Задача для мистера Холмса

А.ЖУКОВ

О х, мистер Холмс, – доктор Ватсон потряс в воздухе бумажкой, испещренной многочисленными знаками. – Я всегда удивлялся вашей необыкновенной способности находить решения в самых, казалось бы, безвыходных ситуациях, но боюсь, что в данном случае все ваше волшебное искусство окажется бессильным.

– Мой дорогой Ватсон, – Холмс не спеша отвел в

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1999 год.

сторону трубку и выпустил сизое колечко дыма, – право же, не стоит впадать в излишнее возбуждение от пустякового ребуса, в котором вместо букв следует подобрать всего лишь парочку-другую цифр из ограниченного набора. Жизнь нам преподносит гораздо более содержательные загадки, достойные сопереживания и беспокойства истинного джентльмена.

– Но, Холмс, здесь встречаются не только буквы, но и звездочки! Впрочем, вы опять меня поражаете – как же вы догадались, что речь идет именно о числовом ребусе?

– Это элементарно, Ватсон. Вы же целый час сосредоточенно читаете журнал «Квант», на странице которого помещен предмет вашего пристального внимания, а именно: расшифровать пример на умножение

$$\begin{array}{r} \times\; *,***** \\ OX \\ \hline AX \end{array}$$

И что же в этом примере – прямо скажем, для младших школьников – вызвало у вас столь непреодолимые трудности?

– Видите ли, Холмс, в ребусе на месте звездочек могут стоять произвольные ненулевые цифры. Мне ли вам объяснять, что в данном случае мы сталкиваемся с задачей огромного числового перебора? Похоже, здесь нужно рассмотреть в общей сложности где-то около полумиллиарда вариантов. Бедные детишки!

– Хм, Ватсон, кто много перебирает, тот мало думает. – Холмс окутал себя еще одной порцией табачного дыма. – Совсем нет необходимости рассматривать все мыслимые варианты. Например, со всей определенностью можно утверждать, что двузначное число OX (буква O кодирует цифру десятков, а буква X – цифру единиц) кратно числу 32.

– Холмс, вы хотите сказать, что число OX может принимать всего лишь одно из трех значений: 32, 64 и 96? Простите, но я не пойму, на чем основана столь смелая догадка.

– Это не догадка, а непреложный математический факт. Запишем первый множитель в виде $a+10^{-5}\cdot B$, где a – ненулевая цифра, а B – целое пятизначное число. Из условия задачи следует, что среди делителей B не могут одновременно присутствовать цифры 2 и 5. Несложно догадаться, что число B должно быть нечетным, тогда число OX должно делиться на $2^5=32$.

– В таком случае число B должно быть кратно $5^5=3125$.

– Браво, Ватсон. Ваше утверждение я бы сформулировал несколько точнее: $B=3125\cdot k$, где k – некий нечетный множитель. Кстати, что следует из того, что B – число пятизначное?

– Это условие накладывает дополнительные ограничения на множитель k. В частности, поскольку $3125\cdot 3<10^4$ и $3125\cdot 4>10^4$, то $k>4$.

– Теперь вам должно быть понятно, почему ненулевая цифра a в первом множителе меньше тройки.

– А что, это действительно так?

– Посудите сами, Ватсон:

$$OX\cdot\left(a+10^{-5}\cdot B\right)\geq 2^5\left(a+10^{-5}\cdot 5^5\cdot k\right)=32a+k.$$

При $k>4$ последнее выражение может быть двухзначным числом лишь когда $a=1$ или $a=2$.

– Ох, это великолепно, Холмс! Я думаю, что с дальнейшим перебором уже несложно справиться в течение одного вечера.

– Если только вам нечем заняться, Ватсон. Вечернее время все же лучше посвящать более содержательным занятиям.

– Чем решать головоломки?

– Чем осуществлять бездумный перебор.

– Холмс, неужели вам еще что-то известно о числах этого ребуса?

– Да. Например, число OX равно в точности 64.

– Хм, вполне может быть, но, по правде говоря, я не представляю, на основании чего сделан такой вывод.

– Что вы можете сказать о четности числа AX?

– Сейчас подумаю. Оно заканчивается цифрой X, которая может быть либо 2, либо 4, либо 6 (как последняя цифра числа OX). Следовательно, AX – число четное.

– А теперь заметьте, что произведение $OX\cdot\left(a+10^{-5}\cdot B\right)$ в случае $OX=32$ равно $32a+k$, а в случае $OX=96$ равно $96+3k$. И в том, и в другом случае при нечетном k результат получается…

– Нечетным! Следовательно, ни один из этих случаев не подходит. Ох, Холмс!

– Может быть, вы теперь скажете, чему равна цифра a?

– Попробую:

$$OX\cdot\left(a+10^{-5}\cdot B\right)=64a+2k.$$

Ну конечно же, a не может равняться 2, поскольку иначе в ответе получилось бы трехзначное число. Итак, цифра a может быть равной только единице.

– Ну, и какие же варианты вам теперь осталось рассмотреть? Обратите внимание на то, что число AX должно быть не меньше, чем число OX.

– AX может быть равно либо 74, либо 84, либо 94. Поскольку $AX=64+2k$, то в каждом из этих трех случаев соответственно получаем $k=5$, либо $k=10$ (невозможно, так как k должно быть нечетным), либо $k=15$. Итак, всего возможно два решения: $1{,}15625\cdot 64=74$ и $1{,}46875\cdot 64=94$. Ах, Холмс! Я не могу удержаться, чтобы не употребить слова ребуса для оценки вашего метода. Это действительно великолепно!

– Благодарю вас, Ватсон. А я, с вашего позволения, не могу удержаться, чтобы не употребить освободившееся вечернее время для игры на любимом музыкальном инструменте. Будьте добры, подайте мне, пожалуйста, футляр со скрипкой.