0$  параллельны. Утверждение доказано.

4. Построим окружность, описанную около треугольника  $I_A DI_C$  (рис.6). Пусть она пересекается с отрезком  $BD$  и стороной  $AC$  в точках  $B_0$  и  $B_0''$ . Нам достаточно показать, что  $B_0'$  и  $B_0''$  совпадают, так как  $\angle I_A DI_C$  – прямой. Применяя для треугольников  $ABD$  и  $CBD$  факт 2, получаем, что

$AB_0'' + BB_0 = AB$  и  $B_0''C + BB_0 = BC$ . Следовательно, справедливо равенство  $AB_0'' - B_0''C = AB - BC$ . Легко также получить, что  $AB_0' - B_0'C = AC_0' + C_0'B - BA_0' - A_0'C = AB - BC$ , где  $C_0'$  и  $A_0'$  – точки касания вписанной окружности со сторонами  $AB$  и  $BC$ . Следовательно, точки

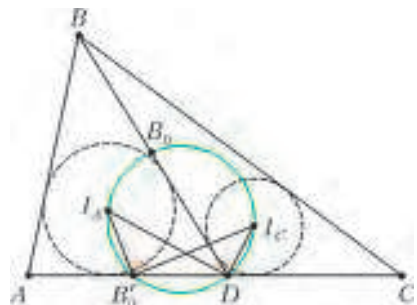


Рис. 6

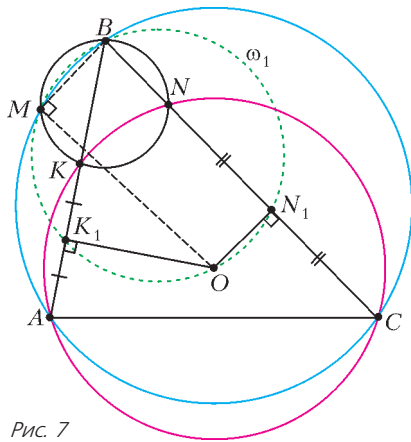


Рис. 7

и  $N$ . Тогда через единицу времени от начала они были в точках  $K_1$  и  $N_1$ . В силу факта 3, описанные окружности треугольников  $ABC$ ,  $K_1BN_1$  и  $KBN$  пересекаются в двух точках  $B$  и  $M$ .

Поскольку  $OK_1$  и  $ON_1$  – серединные перпендикуляры к  $AK$  и  $CN$  (так как  $O$  – центр описанной окружности четырехугольника  $AKLC$ ), то точка  $O$  также лежит на окружности  $\omega_1$ . Значит,  $BO$  – диаметр, а угол  $OMB$  – прямой.

**ДВЕ ДЮЖИНЫ ЗАДАЧ НА ЗАКОН ОМА**

1.  $P_{\max} = \frac{I_0^2 R}{4(I_0 - I)}$ .
2.  $r = \sqrt{R_1 R_2} = 2 \text{ Ом}$ .
3.  $I_4 = \frac{I_1 I_2 I_3 (I_1 I_3 + I_2 I_3 - 2 I_1 I_2)}{I_1^2 I_2^2 + I_1^2 I_3^2 + I_2^2 I_3^2 + I_1 I_2 I_3 (I_3 - 2 I_1 - 2 I_2)}$ .
4.  $U'_1 = U'_2 = \frac{4}{9} \varepsilon$ .    5. В первом случае.
6. а) 45; б) решения нет.    7.  $R = 10(n - 1)r$ .
8.  $\varepsilon = \frac{U_2 U_3}{U_3 - U_1} = 12 \text{ В}$ .    9.  $I = \frac{I_3 (I_1^2 + I_2^2 + I_1 I_2)}{I_3 (I_1 + I_2) - I_1 I_2} = 5,43 \text{ А}$ .
10.  $k = \frac{P_1 (U^2 + P_2 r)}{P_2 (U^2 + P_1 r)} = 1,125$ .
11.  $\eta' = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 P_2}{P_1} \eta (1 - \eta)} \right)$ ,  $\eta'_1 = 75\%$ ,  $\eta'_2 = 25\%$ .
12.  $\alpha = 2k - 1 \pm 2\sqrt{k^2 - k}$ ,  $\alpha_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $\alpha_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ .

**РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XXXVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

9 класс

1. 3 числа.  
Предположим, что чисел хотя бы четыре, и  $a$  – число с минимальным модулем. Из остальных чисел хотя бы два имеют один знак (оба неотрицательны или оба неположительны). Обозначим их  $b$  и  $c$ ; тогда  $bc = |bc| \geq |a|^2 = a^2$ , что противоречит условию.  
Осталось привести пример трех чисел, удовлетворяющих условию. Подходят, например, числа 1, 2,  $-3$ .
2. Пусть  $O_1$ ,  $r_1$  и  $O_2$ ,  $r_2$  – центры и радиусы окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно, а  $K$  – точка пересечения  $l_1$  и  $l_2$ . Заметим, что точка  $P$  лежит на отрезке  $O_1 O_2$  и делит его в отношении  $r_1 : r_2$ .  
Обозначим через  $P_1$  точку касания  $l_2$  и  $\omega_1$ , а через  $P_2$  – точку касания  $l_1$  и  $\omega_2$ . Прямоугольные треугольники  $KO_1 P_1$

$B'_0$  и  $B''_0$  совпадают, и утверждение доказано.

5. Воспользуемся фактом 3 и покажем, что середины  $K_1$  и  $N_1$  отрезков  $AK$  и  $CN$ , а также точки  $B$  и  $M$  лежат на одной окружности  $\omega_1$  (рис.7). Будем считать, что в начальный момент точка  $X$  была в  $A$ , а точка  $Y$  была в  $C$ , а через две единицы времени они оказались в точках  $K$

и  $KO_2 P_2$  подобны по острому углу при вершине  $K$ . Значит,  $\frac{KO_1}{KO_2} = \frac{O_1 P_1}{O_2 P_2} = \frac{r_1}{r_2}$ . Таким образом, в треугольнике  $KO_1 O_2$  точка  $P$ , лежащая на стороне  $O_1 O_2$ , делит ее в отношении, равном отношению прилежащих сторон  $KO_1$  и  $KO_2$ . Из этого следует, что  $P$  – основание биссектрисы треугольника  $KO_1 O_2$ .

*Замечание.* В задаче возможны два принципиально различных случая расположения точек и прямых. Они показаны на рисунках 8 и 9. Приведенное решение не зависит от случаев.

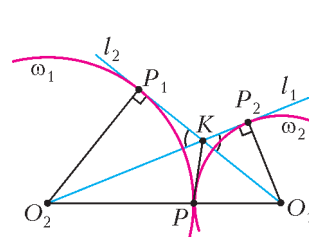


Рис. 8

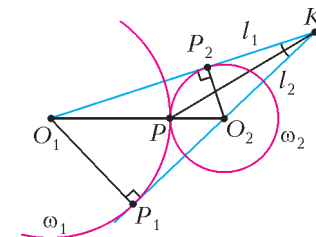


Рис. 9

**3. 0.**

Из условия следует, что все сидящие за столом разбиваются на пары друзей; значит, рыцарей и лжецов поровну. Рассмотрим любую пару друзей. Если они сидят рядом, то рыцарь на заданный вопрос ответит «да», а лжец – «нет». Если же они не сидят рядом, то их ответы будут противоположными. В любом случае ровно один из пары друзей даст ответ «да». Значит, при любой рассадке все остальные 15 ответов будут «нет».

4. Предположим противное. Ясно, что тогда числа  $a$  и  $b$  натуральные. Действительно, если, скажем,  $a < 0$ , то, подставляя  $m = 2|b|$ ,  $n = 1$ , получаем, что число  $4ab^2 + b \cdot 1 = b(4ab + 1)$  должно быть квадратом некоторого числа  $x$ . С другой стороны, числа  $b$  и  $4ab + 1$  имеют разные знаки, так что  $x^2 < 0$ . Это невозможно.

Подставим теперь  $m = 2b$ ,  $n = 1$  и  $m = 2b$ ,  $n = 2$ . Получим, что  $4ab^2 + b = x^2$  и  $4ab^2 + 4b = y^2$  при некоторых натуральных  $x, y$ . Ясно, что  $y^2 > x^2 > 4b^2$ , поэтому  $y > x > 2b$ . Но тогда  $3b = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) \geq 1 \cdot 4b$ , что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство.

5. Пусть Фокусник после первого действия не тасует карты, а собирает их, не нарушая порядок в столбцах, и складывает в колоду один столбец за другим. Второй раз он выкладывает карты построчно, т.е. бывшие столбцы становятся строками (это нетрудно сделать, выкладывая ту же колоду по горизонтали). После ответа Зрителя, Фокусник знает номер строки и столбца в первой раскладке, содержащих загаданную карту, что и позволяет ему назвать ее.

*Замечание.* Приведенный алгоритм – не единственный возможный.

**6. Заметим, что**

$$2(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(a^3 - b^3) = (a^5 - b^5) + a^2 b^2 (a - b) \geq 4 + a^2 b^2 (a - b).$$

Поскольку  $a^3 > b^3$ , мы имеем  $a > b$ , а значит,  $a^2 b^2 (a - b) \geq 0$ . Итак,  $2(a^2 + b^2) \geq 4$ , откуда и следует утверждение задачи.

7. Пусть  $B_0$  – точка касания вписанной окружности со стороной  $AC$  (рис.10). Можно считать, что точка  $D$  лежит на отрезке  $AB_0$ . Точки  $A_0$  и  $C_0$  симметричны точке  $B_0$  относительно биссектрис углов  $C$  и  $A$  соответственно. Следовательно, точка  $E$  лежит на отрезке  $AC_0$ , а точка  $F$  – на продолжении отрезка  $CA_0$ , и  $EC_0 = DB_0 = FA_0$ .

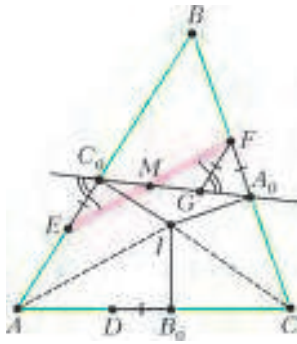


Рис. 10

Равны по стороне и двум углам, и  $EM = MF$ .

10 класс

1. Возьмем любые 5 из данных чисел:  $a, b, c, d, e$ . Если  $abc > de$ , то утверждение задачи верно. Если же  $de \geq abc$ , возьмем еще два числа  $f$  и  $g$ . Пусть, скажем,  $f > g$ . Тогда  $def > abcg$ ; значит, и в этом случае утверждение задачи верно.

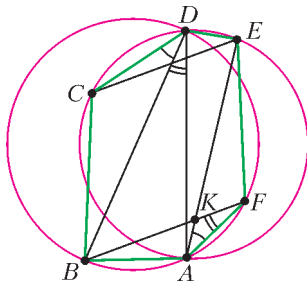


Рис. 11

получаем

$$\angle AKB = \angle AFB + \angle FAE = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADC = \angle AEC.$$

Итак,  $\angle AKB = \angle AEC$ . Это и значит, что  $BF \parallel CE$ .

3. Число  $a_3 = 5 \cdot 72 = 360$  – целое. При  $n \geq 4$  будут верны равенства

$$a_n = 5 \cdot \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \quad \text{и} \quad a_{n-1} = 5 \cdot \frac{a_1 + \dots + a_{n-2}}{n-2},$$

откуда следует, что

$$a_n = \frac{5}{n-1} \left( \frac{n-2}{5} a_{n-1} + a_{n-1} \right) = \frac{n+3}{n-1} a_{n-1}.$$

Значит, если  $n \geq 4$ , то число

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+3)(n+2) \cdot \dots \cdot 7}{(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3} \cdot a_3 = \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot 360 = (n+3)(n+2)(n+1)n \end{aligned}$$

целое, что и требовалось доказать.

4. 1.

Индукцией по  $N$  докажем, что четных паросочетаний на 1 больше, чем нечетных. Для  $N = 1$  утверждение очевидно: есть лишь одно паросочетание, и оно четно. Теперь докажем утверждение для  $2N$  точек, предполагая, что оно верно для  $2(N-1)$  точек. Обозначим отмеченные точки  $A_1, A_2, \dots, A_{2N}$  в порядке обхода окружности по часовой стрелке.

**Лемма.** Пусть в паросочетании участвует хорда  $A_1A_i$ . Тогда при четном  $i$  она пересекает четное число хорд, а при нечетном  $i$  – нечетное.

**Доказательство.** Пусть хорду  $A_1A_i$  пересекают ровно  $k$  хорд. Рассмотрим точки  $A_2, \dots, A_{i-1}$ ; ровно  $k$  из них являются концами хорд, пересекающих  $A_1A_i$  (по одному концу каждой хорды). Остальные  $i-2-k$  точек разбиваются на пары точек, соединенных хордами, которые не пересекают  $A_1A_i$ . Таким образом, число  $i-2-k$  четно, т.е. числа  $i$  и  $k$  имеют одинаковую четность. Лемма доказана.

Обозначим теперь через  $M$  точку пересечения прямых  $EF$  и  $A_0C_0$  (она лежит на отрезке  $EF$ ). Отметим на прямой  $A_0C_0$  точку  $G$  так, чтобы отрезки  $FG$  и  $AB$  были параллельны. Тогда треугольники  $FGA_0$  и  $BC_0A_0$  подобны; поскольку  $BC_0 = BA_0$ , получаем  $FG = FA_0 = EC_0$ . Далее, из параллельности имеем  $\angle FEC_0 = \angle EFG$  и  $\angle EC_0G = \angle FGC_0$ . Значит, треугольники  $EC_0M$  и  $FGM$  равны по стороне и двум углам, и  $EM = MF$ .

Разобьем теперь все паросочетания на  $2N-1$  группу  $\Pi_2, \dots, \Pi_{2N}$ : в группу  $\Pi_i$  попадут те паросочетания, в которых точка  $A_1$  соединена с  $A_i$ . Теперь выкинем из каждого паросочетания из  $\Pi_i$  хорду  $A_1A_i$ ; получатся все возможные паросочетания на оставшихся  $2N-2$  точках. По предположению индукции, среди них четных на одно больше, чем нечетных. При этом, если  $i$  четно, то согласно лемме четность паросочетания при выкидывании не менялась, а если  $i$  нечетно, то менялась. Значит, в каждом из  $N$  множеств  $\Pi_2, \dots, \Pi_{2N}$  четных паросочетаний на одно больше, чем нечетных, а в каждом из  $N-1$  множеств  $\Pi_3, \dots, \Pi_{2N-1}$  нечетных на одно больше, чем четных. Итого, всего четных паросочетаний больше, чем нечетных, на  $N - (N-1) = 1$ , что и требовалось доказать.

5. Не могут.

Предположим противное; тогда все углы пятиугольника – различные числа из интервала  $(0; \pi)$ . Заметим сразу, что тогда у Пети не найдется трех равных чисел, ибо в этом интервале нет трех различных углов с равными синусами.

Значит, у Пети должны быть две пары равных чисел:

$$\sin \alpha = \sin \beta \quad \text{и} \quad \sin \gamma = \sin \delta.$$

Поскольку  $\alpha \neq \beta$ , мы получаем  $\alpha = \pi - \beta$ ; аналогично,  $\gamma = \pi - \delta$ .

Пусть теперь  $\epsilon$  – пятый угол пятиугольника. Поскольку сумма углов пятиугольника равна  $3\pi$ , имеем  $\epsilon = 3\pi - (\alpha + \beta) - (\gamma + \delta) = 3\pi - \pi - \pi = \pi$ . Это невозможно, так как  $\epsilon < \pi$ .

6. 4 числа.

Покажем сначала, что искомым чисел не может быть более четырех. Заметим, что если  $k$  – нечетное, то число

$$1 + a^{nk} = 1^k + (a^n)^k$$

делится на  $1 + a^n$ . Далее, каждое из чисел

$1, 2, \dots, 15$  имеет один из видов  $k, 2k, 4k, 8k$ , где  $k$  нечетно.

Таким образом, каждое из чисел  $1 + a, 1 + a^2, 1 + a^3, \dots, 1 + a^{15}$  делится либо на  $1 + a$ , либо на  $1 + a^2$ , либо на  $1 + a^4$ , либо на  $1 + a^8$ .

Поэтому если мы возьмем хотя бы пять чисел, то среди них найдутся два, делящиеся на одно и то же число, большее 1; значит, они не будут взаимно просты. Итак, оставшихся чисел не более четырех.

Осталось показать, что четыре числа могли остаться. Действительно, если  $a = 2$ , то можно оставить числа  $1 + 2 = 3$ ,

$$1 + 2^2 = 5, \quad 1 + 2^4 = 17 \quad \text{и}$$

$$1 + 2^8 = 257.$$

Все они попарно взаимно просты.

Замечание. Можно показать, что при любом четном  $a$  числа  $1 + a, 1 + a^2, 1 + a^4, 1 + a^8$  будут попарно взаимно просты.

8. Так как  $SO$  – диаметр, то  $\angle SCA = \angle SCO = \angle SDO = \angle SDB = 90^\circ$  (рис.12). Для решения достаточно доказать подобие прямоугольных треугольников  $SCA$  и  $SDB$ . Действительно, из подобия будет следовать равенство углов  $\angle CSA = \angle DSB$ , откуда

$$\angle BSC = \angle CSA - \angle ASB = \angle DSB - \angle ASB = \angle ASD.$$

Итак, достаточно показать, что  $\frac{AC}{BD} = \frac{SC}{SD}$ . Из прямоугольных треугольников  $ADC$  и  $BCD$  имеем

$$\frac{AC}{BD} = \frac{CD}{\cos \angle OCD} : \frac{CD}{\cos \angle ODC} = \frac{\cos \angle ODC}{\cos \angle OCD}.$$

Так как  $\angle OCD = 90^\circ - \angle SCD$ , то  $\cos \angle OCD = \sin \angle SCD$ .

Аналогично,  $\cos \angle ODC = \sin \angle SDC$ . Отсюда

$$\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \angle SDC}{\sin \angle SCD} = \frac{SC}{SD} \quad (\text{последнее равенство следует из теоремы синусов}),$$

откуда и получится требуемое подобие.

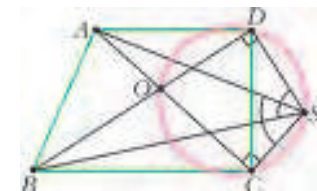


Рис. 12



*Замечание.* Точки  $A$  и  $B$  являются изогонально сопряженными точками относительно треугольника  $SCD$ .

11 класс

1. Пусть  $a$  – один из членов прогрессии, а  $d$  – ее разность. По условию, числа  $a(a+d)$  и  $a(a+2d)$  – также члены прогрессии; значит, их разность имеет вид  $nd$  при некотором целом  $n$ , т.е.  
 $a(a+2d) - a(a+d) = nd$ , или  $ad = nd$ . Поскольку  $d > 0$ , получаем  $a = n$ , т.е.  $a$  – целое число. В силу произвольности выбора члена прогрессии, задача решена.

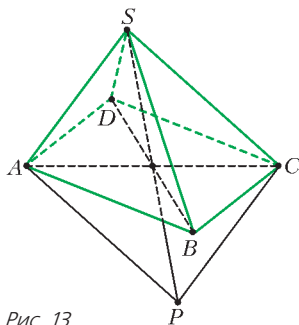


Рис. 13

2. Пусть  $P$  – точка пересечения данных прямых (рис.13). Поскольку  $PA \parallel SC$  и  $PC \parallel SA$ , точка  $P$  лежит в плоскости  $SAC$ , а четырехугольник  $ASCP$  – параллелограмм. Поэтому прямая  $SP$  делит отрезок  $AC$  пополам. Аналогично, прямая  $SP$  делит отрезок  $BD$  пополам. Тем самым прямая  $SP$  пересекает плоскость основания пирамиды в точке пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ , и диагонали делятся этой точкой пополам. Значит,  $ABCD$  – параллелограмм.

3. Отложим векторы  $2\vec{a}_1, \dots, 2\vec{a}_n$  из одной точки; пусть  $\vec{OA}_i = 2\vec{a}_i$ . Тогда все точки  $A_1, \dots, A_n$  различны и лежат на окружности  $\omega$  с центром  $O$ . Пусть  $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$ . Рассмотрим точку  $S$  такую, что  $\vec{OS} = \vec{s}$ ; по условию, все векторы  $\vec{s} - 2\vec{a}_i$  имеют одну и ту же длину  $r$ . Поскольку  $\vec{SA}_i = \vec{OA}_i - \vec{OS} = 2\vec{a}_i - \vec{s}$ , это означает, что все точки  $A_1, \dots, A_n$  лежат на окружности  $\Omega$  с центром  $S$  и радиусом  $r$ . Итак, окружности  $\omega$  и  $\Omega$  имеют  $n > 2$  общих точек. Это значит, что они совпадают, а тогда и их центры совпадают, т.е.  $\vec{s} = \vec{0}$ . Это и требовалось доказать.

4. Могло. Обозначим первый ответ на каждый вопрос через ноль, а второй – через единицу. Тогда каждому набору ответов соответствует набор из шести нулей и единиц. Аудиторию будем представлять в виде таблицы  $8 \times 8$ , в клетки которой представляются наборы из шести цифр. Нам требуется заполнить таблицу так, чтобы соседние по вертикали или горизонтали наборы совпадали не более чем по одной цифре. Четностью набора будем называть четность суммы его цифр.

Покажем сначала, как заполнить клетки так, чтобы соседние наборы различались ровно по одной цифре. Пусть в наборах любой строки последние три цифры одинаковы, а первые три определяются слева направо так: 000, 001, 011, 010, 110, 100, 101, 111. Тогда любые два соседних по горизонтали набора различаются ровно по одной цифре. В каждом столбце последние три цифры определим таким же образом сверху вниз. Аналогично получится, что любые два соседних по вертикали набора различаются ровно по одной цифре. Остается заметить, что все наборы различны, поскольку наборы из разных столбцов отличаются в первых трех цифрах, а из разных строк – во вторых трех.

Покрасим теперь все клетки таблицы в белый и черный цвета в шахматном порядке так, чтобы левая верхняя клетка была белой. Тогда все четные наборы попадут в белые клетки, а все нечетные – в черные. В каждом наборе в черных клетках заменим единицы на нули, а нули – на единицы. Заметим, что при таком обращении четность набора не изменится, поэтому по-прежнему во всех белых клетках будут четные наборы, а во всех черных – нечетные. При этом все нечетные наборы будут попарно различаться (в противном случае какие-

то два набора совпадали бы до обращения); аналогично, все четные будут попарно различаться. Значит, и все наборы будут различны. Наконец, любые две соседние клетки имеют разные цвета, и, поскольку до обращения наборы в них различались ровно по одной цифре, после обращения наборы будут совпадать ровно по одной цифре.

На рисунке 14 показан пример аналогичной расстановки для квадрата  $4 \times 4$ .

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 0000 | 0100 | 1100 | 1000 |
| 0001 | 0101 | 1101 | 1001 |
| 0011 | 0111 | 1111 | 1011 |
| 0010 | 0110 | 1110 | 1010 |

Рис. 14

5. При  $n = 1$  неравенство верно, ибо  $0 < 1$ . Пусть  $n > 1$ . Заметим, что  $0 < n - 1 < n + 1$ , поэтому

$$(n-1)^{n+1} (n+1)^{n-1} < (n-1)^n (n+1)^n = (n^2-1)^n = n^{2n},$$

что и требовалось доказать.

7. Пусть для определенности  $a > b$ . Если  $(x_0, y_0)$  – одна из точек пересечения, то  $\sin ax_0 - \sin bx_0 = 0$ , или

$$\sin \frac{a-b}{2} x_0 \cdot \cos \frac{a+b}{2} x_0 = 0.$$

Значит,  $\frac{a-b}{2} x_0 = k\pi$  или  $(a+b)x_0 = (2k+1)\pi$  при некотором целом  $k$ , откуда следует, что одно из чисел  $\frac{a-b}{2\pi} x_0$  или  $\frac{a+b}{\pi} x_0$  – целое.

Подберем теперь число  $c$  такое, чтобы во всех таких точках число  $\frac{a+c}{2\pi} x_0$  также было целым; тогда в этих точках мы будем иметь

$$\sin \frac{a-c}{2} x_0 \cdot \cos \frac{a+c}{2} x_0 = 0,$$

или  $\sin cx_0 = \sin ax_0 = y_0$ , что и требуется.

Для этого достаточно положить, например,  $c = 2(a^2 - b^2) + a$ . Действительно, тогда число

$$\frac{a-c}{2\pi} x_0 = (b-a) \cdot \frac{b+a}{\pi} x_0 = 2(b+a) \cdot \frac{b-a}{2\pi} x_0$$

в целое число раз больше каждого из чисел  $\frac{a-b}{2\pi} x_0$  и  $\frac{a+b}{\pi} x_0$ , т.е. является целым. Кроме того,  $c > a > b$ . Это и означает, что  $c$  удовлетворяет требованиям.

### РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XLVI ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

9 класс

1. Искомый этаж – 13-й. *Указание.* Постройте графики прохождения этажей в зависимости от времени.

2. 1)  $V_{II} = Sh \frac{\rho_{II}}{\rho_{I}} - V \frac{\rho_{II}}{\rho_{I}} - \rho_{II} g h$ ; 2)  $T = \rho_{II} g Sh$ .

3.  $s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} g (\Delta t)^2 \approx 7,64 \text{ м}$ .

4.  $l = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{mR}{\rho d}} = 31,8 \text{ см}$ .

5. Источник света  $S$  имеет 3 изображения в зеркалах –  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  (рис.15). Не будут освещенными участки  $C_1C_2$ ,  $D_1D$  и  $DB_1$ . Их общая длина равна

$$l = a - \frac{b+7c}{2} = 3,75 \text{ м},$$

а общая площадь составляет

$$IH = 15 \text{ м}^2.$$

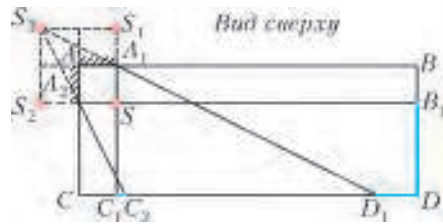


Рис. 15

10 класс

1. 1)  $V_{II} = Sh \left(1 - \frac{\rho_B}{2\rho_n}\right)$ ; 2) и 3) уровень воды понизится на

$$\Delta h = \frac{h}{2} \left(1 - \frac{\rho_B}{2\rho_n}\right).$$

2. Условие задачи приводит к биквадратному уравнению

$$\tau^4 - \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 \tau^2 + \left(\frac{L}{g}\right)^2 = 0,$$

корни которого равны  $\tau_1 = 2$  с и  $\tau_2 = 1,5$  с.

3. 1)  $\mu \geq \frac{P}{mgv} \approx 0,07$ ; 2)  $\mu \geq \frac{\sqrt{(P/v)^2 + (mv^2/R)^2}}{mg} \approx 0,19$ .

5. Искомый газ – водород с молярной массой  $M = 2$  г/моль.

11 класс

1. Уровень воды может как повыситься, так и понизиться.

Поэтому решений будет два:

$$V = \frac{2m}{\rho} \pm S\Delta h,$$

$$V_1 = 750 \text{ мл}, V_2 = 450 \text{ мл}.$$

$$2. 1) I_{\max} = \varepsilon \sqrt{\frac{4C}{L}};$$

$$2) I = \varepsilon \sqrt{\frac{3C}{L}}; 3) q_1 = 3C\varepsilon$$

Рис. 16

(в начальный момент времени),  $q_2 = -C\varepsilon$ .

3.  $V_{\max} = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\alpha^4 R^4}{m^4} + \mu^2 R^2 g^2 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 R^2}{m^2}} = 50 \text{ м/с}$ , см. рис.16.

$$4. E_k = \frac{MgH}{2}. \quad 5. k = \frac{(\alpha - \gamma)(\beta + 1)}{\alpha} = \frac{5}{8}.$$

## ОЛИМПИАДА «МАКСВЕЛЛ-2012»

7 класс

1.  $t = 4$  мин.

2.  $\rho = 200 \text{ кг/м}^3$ .

3. Освещенности от сегментов складываются. Самое «яркое» ночное время 08:08 состоит из 26 сегментов, а самое «тусклое» время 21:11 – из 11 сегментов. Таким образом, искомое отношение освещенностей равно  $\frac{26}{11}$ .

$$4. l = \frac{L}{720} = 4,125 \text{ мм}.$$

8 класс

1.  $t = 1,4$  с.

2.  $m_{II} = 10,75 \text{ г}$ ,  $m_c = 31,5 \text{ г}$ .

3.  $\rho_0 = \rho_0 - \rho_c = 0,6 \text{ г/см}^3$ .

4.  $L = 220 \text{ см}$ .

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТАЙНЫ ПЕЧАТИ  
ЦАРЯ СОЛОМОНА

(см. «Квант» №1)

10. Указание. Докажите рекуррентную формулу

$\Delta(n) = \Delta(n-1) + n^2$ . Тогда  $\Delta(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ . Количество треугольников вида  $\Delta$  и вида  $\nabla$  совпадают в силу симметрии.

11. Указание. Количество треугольников вида  $\Delta$  и вида  $\nabla$  совпадают в силу симметрии. Доказательство проведите методом математической индукции.

12.  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ . Указание. Введите понятие «обертывающего»

шестиугольника и вычислите  $\sum_{q=1}^n q(3(n-q)^2 + 3(n-q) + 1)$ .

13.  $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ . Указание. Введите понятие «обертывающего»

квадрата и вычислите сумму  $\sum_{q=1}^n q(n+1-q)^2$ .

14.  $\frac{n(n+1)(n+2)(2m-n+1)}{12}$ . Указание. Используйте понятие «обертывающего»

квадрата и вычислите

$$\sum_{q=1}^n q(n+1-q)(m+1-q).$$

## КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
М.В.Сумнина, В.М.Хлебникова

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: math@kvantjournal.ru, phys@kvantjournal.ru

Сайт: kvantjournal.ru

Отпечатано

в соответствии с предоставленными материалами  
в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru

## ФЕРЗЕВЫЕ СЮЖЕТЫ

Ферзевые окончания занимают третье место по популярности после пешечных и ладьейных. А если у белых и черных по два или более ферзей (плюс еще какие-то фигуры), то эти виды эндшпиля вообще мало исследованы. Кстати, мы уже обращались к этой теме («Квартет ферзей» – «Квант» №5 за 2010 г.), но за пару лет коллекция автора пополнилась...

Достигнув крайней горизонтали, пешка превращается в любую фигуру, и, значит, теоретически у каждой стороны в партии может появиться девять ферзей (по одному имеется изначально). Но на практике даже четыре ферзя – большая редкость.

### Белявский – Тайманов Москва, 1979



Шагем на стороне белых. По кромке доски их проходная пешка быстро пробивается к восьмой горизонтали.

1. a5! Не теряя времени на размен одной пары ферзей.

1... ♖f4 2. ♗c4! Прокладывая дальнейший путь своей пешке.

2... ♗f7 3. a6 ♘c5 4. ♗b7+ ♗g6 5. ♗:c5 ♗:a2 6. a7. Черные сдались – появление пятого ферзя неизбежно.

Заканчиваются ли четырехферзевые окончания ничейным исходом? Редко, но случается и такое.

### Роштер – Гульдн Ленинград, 1939



1. a8 ♗. На доске второй белый ферзь. Черный появится чуть позже.

1... ♘:f2+ 2. ♗:f2. Белые рассчитывали найти убежище для короля в углу, но на 2. ♗h1 последовало бы 2... ♗c1!, и несмотря на лишнего ферзя они проигрывали. Теперь же король отправляется в опасное плавание.

2... ♗d4+ 3. ♗g3 ♗c3+ 4. ♗f4 e3+ 5. ♗e4 ♗f6+ 6. ♗g4. Черные загнали короля соперника в матовую сеть, но в решающий момент попадают в коварную ловушку.

6... h5+? Легко выигрывало 6... e2! 7. ♗g3 e1 ♗! 8. ♗:e1 ♗g5+ 9. ♗h3 ♗h5×.

7. ♗h3 e2+ 8. ♗g3 e1 ♗. На доске две пары ферзей – что и требовалось доказать! Черные ожидали, что соперник остановит часы, так как на 9. ♗:e1 следует мат в два хода – 9... ♗f5+ и 10... ♗g4×. Но на сей раз у белых, оказавшихся в трудном положении, находится этюдное спасение.

9. ♗g8+! Белые жертвуют обеих ферзей и добиваются лага.

9... ♗h6 10. ♗f8+ ♗h7. Увы, закрыться ферзем на g7 нельзя – после размена теряется ферзь на e1.

11. ♗g8+ ♗:g8 12. ♗e8+! ♗h7 13. ♗g8+ ♗h6 14. ♗h7+ ♗g5 15. ♗h6+ ♗:h6. Пат.

Еще один пример, в котором появляется квартет ферзей.

### Вескови – Крылов Москва, 2010



1...g1 ♗. Конечно, черным трудно удержаться, чтобы не поставить ферзя. А между тем компьютер показал более убедительный вариант: 1... ♗f1 2. ♗d3 (2. a7 ♘:c6+! 3. de+ d5! 4. ♗d3 ♗:d3+ 5. ♗:d3 g1 ♗ – теперь очередь белых ставить ферзя, но 6. b8 ♗ ♗b1+ 7. ♗a4 ♗:b8 ведет к фиаско) 2...g1 ♗ 3. a7 ♗g4 4. a8 ♗ e2 5. b8 ♗ e1 ♗. У каждой стороны уже по три ферзя, но у белых они расположены неудачно и с одним придется расстаться.

2. a7 ♗gf1 3. a8 ♗ ♗:c4+. Точнее 3... ♘:c6+ 4. de+ ♗:c4+! 5. ♗:c4 d5+.

4. ♗:c4 ♗f1+ 5. ♗d3 e2. И здесь

черные могли развить матовую атаку: 5... ♘:c6 6. de d5+ 7. ♗:d5 ♗f7+.

6. ♘c3 ♘d8? Ошибка, которая могла привести к противоположному результату.

7. b8 ♗ e1 ♗ 8. ♘:e1 ♘:c6 9. ♗:d8? Теперь уже белые могли форсированно выиграть: 9. ♗:c6! ♗f4+ 10. ♗b3!

9... ♘:a8 10. ♗g5+ ♗f7 11. ♗h5+? К вечному шаху вело 11. ♘h4!

11... ♗e7 12. ♘h4+ ♗d7 13. ♗g4+ ♗f5 14. ♗c3 ♗f4, и фантастический эндшпиль закончился прозаически – черные все-таки реализовали свой перевес, правда через пятьдесят ходов.

Как мы видим, с квартетом ферзей связаны самые разные сюжеты. А встречаются ли на практике позиции с еще большим числом фигур? На следующей диаграмме сразу пять ферзей – три белых и два черных!

### Григорьев – Алехин Москва, 1915



Надо сказать, что, хотя эта партия коцует из одного шахматного издания в другое, на самом деле у Алехина с Григорьевым такая позиция никогда не возникала. А перед нами лишь положение из их совместного анализа некой другой партии из турнира Московского шахматного кружка 1915 года.

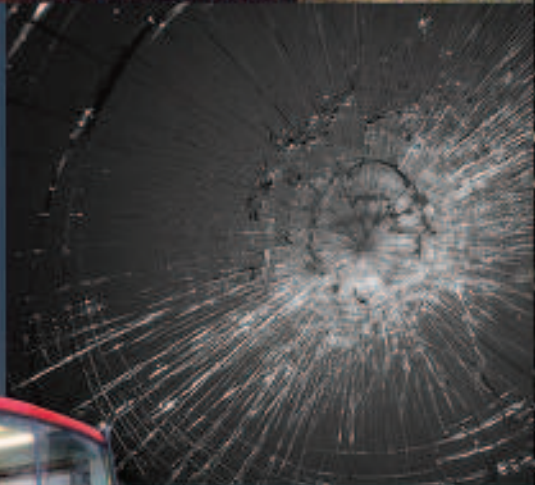
1. ♗h6!! Ход, указанный Алехиным, угроза 2. ♗d8×.

1... ♗:f1 2. ♗b4+ ♗b5 3. ♗d8+ ♗a6 4. ♗ea3+, и мат в 2 хода. В дальнейшем был найден такой забавный вариант: 1... ♘g4+! 2. ♗g:g4 ♘:e3 3. ♗b4+ ♗:b4 4. ♗:b4+ ♗c7, и у белых только вечный шах – 5. ♗d6+ и т.д. Но уточнение позднее обнаружил Каспаров: 3. ♗:e3+! ♗c5 4. ♗gf4, и у белых явный перевес.

Е.Гук

Известно ли вам, что салон автобуса имеет некоторое сходство с «комнатой смеха»? Оказывается, в нем можно обнаружить многочисленные «кривые» зеркала и линзы.

*Продукты с физикой*



## ОПТИКА В АВТОБУСЕ

( Подробнее – на страницах 42–44 внутри журнала )

