

О Л И М П И А Д Ы

промежутке длины 0,001 из интервала (0; 1) найдется значение a , при котором он сможет добиться желаемого результата с помощью конечного числа разрезов? (11)

А. Шаповалов

24. Кривая на плоскости в некоторой системе координат (декартовой) служит графиком функции $y = \sin x$. Может ли та же кривая являться графиком функции $y = \sin^2 x$ в другой системе координат, и если да, то каковы ее начало координат и единицы длины на осях (относительно исходных координат и единиц длины)? (11)

Фольклор, А. Канунников, И. Сергеев

25. Верно ли, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нем не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321? (11)

П. Бородин

26. Внутри треугольника ABC взята такая точка O , что $\angle ABO = \angle CAO$, $\angle BAO = \angle BCO$, $\angle BOC = 90^\circ$.

Найдите отношение $AC : OC$. (11)

И. Сергеев

27. При какой перестановке $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ чисел 1, 2, ..., ..., 2011 значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\dots^{a_{2010}^{a_{2011}}}}}}$$

будет наибольшим? (11)

О. Косухин

28. По ребрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук все время остается только в одной грани (в каждой грани – свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определенном направлении, причем так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков. (11)

Фольклор

Публикацию подготовили С. Дориченко, Е. Епифанов

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

7 класс

1. Красная Шапочка испекла 20 пирогов, сложила их в корзинку и отправилась через лес к больной бабушке. Когда до бабушки ей оставалось пройти 3 км, из кустов выскочил голодный волк с явным намерением съесть хоть что-нибудь. Увидев его, Красная Шапочка бросила на землю один пирог и побежала со скоростью 2,5 м/с. Волк съел пирог за 1 мин и побежал за Красной Шапочкой со скоростью 5 м/с. Тогда Красная Шапочка стала бросать пироги, как только волк начинал ее догонять, и так добежала до бабушкиного дома. Сколько пирогов досталось бабушке?

М. Семенов

2. Наблюдая за кокосом, свободно падающим с вершины пальмы, турист обнаружил, что пройденное кокосом расстояние s зависит от времени падения t как $s = \frac{gt^2}{2}$, где $g = 10 \text{ м/с}^2$. Турист также определил, что средняя скорость кокоса за время падения составляет $v_{\text{ср}} = 5 \text{ м/с}$. Определите высоту пальмы.

М. Ромашка

3. Братья Коля и Саша ехали на автобусе из пункта A в пункт B . Дорога состояла из двух частей, на каждой из которых автобус ехал с постоянной скоростью. На первой части скорость автобуса была v_1 , а на второй – v_2 . Средняя скорость автобуса на всем пути оказалась равной $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$.

Коля и Саша поспорили о том, как соотносятся длины этих частей пути и времена их прохождения. Коля считает, что автобус половину пути ехал со скоростью v_1 , а другую половину пути – со скоростью v_2 . Саша считает, что автобус половину времени ехал со скоростью v_1 , а другую половину

времени – со скоростью v_2 . Можно ли из условия задачи определить, прав ли кто-нибудь из братьев, и если да, то кто именно?

М. Ромашка

4. В Интернете сейчас можно найти видеозаписи различных физических опытов, в частности такого: группа студентов напускает в большое корыто до краев какой-то тяжелый газ из баллона, а потом кладет на поверхность этого газа модель корабля, согнутую из алюминиевой фольги, и этот корабль плавает! Потом студенты зачерпывают ковшиком газ из корыта, переливают его внутрь корабля, и он тонет. Найдите, какой минимальной плотностью должен обладать этот тяжелый газ, чтобы в нем мог плавать корабль в форме прямоугольного параллелепипеда (с открытым верхом), согнутый из бытовой алюминиевой фольги толщиной 25 мкм. Размеры корабля: длина – 50 см, ширина – 20 см, высота бортов – 10 см. Считайте, что лишние куски, образовавшиеся при сгибании параллелепипеда из листа фольги, удалены. Плотность алюминия $2,7 \text{ г/см}^3$, плотность воздуха $1,3 \text{ кг/м}^3$.

М. Семенов

8 класс

1. Спортсмен начал забег по прямой и первые 10 м бежал со скоростью 10 м/с, следующие 10 м – со скоростью 9 м/с, следующие 10 м – со скоростью 8 м/с и так далее. Сколько времени длился забег до остановки? С какой средней скоростью спортсмен пробежал первую половину дистанции?

С. Варламов

2. Металлическая плоская линейка имеет малую и всюду одинаковую толщину, одинаковую по всей длине ширину и длину 50 см. На концах линейки находятся отметки: 0 см и

50 см. Линейку согнули под прямым углом. Место сгиба приходится на отметку 40 см. За какое место нужно подвесить на тонкой нити согнутую линейку, т.е. вблизи какой отметки нужно закрепить нить, чтобы длинный прямой участок линейки в положении равновесия был горизонтальным?

С.Варламов

3. Однажды зимой рыболов пробурил лунку во льду на поверхности озера и обнаружил, что вода в лунке находится на глубине $h = 18$ см, если отсчитывать от поверхности льда на озере. Расстояние от лунки до ближайшей точки берега озера во много раз больше, чем толщина слоя льда и радиус лунки. Вычислите толщину слоя льда, считая ее одинаковой на всей поверхности озера. Плотность воды $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_l = 900 \text{ кг/м}^3$. Массой снега, рыболова и всех других объектов на поверхности озера пренебречь.

М.Ромашка

4. В Москве построили 30 снегоплавильных пунктов, в которых собранный с улиц снег расплавляется и в жидком виде отправляется на очистку. Для плавления снега используется теплая вода из канализации, причем сейчас реализуется только 1% от сбрасываемого в канализацию количества теплоты. Оцените, сколько процентов от сбрасываемой в канализацию теплой воды надо израсходовать, чтобы перепотить весь выпадающий на улицы и площади снег. Известно, что на одного москвича в среднем приходится 10 м^2 площади улиц, тротуаров и площадей. Каждый житель сливает в канализацию в среднем 100 л воды в сутки, при этом средняя температура воды на входе в сливное отверстие равна $+30 \text{ }^\circ\text{C}$. Средняя месячная норма осадков зимой для Москвы составляет 50 мм (в пересчете на воду). Удельная теплота плавления снега, как и льда, равна $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, плотность воды 1000 кг/м^3 , удельная теплоемкость воды $4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$.

С.Варламов

9 класс

1. Находясь на краю глубокого обрыва, турист бросает камень вертикально вверх. При последующем движении вниз камень проходит точку бросания и падает в обрыв. Известно, что за промежуток времени $t = 1$ с, отсчитываемый от момента броска, камень прошел путь $s = 2,9$ м. Определите начальную скорость камня, сообщенную ему при броске. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

М.Ромашка

2. В цилиндрическом сосуде высотой $h = 20$ см находится смесь воды и мелких кусочков льда. На поверхности плавает круглая стальная крышка толщиной $d = 2$ мм, нижний край которой находится точно на поверхности воды. Найдите среднюю плотность смеси воды и льда. Плотность воды $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_l = 900 \text{ кг/м}^3$, плотность стали $\rho_c = 7800 \text{ кг/м}^3$. Трением льда о стенки сосуда пренебречь.

М.Ромашка

3. Схема, состоящая из трех резисторов и трех клемм, соединенных по схеме «треугольник» (рис.1), исследуется следующим образом: две клеммы замыкаются между собой и измеряется сопротивление между двумя замкнутыми клеммами и третьей (свободной). В результате измерений получились сопротивления R_a , R_b , R_c . Найдите номиналы

резисторов R_1 , R_2 , R_3 , из которых состоит схема.

Д.Харабадзе

10 класс

1. На гладкой горизонтальной поверхности находится жесткий клин массой M , причем его гладкая наклонная поверхность составляет с горизонтом угол α . На этот клин налетает жесткий шарик массой m , у которого за мгновение до столкновения с наклонной поверхностью клина скорость была направлена горизонтально. Происходит абсолютно упругий удар. При каком отношении масс m/M шарик после удара будет двигаться в вертикальном направлении?

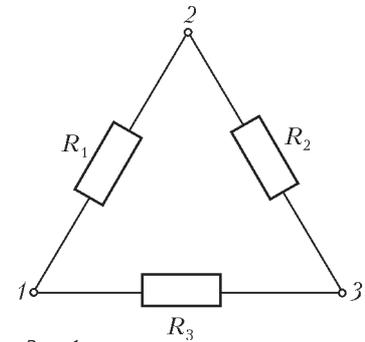


Рис. 1

С.Варламов

2. Школьник Коля налил в тарелку холодную окрошку, имеющую температуру $t_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$. Масса окрошки $m = 300$ г, а ее удельная теплоемкость равна удельной теплоемкости воды $c_v = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$. Коля добавил в окрошку горячую картошку, которая имела температуру $t_k = 80 \text{ }^\circ\text{C}$. Полная теплоемкость добавленной картошки равна $C = 450 \text{ Дж/}^\circ\text{C}$. После установления теплового равновесия температура картошки и окрошки оказалась равной $t = 22 \text{ }^\circ\text{C}$. В какую сторону было передано больше тепла при теплообмене с окружающей средой: от содержимого тарелки в среду или наоборот и на сколько больше?

М.Ромашка

3. Из трех одинаковых батареек собрали цепь, схема которой изображена на рисунке 2. Что покажет вольтметр, подключенный к выводам 1 и 2? ЭДС каждой из батареек равна \mathcal{E} .

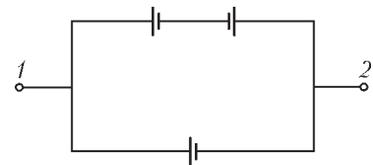


Рис. 2

О.Шведов

11 класс

1. Поезд, подходящий к станции, движется равнозамедленно с ускорением $a = 0,2 \text{ м/с}^2$ вплоть до момента остановки. На абсолютно гладком горизонтальном столе внутри вагона поезда находится грузик, соединенный пружиной с неподвижной опорой (рис.3). Пока поезд движется, грузик неподвижен относительно вагона. В момент, когда поезд останавливается, грузик приходит в движение и начинает колебаться с периодом $T = 1$ с. Найдите амплитуду колебаний грузика.

М.Ромашка

2. С одним молекул одноатомного идеального газа совершают циклический процесс 1–2–3–

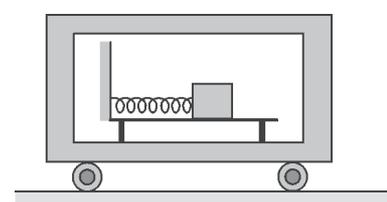


Рис. 3

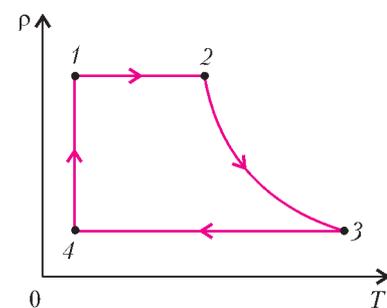


Рис. 4

4-1, как показано на рисунке 4 в координатах p - T (плотность-температура). Участок 2-3 – гипербола. Температуры в точках 1, 2 и 3 равны $T_1 = 300$ К, $T_2 = 500$ К и $T_3 = 800$ К соответственно. На участке 4-1 газ отдает холодильнику количество теплоты $Q_{41} \approx 1172$ Дж. Найдите КПД цикла.

Е. Якута

3. Участок AB электрической цепи состоит из резисторов с сопротивлениями $R_1 = R_0$, $R_2 = 9R_0$, $R_3 = 9R_0$, $R_4 = R_0$,

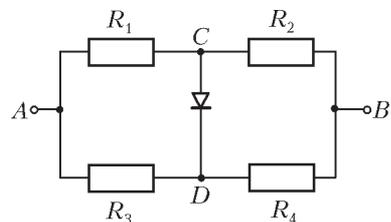


Рис. 5

где $R_0 = 1$ кОм, и идеального диода (рис.5). Идеальный диод пропускает ток без сопротивления в направлении от C к D и совсем не пропускает ток в обратном направлении. Участок AB подключают к источнику переменного синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin \omega t$, амплитуда которого $U_m = 300$ В. Какая тепловая мощность будет выделяться на этом участке?

М.Ромашка

4. Бусинка, нанизанная на неподвижный стержень, образующий угол α с горизонтом, имеет массу m и заряд q

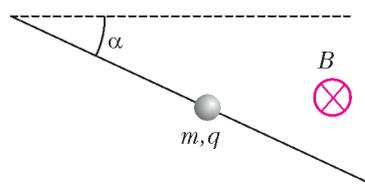


Рис. 6

Бусинка может скользить вдоль стержня с коэффициентом трения μ и начинает движение из состояния покоя, причем $\mu < \tan \alpha$. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , линии которой горизонтальны (перпендикулярны плоскости рисунка и направлены за его плоскость). Какую максимальную скорость и какое максимальное ускорение будет иметь бусинка при движении? Стержень не проводит ток. Рассмотрите два случая: $q > 0$ и $q < 0$.

М.Ромашка

Второй теоретический тур

8 класс

1. Деревянная палочка AB длиной $l = 1$ м и массой $M = 0,25$ кг подвешена в точке O , которая находится на расстоянии одной трети длины палочки от точки A (рис.7). К правому концу палочки в точке B подвешен медный брусок массой $m_1 = 1$ кг, причем палочка на одну треть своей длины, считая от точки B , погружена в сосуд с водой. К левому концу палочки в точке A подвешен другой груз, массой m_2 . Чему равна масса этого второго груза, если система находится в равновесии? Плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, плотность меди $\rho_m = 8900$ кг/м³, плотность дерева $\rho_d = 400$ кг/м³.

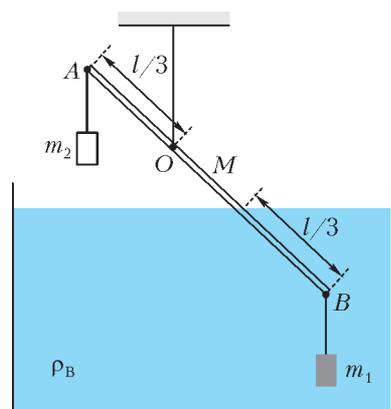


Рис. 7

Е. Якута

2. В сосуд, где находилось $V = 4$ л воды при температуре $t = 20$ °С, опускают сильно нагретую стальную деталь массой $m = 2,4$ кг. При этом часть воды быстро испаряется, так что температура оставшейся воды практически не успевает измениться. После установления теплового равновесия температура воды в сосуде оказывается равной $t_p = 25$ °С. Найдите начальную температуру стальной детали. Удельная теплоемкость воды $c_v = 4200$ Дж/(кг·°С), удельная теплоемкость стали $c_c = 460$ Дж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды $r = 2,2 \cdot 10^6$ Дж/кг, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³. Всеми потерями тепла из сосуда, кроме испарения, пренебречь.

М.Ромашка

3. Зимой на входе в систему отопления школьного здания вода имеет температуру $t_1 = +60$ °С, а на выходе из этой системы вода имеет температуру $t_2 = +40$ °С. Тепловые потери здания школы вследствие теплопроводности стен, излучения и сквозняков составляют $N = 10^6$ Вт. Трубы, подводящие и отводящие воду, имеют внутренний диаметр $D = 100$ мм. С какой средней по сечению труб скоростью течет в них вода? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°С), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³.

С.Варламов

9 класс

1. Самолет ТУ-160 в безветренную на всей территории земли погоду стартовал с аэродрома в Санкт-Петербурге. В течение всего времени 27-часового полета самолет находился на одной и той же высоте и держал одну и ту же по величине скорость 1000 км/ч, сделав несколько дозаправок в воздухе. Сначала он 6 ч летел на юг, затем 10 ч на восток, потом 6 ч на север, а в последние 5 ч полета его скорость была направлена на запад. Сколько еще времени потребуется самолету, чтобы с такой же по величине скоростью долететь до родного аэродрома по кратчайшему пути? Санкт-Петербург находится на широте 60°, а радиус Земли равен примерно 6400 км.

С.Варламов

2. После завершения строительства пирамиды Хеопса все ее ребра, согласно легенде, имели одну и ту же длину $A \approx 230$ м. В основании пирамиды был квадрат со стороной A . По преданиям, во время Великого потопа уровень воды совпал с вершиной пирамиды. С какой силой давила вода на северную боковую грань пирамиды? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Замечание: объем пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}SH$, где S – площадь основания пирамиды, H – ее высота.

С.Варламов

3. Цилиндрический калориметр радиусом $R = 10$ см и высотой $h = 30$ см на одну треть своего объема заполнен льдом при температуре $t_0 = -10$ °С. В калориметр через отверстие сверху медленно наливают воду, имеющую температуру $t = 30$ °С. Какой максимальный объем воды можно налить в калориметр? Удельная теплоемкость воды $c_v = 4200$ Дж/(кг·°С), удельная теплоемкость льда $c_l = 2100$ Дж/(кг·°С), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, плотность льда $\rho_l = 900$ кг/м³. Теплоемкостью калориметра и потерями тепла пренебречь.

М.Ромашка

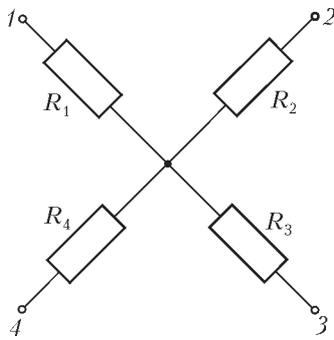


Рис. 8

4. Схема состоит из четырех клемм и четырех различных резисторов, которые имеют один общий вывод, а другим выводом соединены с соответствующей клеммой (рис.8). Известны сопротивления между клеммами 1-2, 2-3 и 3-4, они равны R_{12} , R_{23} и R_{34} соответственно. Сопротивление между какими клеммами еще необходимо измерить, чтобы найти номиналы всех резисторов R_1 , R_2 , R_3 и R_4 ? Чему они будут равны?

Д.Харабадзе

10 класс

1. На горизонтальном столе находятся два одинаковых грузика, связанные невесомой и нерастяжимой нитью, образующей равнобедренный треугольник AOB (рис.9). Углы при основаниях треугольника равны α . В точке O к этой нити привязана другая нить, которую удерживают вертикально слегка натянутой. С каким минимальным ускорением нужно начать поднимать точку O , чтобы грузы оторвались от стола в момент начала своего движения?

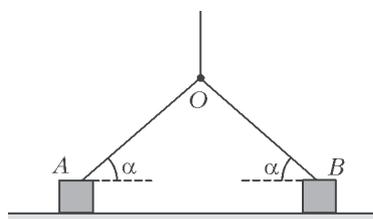


Рис. 9

2. В системе, изображенной на рисунке 10, все блоки невесомые и вращаются без трения, все нити невесомые и нерастяжимые (их жесткость велика по сравнению с жесткостью пружины), пружина также невесома. Система находится в покое. При какой массе груза M груз 1 сразу после пережигания нити в точке A будет иметь ускорение больше чем g ?

М.Ромашка

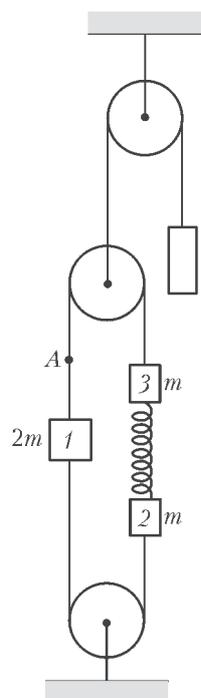


Рис. 10

3. С одним моле одноатомного идеального газа совершают циклический процесс 1-2-3-4-1, как показано на рисунке 11 в координатах $p-V$ (давление-объем). Известно, что температуры газа в точках 1 и 3 равны $T_1 = 300$ К и $T_3 = 1500$ К соответственно, а отношение объемов газа в точках 1 и 2 равно $V_2/V_1 = 2$. Чему равна работа, совершаемая газом за цикл?

Е.Якута

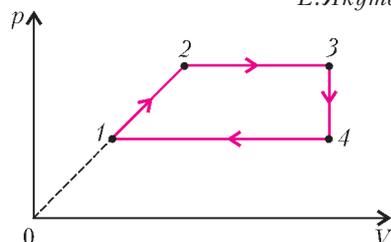


Рис. 11

4. В N -полюснике (схема с N клеммами) каждая клемма соединена с каждой другой при помощи резистора сопротивлением R – схема типа «многоугольник». Известно, что эта схема эквивалентна схеме типа «звезда» с N клеммами, в которой N резисторов номиналом r имеют в центре общий контакт, а другим контактом соединены с соответствующей клеммой (каждый резистор соединен с одной клеммой). Как связаны друг с другом величины R и r ?

Д.Харабадзе

11 класс

1. Рабочим телом тепловой машины служит некоторое количество воды. Цикл, по которому работает машина, показан на рисунке 12 в $p-T$ координатах, где синей пунктирной линией изображена зависимость давления насыщенных паров воды от температуры. Цикл состоит из изобарического (1-2-3), изохорического (3-4) и изотермического (4-1) участков. Найдите КПД этого цикла, считая воду практически несжимаемой жидкостью.

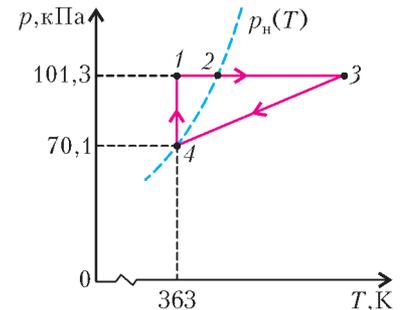


Рис. 12

Напоминания: $p_1 = 101,3$ кПа – нормальное атмосферное давление, удельная теплота парообразования воды (при 100°C) $L \approx 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, молярная масса воды $M = 18$ г/моль, удельная теплоемкость воды $c \approx 4,19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), универсальная газовая постоянная $R \approx 8,31$ Дж/(моль · К), теплоемкость одного моля водяного пара при постоянном давлении равна $4R$.

Е.Выводов

2. Тонкий жесткий непроводящий стержень длиной L несет на себе электрический заряд Q , который равномерно распределен по длине стержня. Маленький шарик имеет электрический заряд q и прикреплен к одному из концов стержня тонкой непроводящей и незаряженной нитью длиной R . Какова сила натяжения нити, если система находится в равновесии? Считать, что $Q/q > 0$. Силу тяжести не учитывать.

С.Варламов

3. На тонкой непроводящей нити длиной l подвешен маленький шарик массой m , который заряжен зарядом $+q$. Слева к шарiku прикреплена непроводящая пружинка жесткостью k , расположенная горизонтально. Шарик находится в однородном электрическом поле \vec{E} , направленном так, как показано на рисунке 13. В состоянии равновесия нить с шариком висит вертикально. Найдите период малых колебаний шарика в плоскости рисунка.

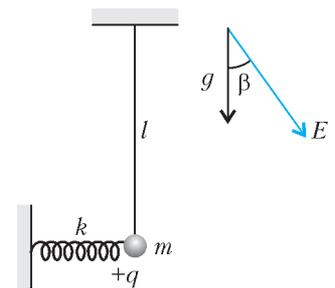


Рис. 13

Е.Якута

Публикацию подготовили М.Семенов, О.Шведов, А.Якута