НАМ ПИШУТ

Шанс на решение задачи

Олимпиада в Астане была одной из самых сложных в истории международных олимпиад.

LI Международная математическая олимпиада («Квант» №6 за 2010 год)

Анализируя результаты решения геометрических задач на LI Международной математической олимпиаде, я обратил внимание на «ноль» участника, единственного в российской команде не решившего задачу 2. Вот условие этой задачи.

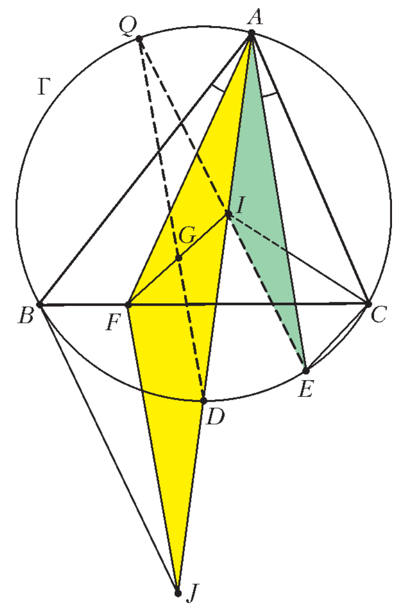
Задача. *Точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а Γ – окружность, описанная около этого треугольника. Прямая AI пересекает окружность Γ в точках A и D. Точка E выбрана на дуге BDC, а точка F – на стороне BC так, что*

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC .$$

Точка G – середина отрезка IF. Докажите, что прямые DG и EI пересекаются в точке, лежащей на окружности Γ.

«Профессиональный» олимпиадник, тем более на уровне Международной олимпиады, обречен на неудачу, если не владеет стандартными ситуациями, как шахматист – знанием дебютов или сыгранных знаменитостями партий. Бывают просто казусные ситуации: на IV Международной математической олимпиаде фигурировала в «чистом виде» формула Эйлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Сегодня невозможно представить, чтобы олимпиадный боец ее не знал. Готовясь к «бою», участники собирают заготовки, стандартные геометрические (да и не только) ситуации и приемы решения, которыми могут и обязаны воспользоваться. Знание их и дает тот шанс на решение предложенной Гонконгом задачи, о котором пойдет речь.

Очевидно, что требование задачи можно заменить доказательством равенства $\angle AEQ = \angle ADQ$ где Q – точка пересечения прямых DG и EI (см. рисунок). Сравнение этих углов показывает, что угол IDG менее «удобен», чем угол AEI, который является углом треугольника AEI. Наличие в условии точки G подсказывает введение вспомогательной точки J – центра вневписанной окружности треугольника ABC: по известной теореме, $ID = DJ$, чем в данном случае целесообразно воспользоваться, потому что GD – средняя линия треугольника IFJ.



И снова трудность: подсчет углов треугольников AIE и AFJ результата не даст, а вот доказать их подобие... Тем более что равные углы при вершине A есть: $\angle FAJ = \angle IAE$. Значит, надо доказать пропорциональность сторон:

$$\frac{AJ}{AE} = \frac{AF}{AI} . \qquad (1)$$

Первую пару подобных треугольников найти нетрудно: $\Delta ABF \sim \Delta AEC$, откуда

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{AE} . \qquad (2)$$

Второе подобие было описано в статье «Семейство формул Лагранжа» («Квант» №2 за 2011 г.): $\Delta ABJ \sim \Delta AIC$. Это тоже заготовка, потому что оба угла $\angle ABJ$ и $\angle AIC$ равны $90° + \frac{\angle B}{2}$, и треугольники подобны по двум углам. Следовательно,

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AC}{AJ} . \qquad (3)$$

Разделим почленно равенства (2) и (3): $\frac{AF \cdot AB}{AB \cdot AI} = \frac{AC \cdot AJ}{AE \cdot AC}$, получим $\frac{AJ}{AE} = \frac{AF}{AI}$ – равенство (1). Задача решена.

И.Кушнир