Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4–2011» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2229» или «Ф2235». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvantjournal.ru и phys@kvantjournal.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2229, М2230, М2232–М2235 предлагались на XXXII Турнире городов.

Задачи М2229–М2235, Ф2235–Ф2242

М2229. По кругу написаны 2010 чисел в таком порядке, что при движении по часовой стрелке числа поочередно то возрастают, то убывают. Докажите, что разность каких-то двух соседних чисел четна.

Б.Френкин

М2230. Грани выпуклого многогранника – подобные треугольники. Докажите, что многогранник имеет две пары равных граней (одну пару равных граней и еще одну пару равных граней).

В.Произволов

М2231. Решите в натуральных числах уравнение $x^x = y^{3y}$.

И.Богданов, В.Сендеров

М2232. В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечетное число главных дорог.

А.Шень

М2233. Дан остроугольный треугольник ABC; AA_1 BB_1 – его высоты. Из точки A_1 опустили перпендикуляры на стороны AC и AB, а из точки B_1 опустили перпендикуляры на стороны BC и BA. Докажите, что основания перпендикуляров образуют равнобокую трапецию.

Г.Фельдман

М2234. В пространстве с декартовой системой координат дан прямоугольный параллелепипед, вершины которого имеют целочисленные координаты. Его объем равен 2011. Докажите, что ребра параллелепипеда параллельны координатным осям.

М.Малкин

М2235. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 11 всем известных гениев. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает прием, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять 10 гениев, как бы ни действовала первая фирма?

А.Шаповалов

Ф2235. По прямой дороге с постоянной скоростью v едет автомобиль. В некоторый момент времени автомобиль приближается к неподвижному наблюдателю со скоростью u $(u < v)$. Через промежуток времени t после этого момента автомобиль оказывается ближе всего к наблюдателю. На каком расстоянии L от дороги находится наблюдатель?

А.Козлевич

Ф2236. При стрельбе из игрушечного оружия пластиковыми шариками было установлено, что в пенопласт плотностью 40 кг/м^3 шарики углублялись в среднем на 15 мм, если выстрелы производились с малого расстояния – меньше 10 см. Если стрелять с дальности 6 м, то шарики застревают в пенопласте в среднем на глубине 3 мм. На какую глубину в среднем будут погружаться шарики в пенопласт, если стрелять с расстояния 2 м? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости шарика, а сила сопротивления при движении шарика в пенопласте постоянна.

С.Найпер

Ф2237. Масса пружины распределена равномерно по ее длине, начальная длина равна 1 м. Пружина «поджата» однородно, т.е. длина всех ее витков начинает одинаково увеличиваться при приложении к концам пружины двух противоположно направленных и равных по величине сил, причем только если их величины не меньше 100 Н. При еще больших величинах сил изменение размеров пружины описывается законом Гука $k\Delta L = F$, где жесткость пружины $k = 500$ Н/м. Пружину потянули только за один конец вдоль ее оси с силой 200 Н. Считая, что эксперимент происходит в космосе, найдите установившуюся длину пружины.

В.Сергеев

Ф2238. Планета состоит из однородного жидкого вещества, ускорение свободного падения на ее поверхности равно g. Найдите давление в центре этой планеты и в точке внутри объема, от которой до точек на поверхности планеты минимальное расстояние в N раз меньше максимального расстояния. Собственного вращения планеты по отношению к далеким звездам нет, атмосфера на планете отсутствует.

С.Варламов

Ф2239. Полярники в Антарктиде пробурили в толстом слое льда, покрывающего землю, глубокую скважину и опустили в нее лампочку накаливания мощностью 1000 Вт и пластиковую трубку для откачивания жидкой воды, получающейся в результате таяния льда. Лампочка посылает свет равномерно по всем направлениям. Лед мутный, и свет целиком поглощается в слое небольшой толщины – меньше 1 см. На той глубине, где находится лампочка, в толще льда температура постоянна и равна -10 °С. Теплопроводность льда составляет $2{,}2$ Вт/(К·м). Через большое время размеры оттаявшей области, которая имеет форму шара (лампочка в его центре), установились. Каков радиус этого шара?

В.Славутинский

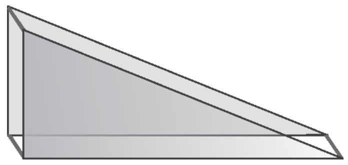
Ф2240. На уроках химии положено производить четырехкратный обмен воздуха за час (урок). Обеспечивается это с помощью вентиляции. Температура воздуха в классе должна быть не ниже $+20$ °С. Каждый школьник греет воздух, выделяя мощность 100 Вт. При каком количестве школьников в классе не потребуется дополнительного обогрева помещения, если температура воздуха снаружи $+15$ °С? Потерями тепла через стенки и окна можно пренебречь, объем воздуха в классе равен примерно 200 м^3.

Фольклор

Ф2241. На горизонтальном столе лежит открытая с двух концов тонкая стеклянная трубка – капилляр с диаметром отверстия менее 0,2 мм. Длина трубки 1 м. На стол пролили чернила, и один из концов трубки оказался в лужице чернил. Капилляр начинает втягивать в себя чернила, и в тот момент, когда заполнилась 1/10 часть длины трубки, скорость движения границы (чернила–воздух) в капилляре составила 1 см/с. Через какое время трубка окажется полностью заполненной чернилами?

А.Зильберман

Ф2242. В космосе находятся две одинаковые заряженные непроводящие и параллельные друг другу жесткие пластины треугольной формы. Чтобы они не соприкасались, между ними вблизи углов пластин, которые равны $30°$, $60°$ и $90°$, установлены три маленьких одинаковых непроводящих стерженька (см. рисунок). На поверхностях пластин равномерно распределены заряды $+3Q$ и $-2Q$. С какими силами сжаты стерженьки? Площади треугольников равны S, расстояние между пластинами (длина стерженька) много меньше их линейных размеров.



С.Дмитриев

Решения задач М2206–М2211, М2213 [1] Ф2220–Ф2227

М2206. *а) Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой машины. В некоторый момент на участке спохватились и послали своего лучшего полицейского на поимку угонщика, дав ему новую полицейскую машину. Однако полицейский не знал, ни когда машина была угнана, ни в какую сторону вдоль бесконечной в обе стороны дороги уехал угонщик. Сможет ли полицейский догнать угонщика? б) Решите ту же задачу, если от полицейского участка отходят бесконечные дороги в N направлениях.*

а) **Ответ.** Сможет.

Пусть полицейский выезжает в 12.00 и едет «вправо» в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал не позже 11.00 (т.е. едет 9 часов). Если полицейский еще не догнал угонщика, он разворачивается и едет «влево» в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал не позже 10.00 (поскольку скорость полицейского больше, это время конечно). Затем он разворачивается и едет «вправо» в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал не позже 9.00. И так далее.

б) **Ответ.** Сможет.

Обобщим стратегию, предложенную выше. Пусть полицейский выезжает в 12.00 и едет в первом направлении в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал по этому направлению не позже 11.00. Далее он разворачивается, едет до полицейского участка и далее едет по второму направлению в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот

[1] *Решению задачи М2212 будет посвящена отдельная заметка в одном из ближайших номеров журнала.*

выехал во втором направлении не позже 10.00. Продолжаем аналогично, меняя направления дорог от полицейского участка по циклу $1-2-\ldots-N-1-2\ldots$, и каждый раз «фору» по времени увеличивая на 1 час. Интересно, что можно догнать угонщика даже в том случае, если изначально от полицейского участка отходят дороги в бесконечном числе направлений, занумерованных натуральными числами. Читатель может подумать, как действовать полицейскому в таком случае.

Г.Гальперин

M2207. *Квадратная доска разделена на n^2 клеток $n-1$ горизонтальными и $n-1$ вертикальными прямыми. Клетки раскрашены в шахматном порядке. Известно, что на одной диагонали все клетки черные и квадратные. Докажите, что общая площадь всех черных клеток не меньше общей площади всех белых.*

Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ длины сторон квадратных диагональных клеток. Тогда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – это ширины полос, на которые вертикальные (или горизонтальные) прямые разбивают доску. Заметим, что площадь клетки на пересечении i-й горизонтали и j-й вертикали равна $x_i x_j$, причем если $i+j$ четно, то клетка черная, иначе – белая.

Если в произведении $(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots)^2$ раскрыть скобки, то получится сумма n^2 слагаемых вида $\pm x_i x_j$, где знак «+» выбирается, если $i+j$ четно, а знак «−» выбирается, если $i+j$ нечетно. Таким образом, неотрицательная величина $(x_1 - x_2 + x_3 - \ldots)^2$ равна разности между суммами площадей всех черных и всех белых клеток.

П.Кожевников

M2208. *Имеется многоугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2.*

Каждая сторона меньше суммы остальных, поэтому сумма остальных больше полупериметра. Значит, заменив каждый знаменатель на полупериметр, мы увеличим сумму. Но теперь эта сумма стала равна 2.

Л.Медников, А.Шаповалов

M2209. *На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее N^2 встреч.*

Пусть S – длина трека, $v_1 < v_2 < \ldots < v_{2N}$ – скорости велосипедистов, $u = \min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_{2N} - v_{2N-1}\}$. Велосипедисты с номерами $i < j$ встречаются через промежутки времени $\dfrac{S}{v_j - v_i}$. Ясно, что самый большой из промежутков равен $\dfrac{S}{u}$, и нам придется ждать до конца этого промежутка, чтобы каждый велосипедист встретился со всеми остальными. Поскольку $v_j - v_i \ge (j-i)u$, то за время $\dfrac{S}{u}$ велосипедисты с номерами i и j успеют встретиться не менее $j-i$ раз. Рассмотрим k-го велосипедиста, где $k \le N$. У него будет не менее $1+2+\ldots+(k-1)$ встреч с теми, у кого скорость меньше, и не менее $1+2+\ldots+(2N-k)$ встреч с теми, у кого скорость больше. Итого, будет не менее

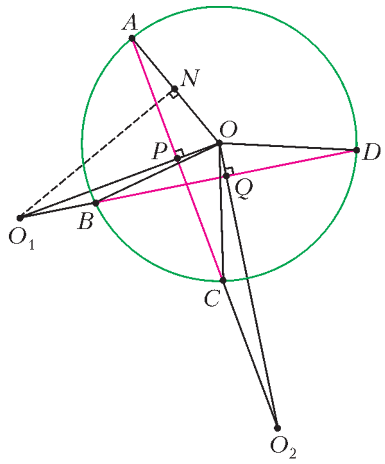
$$
\begin{aligned}
&(1+2+\ldots+(k-1)) + \\
&\quad + (1+2+\ldots+N+(N+1)+\ldots+(2N-k)) \ge \\
&\quad \ge (1+2+\ldots+(k-1)) + \\
&\quad + (1+2+\ldots+N+(N-1)+\ldots+k) = \\
&\quad = (1+2+\ldots+(k-1)+k+\ldots+(N-1)) + \\
&\quad + (1+2+\ldots+N) = N + (1+(N-1)) + \\
&\quad + (2+(N-2)) + \ldots + ((N-1)+1)) = N^2
\end{aligned}
$$

встреч.

При $k \ge N+1$ оценка на количество встреч получается так же.

Б.Френкин

M2210. *Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причем точка O не лежит ни на одной из диагоналей этого четырехугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника AOC лежит на прямой BD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BOD лежит на прямой AC.*



Пусть R – радиус окружности с центром O, P – середина AC, Q – середина BD, O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников AOC и BOD соответственно (см. рисунок). Так как треугольники AOC и BOD – равнобедренные, то O_1 и O_2 лежат на прямых OP и OQ соответственно. Опустим перпендикуляр O_1N на радиус OA. Ясно, что N – это середина отрезка OA. Из подобия треугольников AOP и O_1ON получаем $OP : OA = ON : OO_1$, т.е. $OP \cdot OO_1 = \dfrac{R^2}{2}$. Аналогично, $OQ \cdot OO_2 = \dfrac{R^2}{2}$. Поэтому $OP : OQ = OO_2 : OO_1$, значит, треугольники OPO_2 и OQO_1 подобны (угол при вершине O у них общий). По условию угол OQO_1 прямой, следовательно, и угол OPO_2 прямой, что и требовалось доказать.

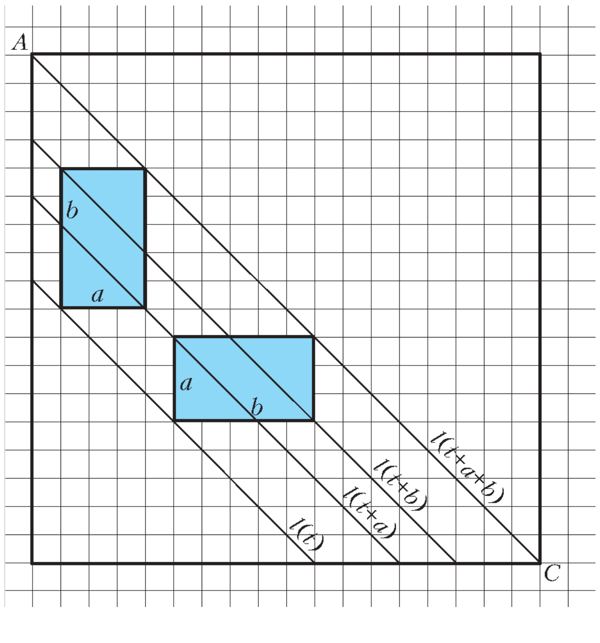
Замечание. Прямые AC и BD – *поляры* соответственно точек O_1 и O_2 относительно окружности радиуса $\frac{R}{\sqrt{2}}$ с центром O. Поэтому утверждение задачи следует из известной теоремы: если точка X лежит на поляре точки Y, то точка Y лежит на поляре точки X. Фактически выше приведено одно из доказательств этой теоремы.

Л.Медников, А.Шаповалов

М2211*. *Квадрат ABCD разрезан на одинаковые прямоугольники. Покрасим все прямоугольники, которые разрезает диагональ AC. Докажите, что AC делит площадь покрашенной части квадрата пополам.*

Пусть сторона квадрата равна d, а прямоугольники имеют размер $a \times b$, $a \le b$. Введем прямоугольную систему координат так, что вершины A и C – это точки $(0,\ d)$ и $(d,\ 0)$. Докажем следующее **утверждение**: *количество прямоугольников, лежащих целиком под диагональю AC, не зависит от разбиения квадрата на прямоугольники (т.е. зависит только от чисел a, b, d).* Доказав это, можем поменять ролями вершины B и D и получить, что это количество равно количеству прямоугольников, лежащих целиком над диагональю. Из равенства количеств прямоугольников, лежащих целиком под диагональю и целиком над диагональю сразу будет следовать утверждение задачи.

Доказательство утверждения. Обозначим через $l(c)$ отрезок прямой $x + y = c$ (т.е. прямой, параллельной диагонали AC), по которому она пересекает квадрат ($c \in [0, 2d]$). Для каждого прямоугольника Π введем параметр $t(\Pi)$ – сумму абсциссы и ординаты его левой нижней вершины. Как легко видеть, прямоугольник с параметром $t(\Pi) = t$, независимо от того, как он расположен, пересекает отрезок $l(c)$ только в том случае когда $c \in [t, t + a + b]$ (см. рисунок). При этом если $c \in [t, t + a]$, то прямоугольник пересекает $l(c)$ по отрезку длины $\sqrt{2}(c - t)$; если $c \in [t + a, t + b]$, то прямоугольник пересекает $l(c)$ по отрезку длины $\sqrt{2}a$; если $c \in [t + b, t + a + b]$, то прямоугольник пересекает



$l(c)$ по отрезку длины $\sqrt{2}(t + a + b - c)$. Ясно, что Π лежит ниже диагонали AC тогда и только тогда, когда $t(\Pi) \le d - a - b$. Занумеруем все прямоугольники разбиения в порядке возрастания параметров: $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, так что $t(\Pi_1) \le t(\Pi_2) \le \ldots \le t(\Pi_n)$. Покажем, что упорядоченный набор параметров $t(\Pi_1), t(\Pi_2), \ldots, t(\Pi_n)$ не зависит от способа разбиения квадрата на прямоугольники (т.е. зависит только от d, a, b). Отсюда будет следовать нужное утверждение о том, что количество прямоугольников Π, для которых $t(\Pi) \le d - a - b$, не зависит от способа разбиения.

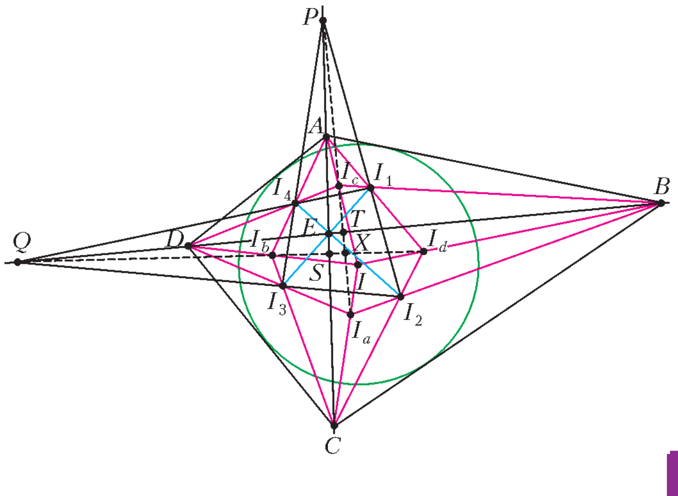
Рассуждаем по индукции. Очевидно, $t(\Pi_1) = 0$. Предположим, что $t(\Pi_1), t(\Pi_2), \ldots, t(\Pi_k)$ нам известны. Тогда для каждого $c \in [0, 2d]$ известна сумма длин отрезков, по которым прямоугольники $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ пересекают $l(c)$. Тем самым известно, покрывают ли эти прямоугольники целиком отрезок $l(c)$. Но тогда следующий по величине параметр $t(\Pi_{k+1})$ однозначно должен равняться максимальному c, для которого соответствующий отрезок $l(c)$ целиком покрыт прямоугольниками $t(\Pi_1), t(\Pi_2), \ldots, t(\Pi_k)$.

Замечание. Можно доказать (в том числе используя идею приведенного решения), что разбиение квадрата на прямоугольники $a \times b$ возможно, только если отношение $\frac{a}{b}$ рационально.

П.Кожевников, Л.Медников, А.Шаповалов

М2213*. *В описанном четырехугольнике ABCD диагонали пересекаются в точке E, через I_a, I_b, I_c, I_d обозначены центры вписанных окружностей треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. Докажите, что точка пересечения прямых I_aI_c и I_bI_d равноудалена от центров окружностей, вписанных в треугольники ABE, BCE, CDE, DAE.*

Так как четырехугольник $ABCD$ описанный (см. рисунок), то окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD, касаются BD в одной точке T (действительно, расстояния от точки B до точек касания с окружностями, вписанными в треугольники ABD и CBD, равны $\frac{AB + BD - AD}{2}$ и $\frac{CB + BD - CD}{2}$ соответственно; но эти величины равны, так как $AD + BC = AB + CD$). Тогда $T = I_aI_c \cap BD$ и $I_aI_c \perp BD$.



Аналогично, пусть $S = I_bI_d \cap AC$, тогда $I_bI_d \perp AC$. Обозначим через I_1, I_2, I_3, I_4 центры окружностей, вписанных в треугольники ABE, BCE, CDE и DAE соответственно, а через I – центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$. Пусть $P = AC \cap I_aI_c$ (если AC не параллельна I_aI_c), $Q = BD \cap I_bI_d$ (если BD не параллельна I_bI_d). Так как точки $I = AI_c \cap CI_a$, $I_d = AI_1 \cap CI_2$ и $B = I_1I_c \cap I_2I_a$ лежат на одной прямой (биссектрисе угла ABC), то по теореме Дезарга прямая I_1I_2 проходит через P либо параллельна прямым AC и I_aI_c. Аналогично, I_3I_4 проходит через P либо параллельна прямым AC и I_aI_c. Таким же образом I_2I_3 и I_4I_1 проходят через Q либо параллельны прямым BD и I_bI_d.

Нам потребуется следующая известная

Лемма. *Пусть E – точка на стороне треугольника ABC; I_1, I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABE и CBE; S – точка касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со стороной AC. Тогда точки I_1, I_2, E, S лежат на одной окружности.*

Доказательство. Так как EI_1 и EI_2 – биссектрисы углов AEB и BEC, то $\angle I_1EI_2 = 90°$. Как известно, через точку S проходит общая внутренняя касательная SZ к окружностям, вписанным в треугольники ABE и CBE (это утверждение является частным случаем задачи 2 – для вырожденного описанного четырехугольника $ABCS$ – из статьи «Описанные четырехугольники и ломаные» в «Кванте» №1 за 2010 г.). Тогда SI_1 и SI_2 – биссектрисы углов ASZ и CSZ, значит, $\angle I_1EI_2 = 90°$. Таким образом, точки E и S лежат на окружности с диаметром I_1I_2. Лемма доказана.

Вернемся к нашей задаче. Согласно лемме, точки I_1, I_2, E, S лежат на одной окружности. Аналогично, I_3, I_4, E, S лежат на одной окружности. Отсюда $PI_2 \cdot PI_1 = PE \cdot PS = PI_3 \cdot PI_4$, поэтому точки I_1, I_2, I_3, I_4 лежат на одной окружности ω. По свойству полярного соответствия (см., например, статью «Полюс и поляра относительно окружности» в «Кванте» № 7 за 1986 г.), точки $Q = I_2I_3 \cap I_4I_1$ и $E = I_1I_3 \cap I_2I_4$ лежат на поляре P (относительно ω), значит, прямая $QE = BD$ – это поляра точки P. Так как прямая $PT = I_aI_c \perp BD$, то прямая I_aI_c содержит центр окружности ω. Аналогично, I_bI_d содержит центр ω. Итак, $X = I_aI_c \cap I_bI_d$ – это центр окружности ω.

Замечание. Отметим, что данная задача – это усиление задачи М1524 И.Вайнштейна, в которой утверждается, что точки I_1, I_2, I_3, I_4 лежат на одной окружности.[2]

Н.Белухов

[2] *В «Задачнике «Кванта» была опубликована еще одна задача И.Вайнштейна (М1495), в которой устанавливается соотношение $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{4}$ для радиусов r_1, r_2, r_3, r_4 окружностей, вписанных в треугольники ABE, BCE, CDE, DAE. На самом деле это соотношение верно для любых окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ таких, что пары (ω_1, ω_2) и (ω_3, ω_4) имеют общий центр гомотетии с положительным коэффициентом и пары (ω_2, ω_3) и (ω_4, ω_1) имеют общий центр гомотетии с положительным коэффициентом. В рассматриваемой конструкции можно усмотреть много других интересных фактов. (Прим.ред.)*

Ф2220. *Во время ремонтных работ на МКС космонавт, находясь снаружи, пользовался молотком. После одного неудачного удара головная часть молотка отломилась и улетела со скоростью 20 м/с относительно станции (эта скорость перпендикулярна плоскости орбиты станции). Оказалось, что сразу после этого удара и МКС и «новый спутник» имели относительно Земли одинаковые по величине скорости порядка 8 км/с, которые были горизонтальными для наблюдателя на Земле, над головой которого произошло описываемое происшествие. На какое максимальное расстояние удалятся друг от друга МКС и «новый спутник» за первые полчаса его самостоятельного полета?*

В системе отсчета с началом в центре Земли и с осями, направленными на далекие звезды, орбиты станции и «нового спутника» будут окружностями с одинаковыми радиусами, которые пересекаются в двух точках: в месте, где они разлетелись, и на противоположной стороне Земли на той же высоте. Периоды обращения низколетающих спутников, т.е. находящихся на высотах, существенно меньших радиуса Земли, в такой системе отсчета составляют примерно 1,5 часа. Это означает, что через 1/4 периода, т.е. примерно через 22,5 минуты, расстояние между объектами будет самым большим. Плоскости орбиты составляют между собой угол, приблизительно равный 20/8000 (радиан). Отсюда следует ответ:

$$s_{\max} \approx R_З \frac{20}{8000} = 16 \text{ км}.$$

Л.Молотков

Ф2221. *В далеком космосе оказался школьный динамометр, корпус которого имеет массу M = 20 г, а пружина имеет массу m = 10 г. За крючок, укрепленный на корпусе, тянут с силой F_1 = 5 Н, направленной вдоль оси пружины, а за крючок, находящийся на свободном конце пружины, тянут с силой F_2 = 2 Н, направленной в противоположную сторону. Что будет показывать динамометр, т.е. напротив какого деления на его шкале остановится индикаторная стрелка?*

Если под действием двух одинаковых по величине и противоположно направленных сил, приложенных к концам пружины, она растягивается на Δx, то при наличии только одной силы, приложенной только к одному концу пружины, она растягивается на $\Delta x/2$. Таким образом, если жесткость пружины равна k и ее тянут в противоположные стороны с силами f_1 и f_2, то длина пружины увеличивается на $(f_1 + f_2)/(2k)$. В данном случае корпус и пружина движутся с ускорением, поэтому на конец пружины, прикрепленный к корпусу динамометра, действует сила, равная

$$F_1 - \frac{(F_1 - F_2)M}{M + m} = 3\text{Н}.$$

В результате удлинение пружины определяется двумя растягивающими ее силами: 2 Н и 3 Н, т.е. динамометр будет «показывать» силу

$$f = \frac{2\ \text{Н} + 3\ \text{Н}}{2} = 2{,}5\ \text{Н}.$$

В.Сергеев

Ф2222. *На наклонной плоской поверхности, составляющей угол $\alpha = 60°$ с горизонтом, находится небольшая плоская шайба массой $m = 0,5$ кг, прикрепленная легкой нитью длиной $L = 1$ м к точке на этой поверхности. Шайбу толкают вдоль поверхности так, что нить оказывается натянутой и скорость шайбы перпендикулярна нити. В некоторый момент шайба имеет горизонтальную скорость $v = 2$ м/с. Каково по величине ускорение шайбы в этот момент? Каким может быть натяжение нити в этот момент? Коэффициент трения шайбы о поверхность $\mu = 0,6$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.*

Поскольку скорость шайбы в рассматриваемый момент времени горизонтальна, шайба находится либо в верхней, либо в нижней точке окружности, по которой движется. Поперечная, по отношению к скорости, составляющая ускорения равна

$$a_1 = \frac{v^2}{L} = 4\ \text{м/с}^2.$$

Эта составляющая ускорения в верхней точке не может быть меньше $g\sin\alpha = 8{,}7\ \text{м/с}^2$, следовательно, шайба проходит нижнюю точку. Продольная составляющая ускорения шайбы обеспечивается силой трения и равна

$$a_2 = \mu g\cos\alpha = 3\ \text{м/с}^2.$$

Полное ускорение имеет величину

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 5\ \text{м/с}^2.$$

Натяжение нити в этот момент равно

$$F = \frac{mv^2}{L} + mg\sin\alpha = 6{,}35\ \text{Н}.$$

С.Дмитриев

Ф2223. *Парафиновые свечи имеют цилиндрическую форму с площадью поперечного сечения $S = 1$ см^2 и длиной $L = 20$ см. Если свеча горит в подсвечнике, то время ее горения равно $T = 3$ ч. На одном конце такой свечи поджигают фитиль, а к другому концу прикрепляют стальной шарик диаметром $D = 7$ мм. Свечу опускают в воду при температуре 4 °С, и она некоторое время плавает, не касаясь дна сосуда. Сколько времени она будет гореть в этом случае? Плотность парафина $\rho_\text{п} = 0,9$ г/см^3, плотность стали $\rho_\text{с} = 7,8$ г/см^3, плотность воды $\rho_\text{в} = 1,0$ г/см^3.*

Если считать, что скорость горения плавающей свечи и скорость горения свечи в подсвечнике совпадают, то в момент окончания горения ее средняя по объему плотность должна сравняться с плотностью воды:

$$(L - x)S\rho_\text{п} + \frac{\pi D^3}{6}\rho_\text{с} = \rho_\text{в}\left((L - x)S + \frac{\pi D^3}{6}\right).$$

Отсюда находим длину сгоревшей части свечи x:

$$x = L - \frac{\pi D^3(\rho_\text{с} - \rho_\text{в})}{6S(\rho_\text{в} - \rho_\text{п})} = 7{,}8\ \text{см}.$$

Искомое время горения t находим, исходя из одинаковости скорости горения:

$$\frac{L}{T} = \frac{x}{t},\ \text{откуда}\ t = \frac{Tx}{L} = 1\ \text{ч}\ 10\ \text{мин}.$$

Замечание. На самом деле парафин, контактирующий с холодной водой, не плавится, поэтому образуются тонкие парафиновые стенки и свеча продолжает гореть и по прошествии 1 часа 10 минут, напоминая по форме маленькую пустую пробирку с огоньком внутри.

В.Свечкин

Ф2224. *Экспериментатор Вася приобрел очень качественный термос (сосуд, который исключает теплообмен содержимого с окружающей средой) емкостью 1 л, теплоемкость стенок которого 100 Дж/К. Начальная температура стенок пустого термоса 20 °С (как в комнате). Вася последовательно наливает в термос 1 г воды при температуре 1 °С, затем 2 г воды при температуре 2 °С, потом 3 г воды при температуре 3 °С… и так далее вплоть до заполнения термоса. Какой будет установившаяся температура содержимого термоса?*

Когда Вася налил в термос 44-ю порцию, в термосе оказалось 990 мл воды. Последняя порция имеет температуру 45 °С, но в термос попадает только 10 мл воды. Из уравнения теплового баланса находим установившуюся температуру содержимого термоса t:

$$t = \frac{100\cdot 20 + 4{,}2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 44^2 + 10\cdot 45\right)}{100 + 4{,}2(1 + 2 + 3\ldots + 44 + 10)}\ °\text{С} = 29{,}6\ °\text{С}.$$

Э.Васин

Ф2225. *Легкое кольцо из тонкой проволоки висит на мыльной пленке, которая удерживается рамкой в форме окружности. Масса кольца m, его радиус R, коэффициент поверхностного натяжения пленки σ, диаметр рамки $D > 2R$. Рамка и кольцо горизонтальны, их центры находятся на одной вертикали. Каково расстояние от плоскости кольца до плоскости рамки? Массой пленки можно пренебречь в сравнении с массой кольца. Выполняется условие «легкости» кольца: $mg \ll \sigma R$.*

Касательная плоскость к любому участку мыльной пленки, находящемуся на расстоянии x от вертикальной линии, проходящей через центры кольца и рамки, наклонена к горизонту на угол α, для которого выполняется соотношение

$$4\pi\sigma x\sin\alpha = mg.$$

Неравенство, указанное в условии задачи, подсказывает, что этот угол всюду мал в сравнении с 1, т.е. можно считать, что $\alpha = \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$. При увеличении расстояния от указанной оси на dx край пленки приподнимается на

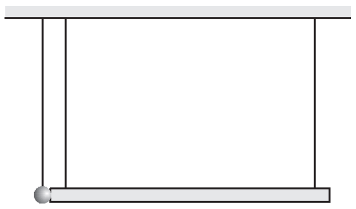
$$dh = dx\operatorname{tg}\alpha = \frac{mg}{4\pi\sigma}\frac{dx}{x}.$$

Суммирование (или интегрирование) дает ответ:

$$h = \frac{mg}{4\pi\sigma} \ln \frac{D}{2R} .$$

С.Кольцов

Ф2226. *Маленький шарик и тонкий непроводящий стержень большой длины L, массы которых M одинаковы, подвешены к потолку на нитях одной и той же и очень большой длины R ($R \gg L$). Нити позволяют шарику и стержню двигаться только в одной вертикальной плоскости. Сначала шарик и стержень не были заряжены и висели так, что почти соприкасались друг с другом, причем шарик находился возле одного из концов стержня (см. рисунок). Шарику и стержню сообщили одинаковые электрические заряды Q, причем заряд на стержне распределили равномерно по его длине. На каком расстоянии x окажутся в положении равновесия шарик и тот конец стержня, возле которого шарик находился вначале? Считайте, что диаметр шарика много меньше x, а x много меньше длины стержня L.*



Если шарик и стержень имеют одинаковые массы, то в положении равновесия они будут находиться на одном горизонтальном уровне, т.е. углы наклона нитей, на которых висят предметы, будут по величине одинаковыми. Силы электростатического отталкивания шарика и стержня в положении равновесия уравновешиваются горизонтальными составляющими сил натяжения нитей. Пусть расстояние x между шариком и ближайшим к нему концом стержня изменилось на малую величину Δx, тогда потенциальная энергия электрического взаимодействия шарика и стержня тоже изменится. Из закона сохранения энергии

$$F(x)\Delta x = \frac{Q\Delta x}{L} k \left(\frac{Q}{x} - \frac{Q}{L+x} \right)$$

находим силу электростатического отталкивания:

$$F(x) = \frac{kQ^2}{x(L+x)} = \frac{kQ^2}{xL} .$$

Здесь учтено, что $x \ll L$, а k – это электрическая постоянная. Пренебрегая размерами шарика в сравнении с величиной расстояния x между шариком и стержнем в положении равновесия, получаем условие равновесия шарика:

$$\frac{xMg}{2R} = \frac{kQ^2}{xL} .$$

Отсюда находим

$$x = Q\sqrt{\frac{2Rk}{MgL}} .$$

Д.Шариков

Ф2227. *Связь между эффективным напряжением U на лампе накаливания и током I, текущим через нее, дается формулой $I \sim U^{3/5}$. Две лампы с номинальными напряжениями 220 В и номинальными мощностями 40 Вт и 100 Вт включили последовательно в сеть напряжением 220 В. Каково падение напряжения на лампе меньшей номинальной мощности? (Разрешается пользоваться калькулятором.)*

Обозначим коэффициенты пропорциональности между I и $U^{3/5}$ для первой и второй лампочек символами k_1 и k_2 соответственно. Их отношение равно $k_1 : k_2 = 40 \text{ Вт} : 100 \text{ Вт} = 0,4$. Суммарное падение напряжения на лампочках равно 220 В. Отсюда получаем

$$I^{5/3} \left(\frac{1}{k_1^{5/3}} + \frac{1}{k_2^{5/3}} \right) = 220 \text{ В} ,$$

и

$$U_1 = \frac{I^{5/3}}{k_1^{5/3}} = \frac{220 \text{ В}}{\left(\frac{1}{k_1^{5/3}} + \frac{1}{k_2^{5/3}} \right) k_1^{5/3}} = \frac{220 \text{ В}}{1 + 0,4^{5/3}} \approx 181 \text{ В} .$$

С.Варламов