Язык симметрии

Д.МАМФОРД, Д.РАЙТ, К.СИРИС

Группы, или Как без особого труда изготовить мозаику

Мы будем иметь дело с рисунками замощений и симметрий, поэтому нам нужна удобная система для перечисления (а потом и вычисления) всех преобразований, необходимых для того, чтобы замостить плоскость копиями исходной плитки.

Пусть вы хотите нарисовать, а еще лучше написать программу, которая рисует замощение, изображенное на рисунке 1. Обратите внимание, что в углу каждой плитки мы нарисовали красную звездочку. Исходные шестиугольные плитки обладали вращательной симметрией шестого порядка и, кроме того, множеством различных зеркальных симметрий. Однако плитки со звездочкой вообще не имеют симметрий. (Заметьте, что луч красной звездочки не совсем точно указывает на ближайший угол шестиугольника. В противном случае плитка имела бы зеркальную симметрию.) Это немного упрощает нашу задачу, потому что теперь достаточно определить лишь место на полу, куда следует положить плитку, а правильное размещение плитки на выбранной позиции уже единственно. Для начала выложим тщательно подготовленную первую плитку и обозначим ее F (на рисунке она находится в центре). Мы хотим систематически копировать эту плитку, пользуясь симметриями плоскости.

Сначала займемся горизонтальным рядом плиток, содержащим нашу первую плитку F. Этот ряд, разумеется, обладает трансляционной симметрией, и нам нужно лишь немного геометрии, чтобы найти расстояние между центрами соседних плиток в этом ряду. Будем считать, что при выбранном масштабе рисунка расстояние от центра шестиугольника до его стороны равно 1, т.е. расстояние между центрами двух соседних шестиугольников равно 2. Обозначим через T сдвиг на 2 единицы вправо. Плитки, лежащие правее F в том же ряду, – это просто сдвиги

$$T(F), T^2(F), T^3(F), \ldots;$$

для краткости мы используем экспоненциальную запись и пишем, например, $T^3(F)$ вместо $T\left(T\left(T(F)\right)\right)$. Чтобы перемещаться влево от исходной плитки, нужно применять обратное преобразование T^{-1}, которое сдвигает все на 2 единицы влево. Таким образом, плитки, лежащие слева от F, записываются в виде

$$T^{-1}(F), T^{-2}(F), T^{-3}(F), \ldots$$

Окончание. Начало в «Кванте» №4 за 2011 год.

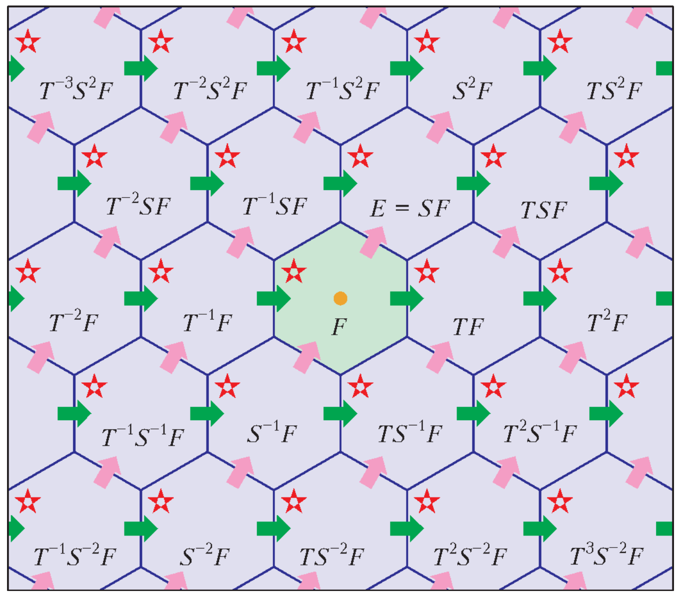

Рис.1. Украшенное звездочками шестиугольное замощение; каждая плитка помечена соответствующим преобразованием. Множество всех красных звездочек образует орбиту исходной красной звездочки (нарисованной на первой плитке F) под действием группы, порожденной преобразованиями S и T

На рисунке 1 каждая плитка снабжена соответствующей меткой.

Пусть теперь мы хотим выложить плитки следующего ряда сверху. Мы выбрали одну из плиток в этом ряду и обозначили ее E. Эту плитку можно получить сдвигом исходной плитки F, на сей раз по диагонали. Поскольку центры плиток находятся на расстоянии 2 друг от друга, можно показать, что этот сдвиг задается формулой

$$S(x, y) = \left(x + 1, y + \sqrt{3}\right).$$

С преобразованием S пришлось немного повозиться, но зато теперь мы можем добраться до всех остальных плиток, лежащих в том же ряду, что и E, при помощи сдвига T. Перечислим их справа налево:

$$\ldots, T^{-2}(E), T^{-1}(E), E, T(E), \ldots$$

На рисунке 1 они имеют метки вида $T^{-2}S(F)$ или $TS(F)$.

Кажется, система заработала. Чтобы получить третий ряд плиток, надо лишь еще раз повторить то, что мы уже сделали. Применим сдвиг S к E и ко всем степеням T; получится третий ряд с плитками вида

$T^{-2}S^2(F)$ или $T^{-1}S^2(F)$. Чтобы получить ряд плиток, расположенный под F, следует применить обратное преобразование S^{-1}. Этот ряд содержит плитки вида $T^{-2}S^{-1}(F)$ или $T^{-1}S^{-1}(F)$, и так далее. Итак, чтобы выложить полностью все плитки, *достаточно использовать только два преобразования S и T*, а также их обратные S^{-1} и T^{-1}. Пользуясь нашей экспоненциальной записью, мы можем сказать, что до любой плитки массива можно добраться при помощи композиций вида T^lS^k, где k и l – произвольные целые числа, положительные, отрицательные или равные нулю.[1]

Этот процесс построения симметрий работал так гладко, потому что, как мы видели, если S и T являются симметриями одной и той же фигуры, то их композиция ST и обратные им S^{-1} и T^{-1} также являются ее симметриями. В XIX веке подобные семейства преобразований обнаруживались так часто, что в конце концов математики решили дать им специальное название. На формальном математическом языке **группой** преобразований называется семейство, обладающее следующими двумя свойствами:

1) если S и T принадлежат семейству, то ST тоже ему принадлежит;

2) если S принадлежит семейству, то S^{-1} тоже ему принадлежит.

Обычно такое семейство, или группу преобразований, обозначают одной буквой, чаще всего – буквой G. Семейство симметрий, изображенных на рисунке 1, – хороший пример группы: скомбинируйте любые две симметрии, и вы получите третью. Мы видели, что каждая симметрия из этого семейства представляется в виде композиции базовых преобразований S, T и их обратных; в таких случаях говорят, что преобразования S и T **порождают** группу G, или являются ее **образующими**. Симметрии, с которыми мы работаем, по мере нашего продвижения вперед будут становиться все сложнее, но общая идеология не изменится. Мы начинаем с небольшого числа порождающих преобразований, а затем рассматриваем их композиции точно так же, как в этом простом примере.

Еще один пример группы связан с нашим рисунком штата Айова и его одинаковыми квадратными полями (см. рисунок 1 в первой части статьи). На этот раз базовые симметрии – это сдвиг E всей картинки на одну милю к востоку и сдвиг N всей картинки на одну милю к северу. Легко видеть, что любую другую симметрию данного рисунка можно представить в виде композиции преобразований E, N и их обратных $W = E^{-1}$ и $S = N^{-1}$. Множество всех точек, до которых можно добраться из данной точки (например, «базового» красного дома в центре), применяя всевозможные композиции преобразований E, N, E^{-1} и N^{-1}, называется **орбитой** дома под действием группы. Нарисовать орбиту – это прекрасный способ «увидеть» группу геометрически.

Группа симметрий в этом примере порождена преобразованиями E и N. Каждому дому соответствует ровно одна симметрия – та, с помощью которой можно добраться до него из «начального» дома. Квадратные фермы можно пометить теми же симметриями. Поскольку они примыкают друг к другу без наложений и покрывают всю плоскость, говорят, что они образуют **мозаику**, или **замощение** плоскости.

Формальный язык, с помощью которого вводится понятие группы, с непривычки кажется довольно абстрактным и туманным. На самом деле идея группы присутствовала и работала в математике много лет, прежде чем выкристаллизовалась эта краткая форму-

Эварист Галуа (1811–1832). Истоки теории групп

Идея группы принадлежит Эваристу Галуа, который, как и мы, занимался изучением симметрий, но симметрий совсем иного вида. Галуа интересовали симметрии, которыми обладают корни полиномиальных уравнений. Кроме всего прочего, открытия Галуа *доказали невозможность* решения задач, занимавших лучшие математические умы в течение двух тысячелетий: при помощи только циркуля и линейки невозможно ни осуществить трисекцию угла, ни «удвоить» единичный куб (построить отрезок длиной $2^{1/3}$).

Галуа развивал свои идеи совершенно самостоятельно начиная со старших классов гимназии, но его жизнь, омраченная политическими интригами и самоубийством отца, внезапно и трагически оборвалась на дуэли в возрасте всего 20 лет. Рукописи Галуа были утеряны или же не поняты и пролежали без дела более двадцати лет. Первым, кто осознал их важность, был Лиувилль, который и организовал их публикацию в 1846 году. С этого момента идея группы постепенно набирала силу; в 1850-е годы ее подхватил Коши, а затем и Кэли.

Разбирая бумаги Коши вскоре после его смерти в 1857 году, Камиль Жордан обнаружил письмо, в спешке написанное Галуа в ночь перед роковой дуэлью, в котором он приводил набросок дальнейшей теории и выражал надежду, что «кто-нибудь сочтет полезным разобраться в этих бестолковых записях». Хотя письмо к тому времени было опубликовано, оно не было широко известно. Потрясенный, Жордан приступил к систематическому изучению работ Галуа. Кульминацией этого труда явился выход в свет в 1870 году знаменитой книги Жордана «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях». Эта книга, которая стала важным событием в математике, содержала первое систематическое развитие революционных идей Галуа, а также полное изложение теории групп.

В том же году два молодых человека, только недавно получивших свои докторские степени, предприняли путешествие в Париж, чтобы поработать вместе с Жорданом. Их звали Феликс Клейн и Софус Ли. Каждый из них имел свой собственный взгляд на то, как объединить теорию групп с геометрией и анализом, но оба оказали глубочайшее воздействие на все дальнейшее развитие математики.

[1] *Как обычно, используя экспоненциальную запись, мы полагаем, что T^0 есть тождественное преобразование I.*

лировка. Мощь понятия группы в том, что оно выражает все несметное количество способов, которыми можно комбинировать симметрии, при помощи двух простых правил.

Алгебра симметрий

В предыдущем разделе мы выяснили, что преобразование, обратное к T, – это не что иное, как правило, которое ликвидирует эффект, произведенный преобразованием T: если T переводит точку P в точку Q, то T^{-1} переводит Q обратно в P. Этот факт удобно записывать в терминах композиции равенством $T^{-1}T(P) = P$. Таким образом, в наших рассмотрениях возникает специальное преобразование – **тождественное преобразование** I. Это преобразование оставляет вообще все точки неподвижными, т.е. $I(P) = P$ для любой точки P. Может показаться, что изучать такое преобразование довольно глупо, но рассматривать его необходимо для полноты; так, было очень трудно заниматься арифметикой до чудесного изобретения числа 0. Равенство $T^{-1}T(P) = P$ можно записать также в виде

$$T^{-1}T = I.$$

Отсюда автоматически следует, что $TT^{-1} = I$. Чтобы убедиться в этом, возьмем произвольную точку x. Под действием T в нее перешла какая-то точка, так что положим $x = T(y)$. Тогда

$$T^{-1}(x) = T^{-1}T(y) = I(y) = y,$$

откуда следует, что

$$TT^{-1}(x) = T(y) = x = I(x).$$

При композиции с чем бы то ни было тождественное преобразование, как и его родственник число 0 при сложении, не оказывает никакого дополнительного эффекта, т.е.

$$TI = IT = T.$$

Эта формула не менее полезна и не более увлекательна, чем равенство $0 + 3 = 3 + 0 = 3$!

Вспомним, что преобразование T называется симметрией, если оно сохраняет узор из плиток. Если T переводит плитку U в плитку V, то T^{-1} без сомнений переводит плитку V в плитку U. Иными словами, если T – симметрия, то обратное преобразование T^{-1} также является симметрией. Еще более очевидно, что симметрией является тождественное преобразование I: поэтому, в частности, мы и настаивали на том, что симметрия может оставлять плитки неподвижными!

А вот небольшая загадка. Пусть T – преобразование; какое преобразование будет обратным к обратному преобразованию T^{-1}? Если вы рассмотрите несколько простых примеров и чуть-чуть подумаете, то увидите, что это не что иное, как исходное преобразование T. Например, если T – сдвиг «на 3 дюйма влево», то T^{-1} – сдвиг «на 3 дюйма вправо». Чтобы нейтрализовать эффект от перемещения на 3 дюйма вправо, очевидно, нужно переместиться обратно на 3 дюйма влево. Иными словами, T является обратным к обратному преобразованию T^{-1}. Этот факт можно записать в виде тождества $\left(T^{-1}\right)^{-1} = T$, не более удивительного, чем равенство $-(-2) = 2$.

Примечание 1. Расстановка скобок в композициях

Как только мы договорились о том, в каком порядке применять отображения в композиции, их можно заключать в скобки произвольным образом. Соответствующее правило называется **ассоциативным законом**. Оно утверждает, что

$$(ST)U = S(TU).$$

Это означает, что, применив сначала отображение U, а затем композицию ST, мы получим в точности тот же результат, который получили бы, применив сначала TU, а затем S. Вот более сложный пример:

$$(ST)(UV) = S(TU)V.$$

Обычный язык не всегда обладает ассоциативностью. Например,

((Казнить нельзя) помиловать)

– не то же самое, что

(Казнить (нельзя помиловать)).

В качестве еще одного примера выясним, какое преобразование является обратным к композиции ST. Если вы применили сначала T, а потом S, то для ликвидации полученного эффекта надо сначала ликвидировать эффект от S, а затем – от T. Иными словами, следует ожидать, что преобразование, обратное к ST, есть $T^{-1}S^{-1}$. Проверим эту гипотезу с помощью выкладок:

$$\left(T^{-1}S^{-1}\right)ST = T^{-1}\left(S^{-1}S\right)T = T^{-1}IT = T^{-1}T = I.$$

Полученные важные формулы мы собрали в рамке внизу этой страницы.

Как сделать шину из плитки

Вполне возможно, что читатель уже встречался с математическим термином **топология**. Топологию часто называют «геометрией листа резины», а ее описания

Группы, композиции и обратные

Группа преобразований – это семейство, обладающее следующими двумя свойствами:

1) если S и T принадлежат семейству, то ST тоже ему принадлежит;

2) если S принадлежит семейству, то S^{-1} тоже ему принадлежит.

Правило, описывающее действие композиции ST, таково:

сначала применить T, а затем S.

Чтобы обратить композицию ST, следует обратить каждое преобразование в отдельности и поменять их порядок:

сначала применить S^{-1}, а затем T^{-1}.

В символической записи:

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

Обратное к обратному есть исходное преобразование:

$$\left(T^{-1}\right)^{-1} = T.$$

часто начинаются с рисунков, показывающих, как изготовить «бублик», или поверхность типа шины (точнее – велосипедной камеры). Любая поверхность такой формы, даже скрученная и изогнутая (но не порванная!), называется **тором**. Изготовление тора мы изобразили на рисунке 2; вы видите, как доктор Стрелкин (попав в трехмерное пространство, он набрал немного веса) мастерит гигантскую шину.

Описанную процедуру склейки можно понимать более хитрым образом. Объясним его на примере бесконечной равнины штата Айова с ее абсолютно одинаковыми фермами (см. рис.1 из первой части статьи). Представьте, что, следуя процедуре доктора Стрелкина, мы вырезали одно поле по границе и склеили его четыре стороны попарно так, что получилась торообразная космическая станция, на которой имеется всего одна ферма. Если, находясь на этой станции, вы отправитесь «на север» по коричневой тропинке, идущей в направлении с севера на юг, то не попадете к дому соседа, а вернетесь к вашему собственному дому, причем «с юга». Если же вы пойдете «на восток» по зеленой тропинке, идущей в направлении с востока на запад, то вернетесь к собственному дому «с запада».

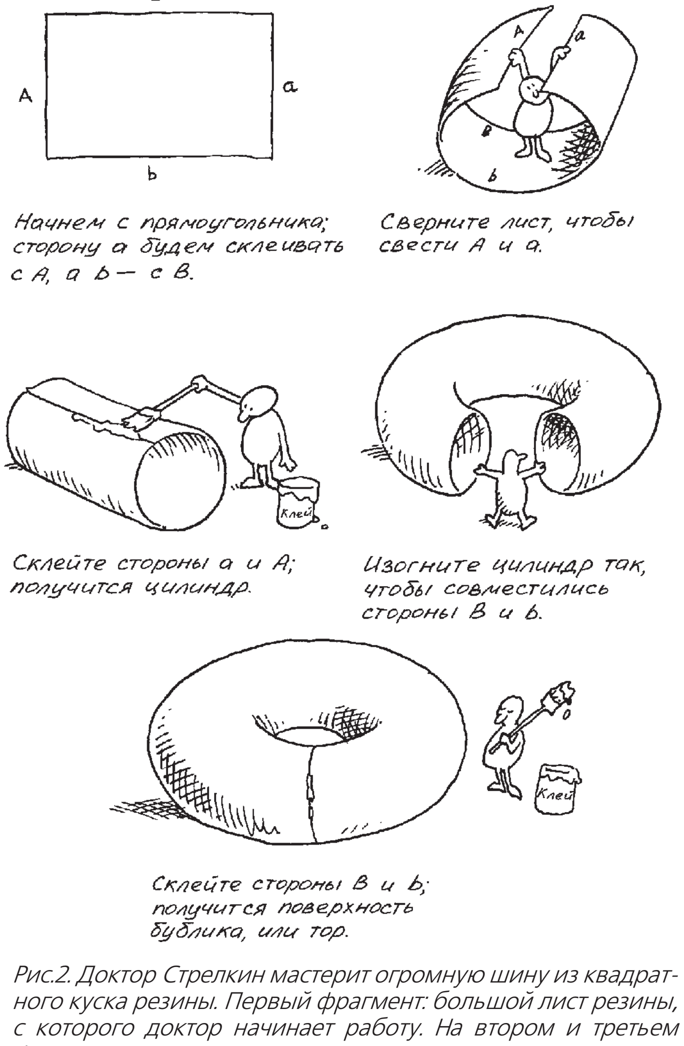

Рис.2. Доктор Стрелкин мастерит огромную шину из квадратного куска резины. Первый фрагмент: большой лист резины, с которого доктор начинает работу. На втором и третьем фрагменте доктор сворачивает лист в цилиндр и склеивает его правую и левую стороны. На четвертом фрагменте он аккуратно изгибает цилиндр так, чтобы совместить его концы, а на пятом вы видите окончательный результат – огромную шину. Обратите внимание, что стороны исходного листа резины мы пометили буквами a, b, A, B таким образом, что сторона a противоположна стороне A, а сторона b противоположна стороне B, т.е. a склеивается с A, а b склеивается с B

Вам может прийти в голову фантастическая мысль: а как понять, живете ли вы на космической станции, склеенной всего из одной фермы, или же на гладкой равнине Айовы, на которой все фермы абсолютно одинаковы? Подобные вопросы приводят в восторг философов: если все фермы на самом деле абсолютно одинаковы, то различить эти ситуации невозможно! Таким образом, конструкцию доктора Стрелкина можно понимать по-другому: вместо того чтобы вырезать одно поле и «склеивать» его стороны, можно взять на себя роль Господа Бога и объявить, что все фермы не просто выглядят одинаково, а *совпадают*, потому что на самом деле ферма только одна. Иначе говоря, можно условиться, что все точки одной орбиты группы, порожденной восточным сдвигом E и северным сдвигом N, «совпадают».

Путь лисы, рыскающей по полям Айовы от фермы к ферме, представляет собой извилистую кривую. После склейки мы можем наблюдать тот же путь на торе, но теперь, поскольку все фермы совпадают (или, если хотите, ферма всего одна), в тот момент, когда лиса перебегает границу между соседними фермами, ее путь на торе возвращается на ту же ферму, оказываясь в симметричной точке на противоположной стороне поля. Любой путь, который на равнине Айовы вел от одного фермерского дома к другому, теперь ведет от нашего единственного дома к нему же самому. Интересная задача – выяснить, сколько существует различных таких путей.

В рассказе великого аргентинского писателя Хорхе Луиса Борхеса «Вавилонская библиотека» замечательно описан трехмерный аналог такой бесконечно повторяющейся вселенной. Согласно Борхесу, «Вселенная – некоторые называют ее Библиотекой» – состоит из несметного числа одинаковых шестигранных галерей. Четыре из шести стен каждой галереи заняты пятью длинными полками, а оставшиеся две стены узкими коридорами соединены с другими галереями, идентичными первой и всем остальным. Винтовые лестницы уходят резко вниз и взмывают вверх к отдаленным областям. По словам Борхеса, «Библиотека – это шар, точный центр которого находится в одном из шестигранников, а поверхность – недосягаема». Хотя нам не удалось воспроизвести с математической точностью соединение этих шестигранных галерей, но созданный Борхесом образ бесконечного повторения во вселенной, состоящей из неотличимых комнат, захватывает и тревожит воображение.

Более сложные группы симметрий приводят не только к более сложным мозаикам, но и к более сложным поверхностям. Имея произвольный узор из плиток, инвариантный относительно движений из некоторой группы симметрий, мы можем попытаться использовать элементы группы как инструкции по склейке, а именно взять начальную плитку и склеивать две ее стороны каждый раз, когда в группе найдется преобразование, переводящее точки одной стороны в точки другой. Склеивая стороны таким образом, мы получаем некоторую поверхность. Ее можно считать моделью вселенной, в которой мы, как доктор Стрелкин, не умеем различать симметричные точки. В упражнении 1 мы предлагаем вам исследовать, что получится, если попробовать склеить шестиугольные плитки, используя симметрии узора на полу ванной комнаты.

Сопряжения, или Как сохранить положение вещей, изменив точку зрения

Осталось рассмотреть последнее связующее звено между геометрией замощений и алгебраическим формализмом теории групп. Пусть у нас есть два рисунка, состоящих из одного и того же набора плиток, причем известно преобразование, связывающее эти рисунки. Иными словами, имеется отображение S, которое переводит набор плиток, замощающих один пол, в набор плиток, замощающих другой пол. Мы хотим связать симметрии плиток первого пола с симметриям плиток второго пола. На рисунке 3 слева вы видите замощение

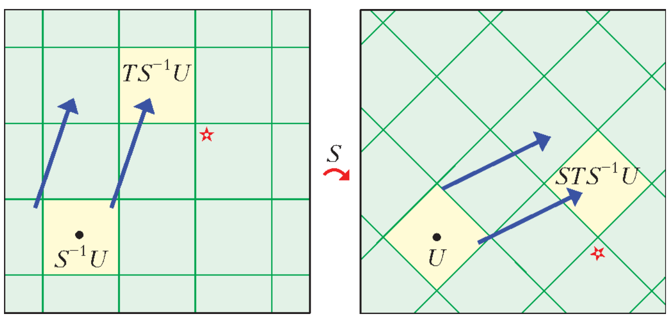

Рис.3. Два замощения квадратными плитками: слева стороны плиток идут по горизонтали и вертикали, а справа рисунок повернут на 45°

пола квадратными плитками, а справа – то же самое замощение на другом полу, повернутое на $45°$ относительно первого, так что стороны плиток идут не горизонтально, а по диагонали. Таким образом, в этом случае S есть поворот на $45°$. Если мы знаем симметрии первого замощения, то должен найтись и способ определить симметрии второго, не повторяя все выкладки с самого начала.

Пусть T – симметрия левого замощения. Мы хотим найти преобразование, которое действует в точности как S, будучи примененным к правому рисунку. Обозначим новое отображение через $\hat{T}$. То, что мы делаем, можно понимать как смену точки зрения: преобразование S переносит все в новую систему координат. Это означает, что каждая точка P на левой картинке заменяется точкой $S(P)$ на правой. Чтобы выяснить, как новое отображение $\hat{T}$ действует на плитку U, сначала применим S^{-1}, чтобы перевести плитку обратно в систему координат левого рисунка, затем подействуем на нее исходным преобразованием T и наконец применим S, чтобы вернуться в систему координат правого рисунка. Итак, мы последовательно применили преобразования S^{-1}, T и S и тем самым вывели формулу

$$\hat{T} = STS^{-1}.$$

Эту формулу, хотя она и выглядит сложновато, стоит хорошо продумать. Отображение $\hat{T}$ называется **сопряженным** с T. С геометрической точки зрения оно ведет себя так же, как T, с учетом того, что исходная система координат изменилась под действием так называемого **сопрягающего отображения** S.

На рисунке 3 преобразование T – это сдвиг в направлении $(1;\ 2)$, а преобразование S – поворот на $45°$ по часовой стрелке относительно начала координат $(0;\ 0)$. Из рисунка должно быть ясно, что сопряженное преобразование $\hat{T}$ также является сдвигом. Разница в том, что направление сдвига повернулось на $45°$ по часовой стрелке. В примечании 2 мы проверяем, согласуется ли этот результат с нашей формулой $\hat{T} = STS^{-1}$.

Сформулируем несколько общих принципов. Пусть S – произвольный сдвиг, поворот или отражение и $\hat{T} = STS^{-1}$. Тогда

- если T – произвольный сдвиг, переводящий начало координат 0 в точку P, то $\hat{T}$ – сдвиг, переводящий $S(0)$ в $S(P)$;
- если T – поворот относительно точки P, то $\hat{T}$ – поворот относительно точки $S(P)$ на тот же угол;
- если T – отражение относительно зеркала M, то $\hat{T}$ – отражение относительно зеркала $S(M)$.

Примечание 2. Проверка формулы для сопряженного преобразования

Чтобы убедиться в справедливости формулы $\hat{T} = STS^{-1}$ для примера на рисунке 3, сначала надо найти формулу для сопрягающего отображения S. К счастью, в рамке на странице 11 уже выписаны формулы для всех основных симметрий. Нам нужна формула для поворота на угол $\theta = 45°$. Применяя теорему Пифагора к треугольнику с углами $90°$, $45°$ и $45°$, нетрудно убедиться, что $\cos 45° = 1/\sqrt{2} = \sin 45°$. Таким образом, мы имеем следующие формулы:

$$T(x, y) = (x+1, y+2),$$

$$S(x, y) = \left((x+y)/\sqrt{2}, (-x+y)/\sqrt{2}\right),$$

$$S^{-1}(x, y) = \left((x-y)/\sqrt{2}, (x+y)/\sqrt{2}\right).$$

Теперь сделаем глубокий вдох и приступим к выкладкам:

$$\begin{aligned}\hat{T}(x, y) &= STS^{-1}(x, y) = \\ &= ST\left((x-y)/\sqrt{2}, (x+y)/\sqrt{2}\right) = \\ &= S\left((x-y)/\sqrt{2}+1, (x+y)/\sqrt{2}+2\right) = \\ &= \left(x+3/\sqrt{2}, y+1/\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

Как мы и предсказывали, оказалось, что $\hat{T}$ – это сдвиг на вектор $\left(3/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}\right)$, который является образом исходного вектора сдвига $(1;\ 2)$ под действием сопрягающего преобразования S!

Примечание 3. Алгебра сопряжений

Еще одной иллюстрацией того, как работает сопряжение, является выкладка

$$\hat{T}^{-1} = \left(STS^{-1}\right)^{-1} = \left(S^{-1}\right)^{-1} T^{-1}S^{-1} = ST^{-1}S^{-1},$$

которая показывает, что преобразование, обратное к сопряженному с T, есть сопряженное с обратным к T. Можете проверить, что если T – отражение, то

$$\hat{T}^{-1} = ST^{-1}S^{-1} = STS^{-1} = \hat{T};$$

иными словами, $\hat{T}$ обладает тем же алгебраическим свойством, что и T.

Сопряжение сохраняет и композицию отображений. Словами это можно выразить так: преобразование, сопряженное к композиции, есть композиция сопряженных. Но, вероятно, в этот момент читатель согласится с нами, что гораздо проще использовать язык формул:

$$S(TU)S^{-1} = \left(STS^{-1}\right)\left(SUS^{-1}\right).$$

Упражнения

1. *Склеиваем шестиугольные плитки.* Рассмотрим шестиугольное замощение, изображенное на рисунке 1. Вырежем один шестиугольник F и представим себе, что мы склеили три пары его параллельных сторон. Отображение T склеивает левое и правое ребра, S – правое верхнее и левое нижнее, а $T^{-1}S$ – левое верхнее и правое нижнее. Какая поверхность получится в результате? Может быть, вам удастся физически склеить ее из достаточно эластичного материала? Тогда набейте вашу новую диковинную игрушку каким-нибудь наполнителем, чтобы придать ей форму, сфотографируйте ее и пришлите нам фотографию!

2. *Шестиугольные плитки.* Мы упростили задачу о шестиугольных плитках на рисунке 1, пририсовав к ним красные звездочки, которые «нарушили симметрию» каждой плитки. Пусть теперь мы хотим выложить шестиугольный узор из обычных голубых плиток без звездочек. На сей раз узор обладает еще и вращательной симметрией, поэтому если мы будем помечать каждую плитку U симметрией, переводящей F в U, то в итоге U может получить несколько разных меток. Чтобы преодолеть эту трудность, можно разбить каждую плитку на шесть одинаковых треугольников, как показано на рисунке 4. Симметрия, соответствующая этому разбиению, есть поворот на $60°$ против часовой стрелки относительно центра плитки F. Мы обозначили один из шести треугольников через B, это будет наша новая базовая плитка, и пометили ее образы:

$$B,\ R(B),\ R^2(B),\ R^3(B),\ R^4(B),\ R^5(B).$$

Почему $R^6 = I$? Проверьте с помощью рисунка, что $R^{-1} = R^5$, $R^{-2} = R^4$ и т.д.

Убедитесь, что до любого другого треугольника, изображенного на рисунке, можно добраться с помощью композиций отображений R, S и T. Как получить верхний розовый треугольник? Поскольку симметрий, оставляющих неподвижным любой данный треугольник, не существует (кроме отражений, которые мы запретили, потому что они поворачивают шестиугольник неправильным образом), каждый треугольник помечен ровно одной симметрией – той, с помощью которой можно получить его из базовой плитки B. Такая плитка называется **фундаментальной областью** (или фундаментальной плиткой) для действия группы, порожденной преобразованиями S, T и R.

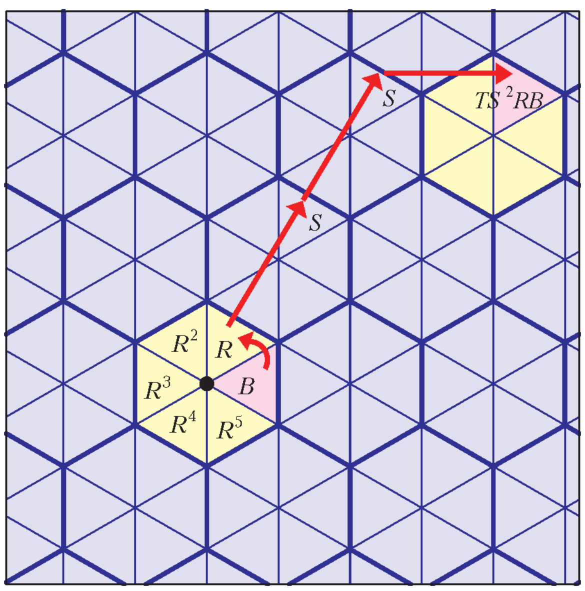

Рис.4. Замощение плоскости шестиугольниками, разбитыми на равносторонние треугольники. Отображение TS^2R переводит розовый треугольник, обозначенный через B, в розовый треугольник вверху справа

3. *Замощение двенадцатиугольниками.* Замощение, изображенное на рисунке 5, на самом деле обладает ровно теми

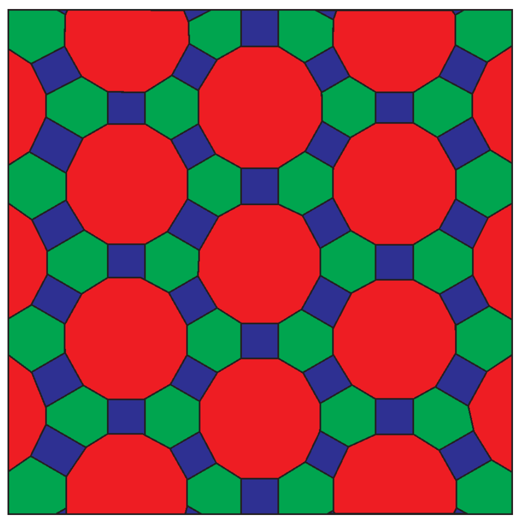

Рис. 5

же симметриями, что и замощение шестиугольниками на рисунке 4. Удастся ли вам выделить фундаментальную область? Сделав это, попытайтесь написать программу для замощения плоскости ее образами. Вам придется использовать один или более циклов, которые будут рисовать многочисленные копии этой фундаментальной области, составляя различные композиции симметрий.

Многие рисунки Эшера содержат необычные замощения, с которыми вы можете поэкспериментировать. Например, любопытно было бы найти фундаментальную область для широко известной прекрасной гравюры 1941 года «Раковины и морские звезды».