«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №3)

1. Второго сорта. От косточки толку нет, поэтому выгоднее покупать сливы, у которых мякоть дешевле. В килограмме слив первого сорта мякоти будет $2/3$ килограмма, поэтому 1 кг мякоти стоит $150 \cdot \frac{3}{2} = 225$ рублей. Мякоть второго сорта стоит $100 \cdot 2 = 200$ рублей за 1кг, поэтому выгоднее покупать сливы второго сорта.

2. Алеша или Боря. Наш четырехугольник не может быть прямоугольником, так как тогда неправы двое – Алеша и Вася. Значит, в четырехугольнике есть тупой угол (если бы все углы были острыми, то сумма была бы меньше чем $90° \cdot 4 = 360°$). Тогда при одном из разрезаний получается тупоугольный треугольник, т.е. Вася заведомо прав. На рисунке 1 приведены примеры, когда неправ только Алеша и когда неправ только Боря.

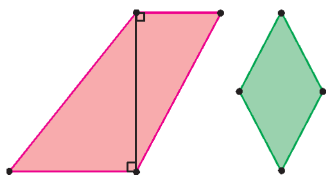

Рис. 1

3. На рисунке 2 приведен один из возможных заборов. Есть много других вариантов.

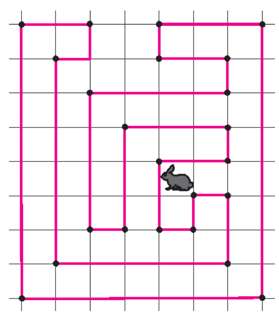

Рис. 2

4. Пусть в верхней половине маленьких часов всего на x минут песка. Чтобы отмерить 8 минут, можно действовать так.

1) Перевернуть большие часы.
2) Через x минут перевернуть и те, и другие часы.
3) Еще через x минут перевернуть большие часы.
4) Через $2 - x$ минут снова перевернуть большие часы и подождать еще $2 - x$ минут

Всего от начала прошло 4 минуты, а песок в обоих часах весь в нижней половине. Оставшиеся 4 минуты можно отмерить при помощи 2-минутных часов.

5. Пять кубиков.

Указание. Посмотрите на змейку спереди (рис.3,*а*) и сверху (рис.3,*б*). Для удобства концы змейки покрашены синим и красным цветом. Они находятся на соседних по высоте уровнях, а в проекции на горизонтальную плоскость между ними расстояние 4 клетки. Поэтому всего потребуется не менее 5 кубиков, чтобы замкнуть змейку. Убедитесь, что пяти кубиков хватает.

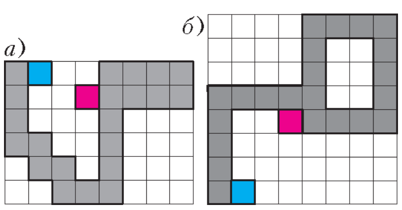

Рис. 3

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. 13 букетов. Всего у продавца 65 цветов, поэтому больше 13 букетов он при всем желании не продаст. Пример для 13 букетов приведен в таблице.

Гвоздики			Число букетов
Красные	Розовые	Белые	
1	1	3	8
1	2	2	1
1	3	1	2
2	2	1	2

17. Примерно 150000. Рассмотрим промежуток в 1500 дней. За это время волосы на голове сменятся (почти все волосы, которые росли до начала промежутка, выпадут). В каждый из дней появится примерно по 100 новых волос, и почти все они доживут до конца срока. Значит, в конце их будет примерно 150000.

18. $N = 4$. Если ладей больше 4, то свободными от них будут не более трех горизонталей и трех вертикалей, т.е. клеток, свободных от боя ладей, не более 9. Поэтому на доске уже не могут расположиться 5 слонов и 5 коней. Пример расположения 4 ладей, 4 слонов и 4 коней приведен на рисунке 4.

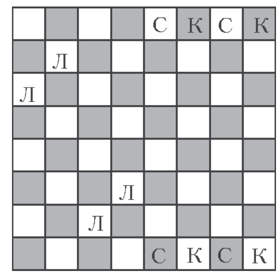

Рис. 4

19. К сожалению, в условии была допущена опечатка: на разных чашах должны лежать гирьки с разностью масс 40 г, а не 10 г. Назовем гирьки в 1 г, …, 40 г легкими, а гирьки в 41 г, …, 80 г – тяжелыми. Если легкая гирька x лежит на одной чаше, то тяжелая гирька $40 + x$ – на другой. Тогда, если мысленно уменьшить массу каждой тяжелой гирьки на 40 г, на каждой чаше окажутся гирьки с массами от 1 до 40 г. Значит, прибавки по 40 г должны распределиться поровну, т.е. на чашах должно быть поровну тяжелых гирек (и поровну легких).

С другой стороны, если легкая гирька x лежит на первой чаше, то тяжелая гирька $81 - x$ – на другой, откуда легкая гирька $41 - x$ лежит тоже на первой чаше. Значит, легкие гири на первой чаше делятся на 10 пар с суммой 41, аналогично – на второй чаше. Значит, равновесие не изменится, если убрать с весов тяжелые гири.

20. В три раза. Мысленно растянем (или сожмем) правое крыло бабочки так, чтобы отрезок AB стал равным 4. При этом правое крыло бабочки станет равным синему треугольнику левого крыла (рис.5). Соотношение цветов в правом крыле от этого не изменилось, зато расчеты теперь можно провести устно.

Если площадь синего треугольника левого крыла равна S, то площадь всего правого крыла тоже равна S, а всего левого крыла – $4S$. Синий треугольник правого крыла, подобен всему левому крылу. Его основание AB ровно в четыре раза меньше основания левого крыла, поэтому его площадь в 16 раз меньше и равна $4S/16 = S/4$. Тогда красный цвет в правом крыле занимает площадь $3S/4$. Значит, красного цвета в правом крыле в три раза больше, чем синего!

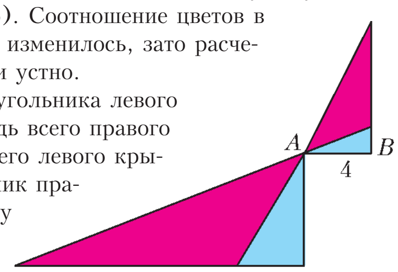

Рис. 5

ПРИЯТНОГО АППЕТИТА!

Первый вопрос. Если у первого было m хлебов, а у второго – больше чем $2m$ хлебов, то при дележе всего хлеба поровну на троих первому, очевидно, достанется свыше $(m + 2m)/3 = m$ хлебов, т.е. больше, чем у него имеется с собой. Поэтому второй, по сути дела, накормит не только третьего, но частично и первого. И тогда отрицательное число $2(m - n)$ фактически означает сумму, которую первый *должен сам уплатить* второму за дополнительное угощение (другой вопрос, согласится ли он это сделать).

Второй вопрос. Все использованные нами соотношения между числами Фибоначчи применимы только для $k \geq 3$, ибо для $k < 3$ просто *не существует* u_{k-2}. Поэтому значения $k = 1$ и $k = 2$ надо проверять отдельно. В результате такой проверки и выявляется дополнительная пара (1,1).

Третий вопрос. Как ни странно, задача решается практически «на пальцах». Последовательность Фибоначчи, очевидно, возрастающая, т.е. $u_{k-2} < u_{k-1} < u_k$. Поэтому $u_k = u_{k-1} + u_{k-2} > u_{k-2} + u_{k-2} = 2u_{k-2}$. Поэтому если даже взять два числа Фибоначчи, стоящих не рядом, а через одно, то большее более чем вдвое превзойдет меньшее. Если же два не соседних числа Фибоначчи находятся еще дальше друг от друга, то указанное превосходство будет еще сильней. Но тогда (см. ответ на первый вопрос) владельцу меньшего числа хлебов не может достаться одна монета – более того, он сам должен будет приплатить своему попутчику. Поэтому можно уверенно заявить: не соседних чисел Фибоначчи, удовлетворяющих указанному условию, *не существует*.

ОХОТА НА ПРИЗРАК ЛЕОНАРДО

1. Вершины, куда необходимо сделать ход, на графах обозначены черным цветом.

а) Граф для цилиндрической доски 8×8 см. на рисунке 6.

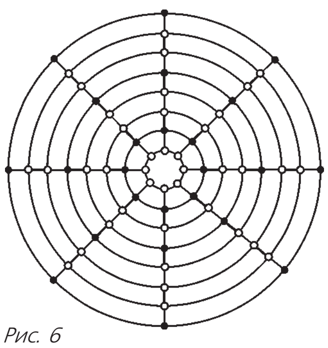

Рис. 6

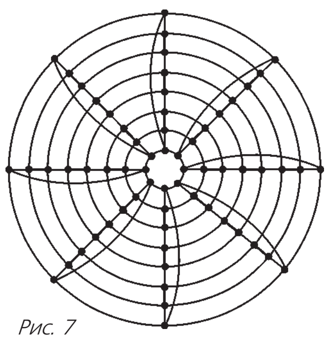

Рис. 7

б) Граф для тороидальной доски 8×8 приведен на рисунке 7. Поскольку из любой вершины графа тороидальной доски $n \times n$ для $n \geq 3$ выходит ровно 4 ребра, то одной из подходящих раскрасок будет раскраска с ходом в каждую вершину.

в) Граф для листа Мебиуса, склеенного из доски 8×8, приведен на рисунке 8.

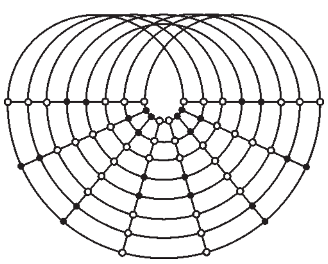

Рис. 8

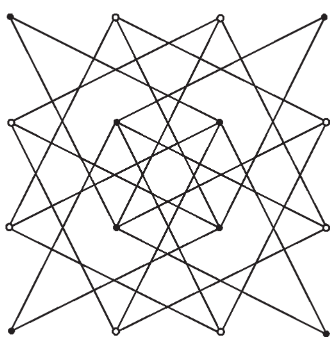

Рис. 9

2. *Указание.* В случае доски 3×3 граф представляет собой 8-реберный цикл и изолированную точку. В случае доски 4×4 граф приведен на рисунке 9.

3. См. рисунок 10.

4. Одно из возможных решений показано на рисунке 11. В каждой ячейке записано количество ходов в эту ячейку.

Рис. 10

5. *Указание.* С учетом того, что решение существует, проведите аналогичные рассуждения и получите соотношение

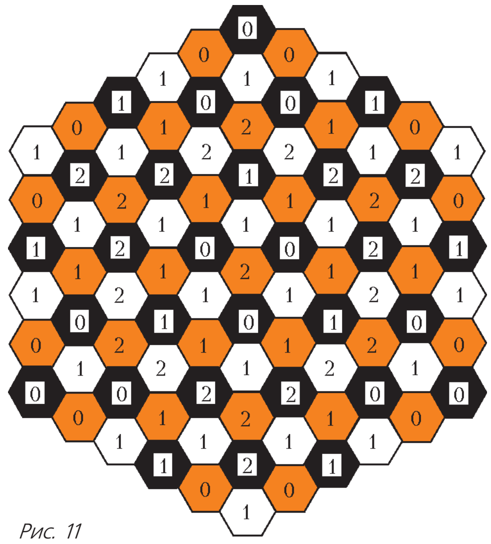

Рис. 11

$ks = 3^n$, где n – число вершин графа, k – число классов, в каждом из которых по s элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ: ДИНАМИЧЕСКИЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ

1. $\omega = \sqrt{\dfrac{2gS}{V}}$.

2. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{(\rho_1 - \rho_2)gS}}$.

3. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{3l}}$.

4. $t = \dfrac{\pi + \sqrt{3}}{3}\sqrt{\dfrac{l}{\mu g}}$.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ LXXIV МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

1. 1:2.

2. Пронумеруем цвета числами от 1 до 7. Пусть, если гном не видит два цвета одной четности, то он называет цвет с большим номером, а если цвета, которые он не видит, имеют разную четность, то он называет меньший номер. Какой бы цвет ни имел спрятанный колпак, его назовут ровно три гнома. (Например, если спрятан колпак цвета 3, то угадают гномы, на которых надеты колпаки цветов 1, 4 и 6.)

2. 12.

Отметим равные отрезки (рис.12 – здесь мы пользовались тем, что в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны). Видим, что длина большей стороны равна $a + b + 4$, а длина меньшей стороны равна $a + b$. Значит, $a + b = 8$, и большая сторона имеет длину $a + b + 4 = 8 + 4 = 12$.

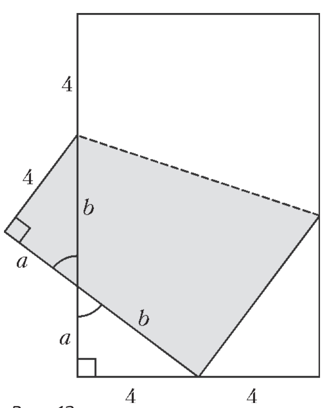

Рис. 12

4. а) Да; б) да; в) нет.

Заметим, что числа в углах будут отмечены в любом случае – это числа, стоящие на диагоналях длины 1. Рассмотрим наименьшее из чисел, не стоящих в углах. Оно не отмечено, так как на каждой линии вместе с ним есть и другие «неугловые» числа.

На рисунке 13 приведен пример таблицы, в которой будут отмечены все числа, кроме одного.

4	10	9	3
11	16	15	8
12	13	14	7
1	5	6	2

Рис. 13

5. *Указание.* На одну чашу весов нужно положить шарики из вершин A и E, а на другую – из вершин B и D.

6. Нет, не может.

Указание. Предположим, что такая ломаная существует. Докажите, что одна из сторон квадрата обладает таким свойством: каждый из узлов этой стороны принадлежит некоторому (причем ровно одному) звену ломаной, идущему вдоль стороны квадрата. Общее число узлов на стороне должно быть четным. Однако оно равно 101.

7. Обозначим через Q середину стороны AD (рис.14). Заметим, что MQ параллельно BD, а QN параллельно AC, так как это средние линии в треугольниках ABD и ACD соответственно. Поэтому отрезки MP и NP будут высотами в треугольнике MNQ, а точка P – его ортоцентром. Значит, QP перпендикулярна MN. Поскольку MN параллельна AD, получаем, что PQ перпендикулярна AD, а значит, является серединным перпендикуляром. Следовательно, $PA = PD$.

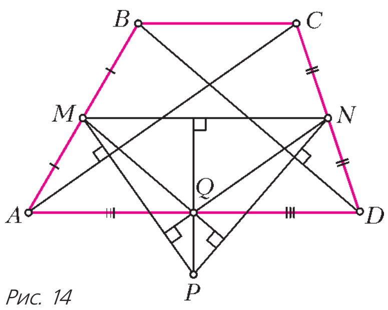

Рис. 14

8. $2011^{2011} + 2009^{2009} > 2011^{2009} + 2009^{2011}$.

9. Нет.

Указание. Пусть никто из трех игроков не ошибся. Обозначим количество игроков через n. Упорядочим арбитров по количеству встреч, которые они судили. Докажите, что тогда всего арбитров $n-1$, причем первый арбитр судил ровно 1 встречу, второй – ровно 2, ..., $(n-1)$-й – ровно $n-1$. Далее получите противоречие, рассмотрев арбитра, который судил ровно одну встречу.

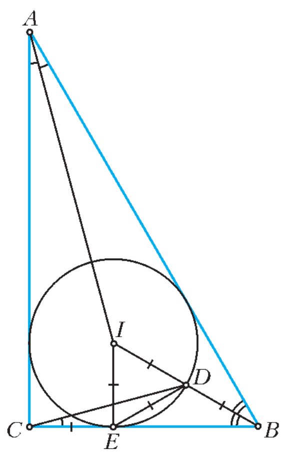

Рис. 15

10. *Указание.* Пусть E – точка касания вписанной окружности и стороны BC (рис.15). Тогда треугольник CEI равнобедренный прямоугольный, $CE = IE$.

В прямоугольном треугольнике IEB угол IBE равен $30°$, значит, $\angle EIB = 60°$, откуда треугольник IDE равносторонний.

Тогда треугольник CDE равнобедренный. Угол при вершине E равен

$$\angle CED = 180° - \angle BED = 180° - (90° - \angle IED) = 150°.$$

Следовательно, $\angle DCE = 15°$.

Осталось заметить, что

$$\angle IAC + \angle ACD = 15° + (90° - \angle DCE) = 90°,$$

а значит, прямые AI и CD перпендикулярны.

11. Да, существуют.

12. В первую очередь заметим, что $\angle ADB = \angle DBC$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD (рис.16). С другой стороны, $\angle APB = 2\angle ADB$, поскольку в окружности, описанной около треугольника ABD, угол ADB вписанный, а угол APB центральный. Аналогично получим, что $\angle DQC = 2\angle DBC$, а значит,

$$\angle APB = 2\angle ADB = 2\angle DBC = \angle DQC.$$

Далее, поскольку $AP = PB$ и $DQ = QC$, треугольники APB и DQC подобны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle KAP = \angle KDQ$ и $AP : DQ = AB : DC$. Вместе с тем, из теоремы о пропорциональных отрезках $AK : DK = AB : DC$, поэтому треугольники APK и DQK подобны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда немедленно следует, что $\angle PKA = \angle QKD$.

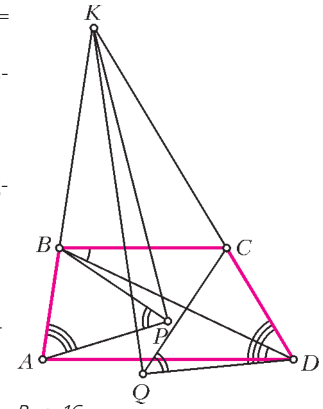

Рис. 16

13. $n!$.

Все разности, выписанные *на доске*, разбиваются на пары противоположных: $x_1 - x_2$ с $x_2 - x_1$ и т.д. Если некоторая сумма не содержит ни разности $x_i - x_j$, ни разности $x_j - x_i$, то к этой сумме можно прибавить $(x_i - x_j) + (x_j - x_i)$ и получить сумму, равную исходной. Далее, если некоторая сумма содержит и слагаемое $x_i - x_j$ и слагаемое $x_j - x_i$, то можно их вычеркнуть и опять получить сумму, равную исходной. Итак, в каждой сумме, записанной в тетрадь ровно один раз, из каждой пары противоположных разностей встречается ровно одна.

Рассмотрим одну из сумм, которые Леша написал в тетрадь ровно один раз. Построим по ней *ориентированный граф*, вершинами которого являются переменные $x_1, \ldots, x_n$ и из вершины x_i ведет ребро в вершину x_j тогда и только тогда, когда в рассматриваемую сумму входит разность $x_i - x_j$. В предыдущем абзаце мы показали, что между любыми двумя вершинами проведено ровно одно из двух возможных ребер (или $x_i \to x_j$, или $x_j \to x_i$, но не оба).

Заметим теперь, что построенный нами ориентированный граф не может содержать циклов, т.е. таких последовательностей вершин $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, что из каждой вершины ведет ребро в следующую вершину, а из последней вершины – в первую. Действительно, иначе из суммы можно было бы вычеркнуть

$$(x_{i_1} - x_{i_2}) + (x_{i_2} - x_{i_3}) + \ldots + (x_{i_{k-1}} - x_{i_k}) + (x_{i_k} - x_{i_1})$$

и получить сумму, равную исходной.

Поскольку в графе нет циклов, найдется вершина, из которой не выходит ни одно ребро (иначе можно было бы выйти из произвольной вершины и, переходя каждый раз по какому-нибудь ребру, не более чем через n шагов прийти в вершину, в которой мы уже были). В графе без этой вершины опять найдется вершина, из которой не выходит ни одно ребро, и т.д. Пусть первая из построенных в предыдущем абзаце вершин – x_{i_1}, вторая – x_{i_2}, ..., последняя – x_{i_n}. Тогда сумма равна

$$\begin{aligned}&(x_{i_1} - x_{i_2}) + (x_{i_1} - x_{i_3}) + \ldots + (x_{i_1} - x_{i_n}) + \\ &\quad + (x_{i_2} - x_{i_3}) + \ldots + (x_{i_2} - x_{i_n}) + \ldots + (x_{i_{n-1}} - x_{i_n}) = \\ &\quad\quad = (n-1)x_{i_1} + (n-3)x_{i_2} + \ldots + (3-n)x_{i_{n-1}} + (1-n)x_{i_n}.\end{aligned}$$

Осталось показать, что любая сумма такого вида встретится в тетради ровно один раз. Рассмотрим набор чисел, в котором $x_{i_1} > x_{i_2} > \ldots > x_{i_n}$. Для такого набора в рассматриваемую сумму вошли все положительные слагаемые и ни одного отрицательного слагаемого. Следовательно, для такого набора чисел все остальные суммы будут строго меньше. Значит, никакое другое записанное Лешей выражение не может быть тождественно равно этой сумме.

Ясно, что количество таких сумм равно количеству перестановок n элементов, т.е. равно $n!$.

14. Да. Подойдет, например, такая арифметическая прогрессия:

$$10,\ 50,\ 90,\ 130,\ 170,\ 210,\ 250,\ 290,\ \ldots$$

15. *Указание*. Будем считать вертикальными доминошками те, которые лежат параллельно длинной стороне доски. Рассмотрим всю границу области, занятой вертикальными доминошками. Она состоит из замкнутых ломаных, проходящих по границам клеток. Ясно, что каждая из этих ломаных имеет четную длину.
Указанная граница складывается из границы вертикальных доминошек с горизонтальными и из той части границы доски, к которой примыкают вертикальные доминошки. Осталось доказать, что на границах доски вертикальные доминошки занимают четное количество клеток.

16. $120°$.
Продолжив луч BC до пересечения с описанной окружностью треугольника BB_1C_1, получим точку K (рис.17). Вписанные углы C_1BB_1 и KBB_1 равны (так как BB_1 – биссектриса), значит, $B_1C_1 = B_1K$. При этом точки K и C_1 лежат на окружности (описанной вокруг треугольника BB_1C_1), центр которой принадлежит прямой AC. Следовательно, K и C_1 симметричны друг другу относительно прямой AC.

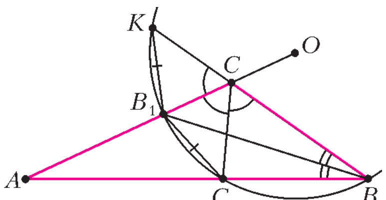

Рис. 6

Получаем равенство трех углов $\angle BCC_1 = \angle C_1CB_1 = \angle B_1CK$. Их сумма равна $180°$, значит каждый из них равен $60°$, и $\angle ACB = \angle BCC_1 + \angle C_1CB_1 = 120°$.
Замечание. Легко показать, что центр O окружности может лежать только на продолжении отрезка AC за точку C и, значит, прямая BC пересекает окружность именно так, как показано на рисунке.

17. Да, можно.
Обозначим через $x_1 \ge x_2 \ge x_3$ длины палочек, которые наутро оказались у Винтика, а через $y_1 \ge y_2 \ge y_3$ – длины палочек, которые оказались у Шпунтика. Винтик не может сложить из своих палочек треугольник, значит, $x_1 \ge x_2 + x_3$. Предположим, что и Шпунтик не может сложить треугольник: $y_1 \ge y_2 + y_3$. Тогда $x_1 + y_1 \ge x_2 + x_3 + y_2 + y_3$. Поскольку сумма длин всех шести палочек равна 2 м, получаем, что $x_1 + y_1 \ge 1$ м. Значит, длина какой-то из этих двух палочек не меньше 50 см. Но тогда она не может быть стороной треугольника с периметром 1 м, что противоречит условию.

18. Введем систему координат с началом в вершине куба и осями, параллельными его ребрам. Вместо проекций на грани будем рассматривать проекции на координатные плоскости (назовем их нижней, передней и левой).
Заметим, что грани всех параллелепипедов должны быть параллельны координатным плоскостям. Заметим также, что два параллелепипеда могут перекрываться в проекции не более чем на одну плоскость: если они перекрываются хотя бы на двух, то перекрываются проекции на все три оси, а тогда перекрываются и сами параллелепипеды.
Предположим, что найдутся три параллелепипеда A, B и C, нарушающие требование задачи. Тогда для каждой из трех пар найдется своя плоскость, проекции на которую будут перекрываться. Пусть a – расстояние между параллелепипедами B и C вдоль оси, перпендикулярной соответствующей плоскости, аналогично, b – расстояние между A и C, c – расстояние между A и B. Среди всех троек, нарушающих требование задачи, возьмем одну из тех, где $a + b + c$ минимально.
Случай 1: $a + b + c = 0$ (рис.18). Тогда $a = b = c = 0$ и у всех трех параллелепипедов есть общая точка. Из этой точки выходят два противоположных октанта, не покрытых параллелепипедами A, B и C. Значит, они покрыты какими-то другими параллелепипедами D и E. Но эти параллелепипеды должны целиком лежать в своих октантах, а проекции октантов ни на одну плоскость не перекрываются. Значит, то же верно и для D и E, что противоречит условию.

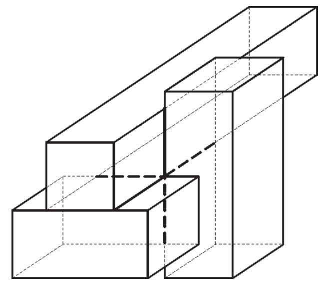
Рис. 18

Случай 2: $a + b + c > 0$ (рис.19). Предположим для определенности, что $a > 0$, B находится левее C, C находится ниже A и A находится дальше B. Рассмотрим все параллелепипеды, лежащие между B и C и перекрывающиеся с ними в проекции на левую плоскость. Среди них обязательно найдется параллелепипед F, у которого верхняя грань не ниже верхней грани C, а дальняя – не ближе дальней грани B. Если F перекрывается с A в проекции на нижнюю плоскость, то рассмотрим тройку (A, B, F), если на переднюю – тройку (A, F, C). В любом случае получим тройку, нарушающую условие задачи, с меньшей суммой $a + b + c$: по одному измерению расстояние не изменилось, по другому не увеличилось, по третьему уменьшилось – а это противоречит изначальному выбору тройки.[1]

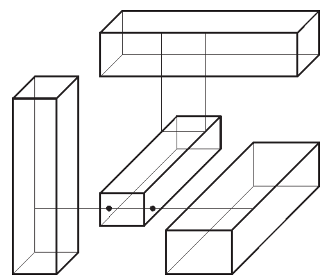
Рис. 19

19. С 74-м членом арифметической прогрессии.

20. Пусть $x_1 > 0$ – корень уравнения $x^{2011} + 2011x - 1$, а $x_2 > 0$ – корень уравнения $x^{2011} - 2011x + 1$. Тогда $x_1^{2011} + 2011x_1 - 1 = 0$ и $x_2^{2011} - 2011x_2 + 1 = 0$. Складывая эти уравнения почленно, получаем

$$\left(x_1^{2011} + x_2^{2011}\right) + 2011\left(x_1 - x_2\right) = 0.$$

Значит,

$$x_1 - x_2 = -\frac{x_1^{2011} + x_2^{2011}}{2011} < 0.$$

Отсюда получаем $x_1 < x_2$.

21. Пусть $x = AM = ME$, $y = BE$. Так как $DM \parallel AC$ (рис.20), то $\angle MDB = \angle ACB = \angle ABD$ и $DM = MB = x + y$. Обозначим через K середину отрезка DE. Тогда MK – средняя линия в треугольнике ADE и $AD = 2MK$. По неравенству треугольника отсюда получаем

$$AD + DE = 2(DK + KM) > 2MD = 2x + 2y = AB + BE.$$

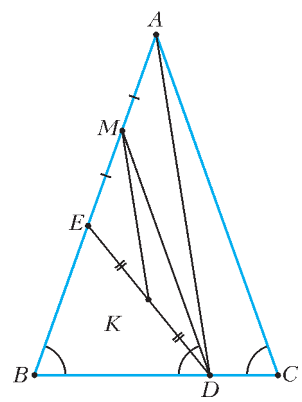

Рис. 20

22. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Пусть A, B, C и D – вершины этого тетраэдра, O – его центр. Спроецируем тетраэдр ортогонально на некоторую плоскость π. Обозначим через A', B', C', D' и O' ортогональные проекции точек A, B, C, D и O на плоскость π соответственно. Если плоскость π параллельна ребрам AB и CD, то проекция представляет собой квадрат с диагональю длины 1. В этот квадрат можно вписать круг радиуса $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Предположим, что найдется такая плоскость π, что ортого-

[1] *Это решение предложено участником олимпиады Александром Скутиным.*

нальная проекция правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром длины 1 на эту плоскость содержит некоторый круг с центром в точке I и радиусом $R > \frac{\sqrt{2}}{4}$. Проекция тетраэдра представляет собой либо четырехугольник с вершинами в точках A', B', C', D' (рис.21), либо треугольник с вершинами в трех из этих точек (рис.22).

Рассмотрим треугольники

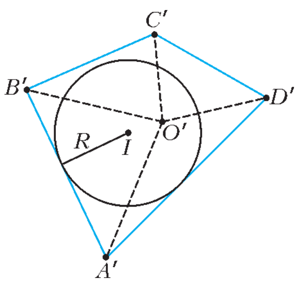

Рис. 21

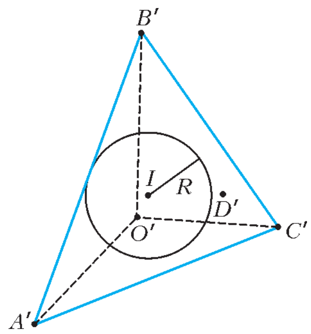

Рис. 22

$O'A'B'$, $O'A'C'$, $O'B'C'$, $O'A'D'$, $O'B'D'$ и $O'C'D'$. По крайней мере один из этих треугольников имеет сторону, являющуюся также стороной в этой проекции, и содержит точку I. Пусть для определенности это треугольник $O'A'B'$. Тогда расстояние от ребра AB до прямой l, проходящей через точку I перпендикулярно к плоскости π, не меньше R и больше $\frac{\sqrt{2}}{4}$. С другой стороны, эта прямая пересекает треугольник OAB в некоторой точке E (рис.23). Расстояние же от точки E до ребра AB не превосходит расстояния от точки O до этого ребра, т.е. не больше $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Противоречие.

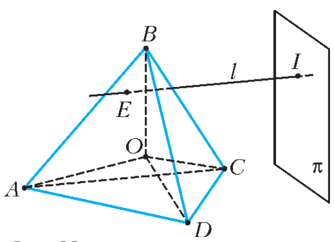

Рис. 23

23. Да, верно.

Назовем число a подходящим, если $0 < a < 1$ и для этого значения a продавец сможет добиться желаемого результата. Нетрудно видеть, что если число a подходящее, то число $1-a$ также является подходящим. Покажем, что для такого a подходящим будет также являться и число $\sqrt{a}$.

Пусть с помощью конечного числа разрезов в отношении $a:(1-a)$ удалось разделить весь сыр на две кучки равного веса. Покажем, как разрезать какой-либо кусок сыра веса p на части в отношении $a:(1-a)$ по весу, используя при этом лишь разрезы в отношении $\sqrt{a}:\left(1-\sqrt{a}\right)$. После первого разреза у нас появятся два куска: весом $\sqrt{a}p$ и весом $\left(1-\sqrt{a}\right)p$. Разрезав первый из кусков в том же отношении, мы в итоге получим три куска: весом ap, весом $\sqrt{a}\left(1-\sqrt{a}\right)p$ и весом $\left(1-\sqrt{a}\right)p$. Два последних куска вместе имеют вес $(1-a)p$. Таким образом, каждая операция по разрезанию в отношении $a:(1-a)$ может быть заменена на две операции по разрезанию в отношении $\sqrt{a}:\left(1-\sqrt{a}\right)$.

Нетрудно видеть, что $a_0 = 1/2$ является подходящим числом. Следовательно, подходящими являются и числа $a_1 = \sqrt{1/2}$, $a_2 = \sqrt[4]{1/2}$, …, $a_n = \sqrt[2^n]{1/2}$, …, а также числа $b_0 = 1 - a_0$, $b_1 = 1 - a_1$, …, $b_n = 1 - a_n$, … Заметим, что $b_{n-1}/b_n = 1 + \sqrt[2^n]{1/2} < 2$ при всех натуральных n. Положим $b_{n,m} = \sqrt[2^m]{b_n}$ при всех натуральных m и целых $n \ge 0$. Такие числа также являются подходящими. Поскольку

$$(1{,}001)^{1024} > 1 + 1024 \cdot 0{,}001 > 2,$$

то для всех натуральных n имеем

$$\frac{b_{n-1,10}}{b_{n,10}} = \sqrt[1024]{\frac{b_{n-1}}{b_n}} < \sqrt[1024]{2} < 1{,}001$$

и

$$b_{0,10} = \sqrt[1024]{b_0} = \sqrt[1024]{\frac{1}{2}} > \frac{1}{1{,}001} > 0{,}999.$$

Отсюда получаем, что

$$0 < b_{n-1,10} - b_{n,10} = b_{n,10}\left(\frac{b_{n-1,10}}{b_{n,10}} - 1\right) < 0{,}001$$

для всех таких n. Так как

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = 1 + \sqrt[2^n]{\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}$$

при всех натуральных n, то найдется такое натуральное число N, что $b_N < 0{,}001^{1024}$ и, следовательно, $b_{N,10} < 0{,}001$.

Итак, числа $b_{n,10}$ при $n = 0, 1, \ldots, N$ образуют такой набор подходящих чисел, что $b_{N,10} < b_{N-1,10} < \ldots < b_{0,10}$, $b_{N,10} < 0{,}001$, $b_{0,10} > 0{,}999$ и $b_{n-1,10} - b_{n,10} < 0{,}001$ при всех $n = 1, 2, \ldots, N$. Легко видеть, что этот набор имеет непустое пересечение с каждым из промежутков длины 0,001 из интервала $(0; 1)$.

24. Да, может. Подходит, например, такая новая система координат, центр которой имеет координаты $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$ в старой системе, а единица измерения на каждой оси новой системы в два раза больше по сравнению со старой.

25. Верно.

Пусть имеется x карточек с цифрой 1, y карточек с цифрой 2 и z карточек с цифрой 3. Тогда $x + y + z = 100$, и так как

$$\frac{x+y-z}{2} + \frac{z+y-x}{2} + \frac{x+z-y}{2} = \frac{x+y+z}{2} = 50,$$

то искомый ряд можно сложить из $\frac{x+y-z}{2} = 50 - z$ фрагментов 21, затем из $\frac{z+y-x}{2} = 50 - x$ фрагментов 32, а затем из $\frac{x+z-y}{2} = 50 - y$ фрагментов 31. При этом карточка с цифрой 1 встретится ровно $(50-z) + (50-y) = 100 - z - y = x$ раз, карточка с цифрой 2 – ровно y раз, а карточка с цифрой 3 – ровно z раз, причем запрещенные фрагменты в предложенном ряде не встретятся, даже если какое-либо из значений x, y или z равно 50.

26. $\sqrt{2}$.

Указание. Докажите, что точка D, симметричная точке C относительно прямой BO, лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABO, и что треугольник DAC подобен треугольнику AOC.

27. $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, …, $a_{2010} = 2011$, $a_{2011} = 1$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ – искомая расстановка чисел. Нетрудно видеть, что тогда $a_{2011} = 1$, так как иначе выражение из условия задачи можно было бы увеличить, поменяв между собой местами числа $a_k = 1$ $(k \ne 2011)$ и a_{2011}.

Сравним два числа a^{b^c} и b^{a^c}, где a, b и c – некоторые натуральные числа, причем $a \ne b$, $a \ge 2$ и $b \ge 2$. Так как функция $y = \ln x$ монотонно возрастает при всех $x > 0$, то разность $a^{b^c} - b^{a^c}$ имеет тот же знак, что и разность

$$b^c \ln a - a^c \ln b = a^c b^c \left(a^{-c} \ln a - b^{-c} \ln b\right).$$

Найдем промежутки монотонности функции $y = x^{-c} \ln x$. Имеем $y' = -cx^{-c-1} \ln x + x^{-c-1} = x^{-c-1}(1 - c\ln x)$. Так как $y' > 0$ при $0 < x < e^{1/c}$ и $y' < 0$ при $x > e^{1/c}$, то функция $y = x^{-c} \ln x$ возрастает на промежутке $0 < x < e^{1/c}$ и убывает на промежутке $x > e^{1/c}$.

При $c = 1$, учитывая неравенство $3 > e$, отсюда получаем

$$3^{-1}\ln 3 > 4^{-1}\ln 4 = 2^{-1}\ln 2 > 5^{-1}\ln 5 > \ldots > 2011^{-1}\ln 2011.$$

Значит, $a^{-1}\ln a > b^{-1}\ln b$, если $3 \le a < b$. Следовательно, $a^{b^1} > b^{a^1}$ при $3 \le a < b$. При $c \ge 2$ имеем $1 < e^{1/c} < 2$. Поэтому при таких значениях c получаем, что

$$2^{-c}\ln 2 > 3^{-c}\ln c > 4^{-c}\ln 4 > \ldots > 2011^{-c}\ln 2011.$$

Тогда $a^{-c}\ln a > b^{-c}\ln b$ и $a^{b^c} > b^{a^c}$ при $2 \le a < b$.
Теперь по индукции можно доказать, что $a_{2011-n} = 2012 - n$ при n = 1, 2, ..., 2010.

28. Эта задача – частный случай задачи М1397 «Задачника «Кванта», ее решение см. в «Кванте» №2 за 1994 год.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Первый теоретический тур

7 класс

1. 10 пирогов. **2.** $h = \dfrac{2v_{\text{ср}}^2}{g} = 5$ м.

3. Прав Саша. **4.** $\rho_{\min} = 2{,}92$ кг/м^3.

8 класс

1. $t \approx 29{,}29$ с; $v_{\text{ср}1} \approx 7{,}74$ м/с. **2.** На отметке 24 см.

3. $H = h\dfrac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} = 1{,}8$ м. **4.** 44%.

9 класс

1. $v_0 = g\left(\dfrac{t}{2} \pm \sqrt{\dfrac{s}{g} - \dfrac{t^2}{4}}\right)$, т.е. 3 м/с или 7 м/с.

2. $\rho_{\text{ср}} = \rho_{\text{в}} - \rho_{\text{с}}\dfrac{d}{h} = 922$ кг/м^3.

3. $R_1 = \dfrac{2R_aR_bR_c}{R_aR_b + R_aR_c - R_bR_c}$, $R_2 = \dfrac{2R_aR_bR_c}{R_aR_b + R_bR_c - R_aR_c}$, $R_3 = \dfrac{2R_aR_bR_c}{R_aR_c + R_bR_c - R_aR_b}$.

10 класс

1. $\dfrac{m}{M} = 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha$.

2. От содержимого тарелки в окружающую среду было передано тепла больше на величину

$$\Delta Q = C(t_{\text{к}} - t) - c_{\text{в}}m(t - t_{\text{о}}) = 10980 \text{ Дж}.$$

3. $U = \dfrac{2}{3}\mathcal{E}$.

11 класс

1. $x_m = \dfrac{aT^2}{4\pi^2} \approx 5$ мм.

2. $\eta = \dfrac{2\left(T_3 - T_2 - T_1\ln(T_3/T_2)\right)}{5T_3 - 2T_2 - 3T_1} \approx 0{,}15 = 15\%$ (отметим, что Q_{41} однозначно выражается через заданные температуры).

3. $P = \dfrac{17U_m^2}{90R_0} = 17$ Вт.

4. Если $q > 0$, то $v_m = \dfrac{mg}{\mu qB}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ и $a_m = g\sin\alpha$; если $q < 0$, то $v_m = \dfrac{mg}{\mu qB}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ и $a_m = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $m_2 = 2m_1\left(1 - \dfrac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}}\right) - \dfrac{M}{2}\left(\dfrac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{д}}} - 1\right) \approx 1{,}6$ кг.

2. $t_{\text{с}} = 100 + \left(\rho V - m\dfrac{c_{\text{с}}(100 - t_{\text{р}})}{c_{\text{в}}(t_{\text{р}} - t)}\right)\dfrac{r + c_{\text{в}}(100 - t)}{c_{\text{с}}m} \approx 231$ °С.

3. $v = \dfrac{4N}{\pi c\rho D^2(t_1 - t_2)} \approx 1{,}5$ м/с.

9 класс

1. Примерно 109,2 с. **2.** $F = \dfrac{\rho g A^3}{2\sqrt{6}} \approx 2{,}5\cdot 10^{10}$ Н.

3. $V_{\max} = \dfrac{\pi R^2 h\rho_{\text{л}}\left(2\lambda\rho_{\text{в}} + c_{\text{л}}t_0(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})\right)}{3\rho_{\text{в}}\left(\lambda\rho_{\text{л}} - c_{\text{в}}t(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})\right)} \approx 6{,}58$ л.

4. Если измерить сопротивление R_{13}, то $R_1 = \dfrac{R_{12} + R_{13} - R_{23}}{2}$, $R_2 = \dfrac{R_{13} + R_{23} - R_{12}}{2}$, $R_3 = \dfrac{R_{12} + R_{23} - R_{13}}{2}$, $R_4 = \dfrac{2R_{34} - R_{13} + R_{12} - R_{23}}{2}$; если же измерить сопротивление R_{24}, то $R_1 = \dfrac{2R_{12} + R_{34} - R_{24} - R_{23}}{2}$, $R_2 = \dfrac{R_{24} + R_{23} - R_{34}}{2}$, $R_3 = \dfrac{R_{23} + R_{34} - R_{24}}{2}$, $R_4 = \dfrac{R_{24} + R_{34} - R_{23}}{2}$.

10 класс

1. $a_{\min} = g\operatorname{ctg}^2\alpha$. **2.** $M > 6m$.

3. $A = \dfrac{\nu R}{2}(T_3 - 3T_1) = 2493$ Дж. **4.** $R = Nr$.

11 класс

1. $\eta \approx 0{,}029 = 2{,}9\%$.

2. $F = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R(R + L)}$. **3.** $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m} + \dfrac{g}{l} + \dfrac{qE\cos\beta}{ml}}}$.