Определение периода колебаний: динамический и энергетический подходы

А.ЧЕРНОУЦАН

Важной характеристикой любой системы – механической, термодинамической или электрической – является частота (или период) малых гармонических колебаний около положения равновесия. Для определения частоты используют два основных подхода.

1. Динамический подход. Записывают уравнение движения тела и, опираясь на малость колебаний, приводят его к виду уравнения гармонических колебаний

$$x'' + \gamma x = 0 , \qquad (1)$$

где x – параметр, определяющий положение тела или состояние системы (смещение тела от положения равновесия, угол отклонения маятника, заряд конденсатора в колебательном контуре), причем в положении равновесия $x = 0$. Решение этого уравнения как раз и представляет собой гармонические колебания

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) ,$$

где амплитуда A и начальная фаза φ_0 определяются из начальных условий, а циклическая частота колебаний равна $\omega = \sqrt{\gamma}$. Для движения тела массой m обычно находят возвращающую силу, которая при малых x почти всегда (за исключением некоторых особых случаев) пропорциональна смещению x:

$$F_x = -k_{эф} x .$$

Уравнение движения $ma_x = F_x$ имеет такой же вид, как для груза на пружине, поэтому $k_{эф}$ называют эффективной жесткостью, уравнение гармонических колебаний принимает вид

$$x'' + \frac{k_{эф}}{m} x = 0$$

и циклическая частота и период малых колебаний выражаются через m и $k_{эф}$:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m}} , \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{эф}}} .$$

2. Энергетический подход. Если система консервативная, то, выбрав параметр x, выражают потенциальную энергию через x, а кинетическую – через x' и приводят закон сохранения энергии (для малых колебаний) к виду

$$k_{эф}\frac{x^2}{2} + m_{эф}\frac{x'^2}{2} = E = \text{const} \qquad (2)$$

(за ноль потенциальной энергии принимают энергию в положении равновесия). Можно показать (взяв производную по t от правой и левой частей этого уравнения), что в этом случае движение подчиняется уравнению гармонических колебаний (1), где $\gamma = k_{эф}/m_{эф}$ ($\omega = \sqrt{k_{эф}/m_{эф}}$). Если рассматривается движение одного тела массой m, а x – его смещение от положения равновесия, то $m_{эф} = m$ и ответ получается таким же, как и при динамическом подходе. Однако если x – это, например, угол отклонения маятника или заряд конденсатора или если система состоит из нескольких материальных точек, которые движутся по-разному (см. задачу 10), то $m_{эф}$ может отличаться от массы системы.

Как будет видно из дальнейшего, динамический подход является основным для исследования колебаний, особенно в тех случаях, когда энергию записать или сложно, или вообще невозможно (если, например, система не консервативная). Однако в некоторых важных случаях энергетический подход оказывается более удобным, а вот уравнение движения записать затруднительно (в рамках школьной физики).

Начнем с хорошо известного примера – обычного математического маятника – и проанализируем его в рамках каждого из двух подходов.

Математический маятник – динамический подход. Уравнение движение маятника запишем в проекциях на касательное направление (т.е. для тангенциальной составляющей ускорения, кто знаком с этим понятием):

$$mx'' = F_x, \quad F_x = -mg\sin\alpha = -mg\sin\frac{x}{l} ,$$

где x – длина дуги (рис.1). Для малых α , т.е. для $x/l \ll 1$, получаем

$$F_x = -mg\frac{x}{l}, \quad x'' + \frac{g}{l}x = 0 ,$$

откуда следует

$$k_{эф} = \frac{mg}{l}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} .$$

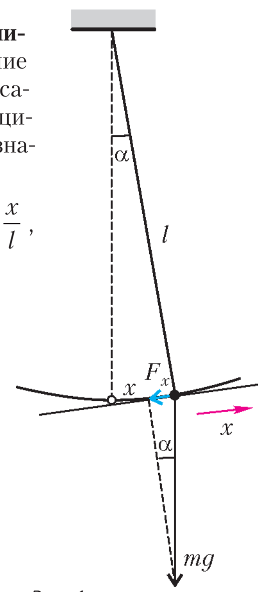

Рис. 1

Математический маятник – энергетический подход. Кинетическая энергия маятника равна

$$E_к = m\frac{x'^2}{2} ,$$

т.е. $m_{эф} = m$, а потенциальная энергия равна

$$E_п = mgh = mgl(1-\cos\alpha) =$$
$$= 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2} = mgl\frac{\alpha^2}{2} = \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2} .$$

Получаем такой же ответ для $k_{эф}$, а значит, и такой же ответ для частоты колебаний, как при динамическом подходе.

Рассмотрим несколько задач, где преимуществом обладает динамический подход, а энергетический подход либо менее удобен, либо вообще неприменим.

Задача 1. *Посередине легкого шнура длиной 2l закреплен маленький груз массой m (рис.2). Считая натяжение шнура постоянным и равным F, найдите период малых поперечных колебаний груза. Силу тяжести не учитывать.*

Решение. При отклонении груза на малое расстояние x в поперечном направлении

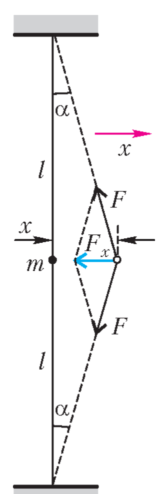

Рис. 2

возникает возвращающая сила, равная равнодействующей двух сил натяжения:

$$F_x = -2F\sin\alpha = -2F\frac{x}{l} = -\frac{2F}{l}x\,,$$

откуда получаем

$$k_{эф} = \frac{2F}{l}\,,\ \ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{эф}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2F}}\,.$$

Если учесть изменение силы натяжения за счет удлинения шнура, то получим поправку более высокого порядка малости.

Энергетический подход здесь возможен, но неудобен, к тому же вычисление потенциальной энергии шнура с постоянным натяжением не является привычным.

Задача 2. *Полупустая бутылка массой m плавает в воде в вертикальном положении. Найдите частоту малых вертикальных колебаний бутылки, если площадь сечения бутылки на уровне «ватерлинии» равна S.*

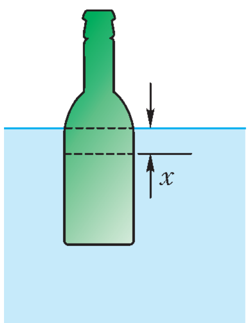

Рис. 3

Решение. В положении равновесия сила тяжести бутылки уравновешивается силой Архимеда. При дополнительном погружении бутылки на малое расстояние x объем погруженной части возрастает на Sx (рис.3), и возникает возвращающая сила, равная изменению силы Архимеда:

$$F_x = -\Delta F_{Арх} = -\rho g\Delta V_{погр} = -\rho gSx,$$

где ρ – плотность воды, откуда

$$k_{эф} = \rho gS\,,\ \ \omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m}} = \sqrt{\frac{\rho gS}{m}}\,.$$

Энергетический подход в этой задаче более сложен, поскольку как при вычислении потенциальной энергии надо учитывать как потенциальную энергию тела, так и потенциальную энергию вытесненной воды.

Задача 3. *В земном шаре прорезан воображаемый прямолинейный туннель, соединяющий два города (рис.4). Если обеспечить полное отсутствие трения при движении капсулы вдоль этого туннеля, то за какое время она, двигаясь только за счет силы тяготения, пролетит от одного города до другого? Землю считать однородным шаром.*

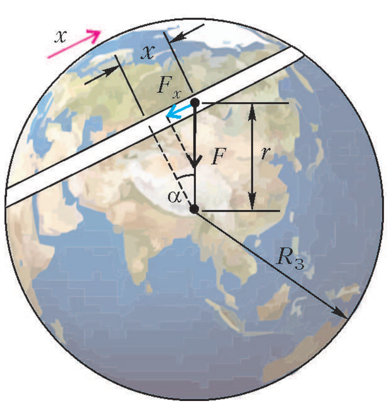

Рис. 4

Решение. Если разбить земной шар радиусом $R_З$ на сферические слои, то на тело, находящееся внутри на расстоянии r от центра, будут действовать только слои с радиусом меньше r, а сила, действующая со стороны любого слоя с радиусом больше r, строго равна нулю. (Доказательство этого утверждения можно найти во многих учебниках.) Следовательно, наша капсула притягивается к шару радиусом r и массой

$$M_r = M\frac{r^3}{R_З^3}$$

(масса пропорциональна объему). Сила притяжения равна

$$F = G\frac{mM_r}{r^2} = G\frac{mM}{R_З^2}\frac{r}{R_З} = mg\frac{r}{R_З}\,,$$

а возвращающая сила равна

$$F_x = -F\sin\alpha = -mg\frac{r}{R_З}\frac{x}{r} = -mg\frac{x}{R_З}\,.$$

Поскольку возвращающая сила пропорциональна x, тело будет совершать гармонические колебания. Время движения от одного города до другого равно половине периода этих колебаний:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k_{эф}}} = \pi\sqrt{\frac{R_З}{g}} \approx 42 \text{ мин.}$$

Интересно, что время не зависит от длины туннеля.

Энергетический подход в этой задаче хотя и возможен принципиально, но приводит к громоздким вычислениям.

Следующие несколько задач позволяют использовать только динамический подход, так как рассматриваемые в них системы не являются консервативными.

Задача 4. *На два цилиндра, вращающихся навстречу друг другу, положили массивную доску (рис.5). Найдите период малых колебаний доски в продольном направлении, если коэффициент трения между доской и цилиндрами μ, а расстояние между осями цилиндров l.*

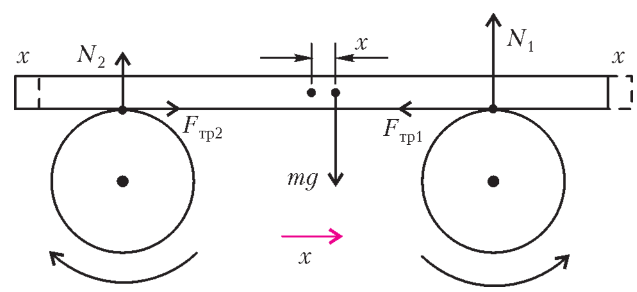

Рис. 5

Решение. Когда центр доски находится посередине между осями цилиндров, силы реакции цилиндров равны: $N_1 = N_2$, откуда следует равенство сил трения: $F_{тр1} = F_{тр2}$, т.е. доска находится в равновесии. При смещении доски на расстояние x вправо силы N_1 и $F_{тр1}$ увеличиваются, а силы N_2 и $F_{тр2}$ уменьшаются, и возникает возвращающая сила $F_x = F_{тр2} - F_{тр1}$. Запишем правило моментов относительно центра доски (доска не вращается):

$$N_1\frac{l}{2} - N_2\frac{l}{2} - mgx = 0\,,$$

откуда находим

$$F_x = \mu N_2 - \mu N_1 = -\frac{2\mu mg}{l}x\,.$$

Окончательно получаем

$$k_{эф} = \frac{2\mu mg}{l}, \quad \text{и} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{эф}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2\mu g}}\,.$$

Задача 5. *В теплоизолированном вертикальном цилиндре под поршнем находится одноатомный идеальный газ (рис.6). Найдите частоту малых колебаний поршня. Расстояние от поршня до дна цилиндра l. Над поршнем газа нет.*

Решение. При смещении поршня на малое расстояние x объем газа изменяется на $\Delta V = Sx$, в результате давление изменяется на Δp и возникает возвращающая сила

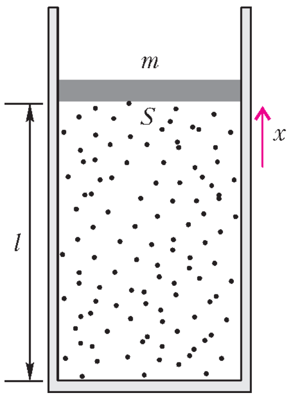

Рис. 6

$F_x = \Delta p S$. Чтобы найти Δp, запишем первый закон термодинамики:

$$0 = \Delta U + p\Delta V .$$

Поскольку внутренняя энергия одноатомного идеального газа равна $U = \frac{3}{2}pV$, то $\Delta U = \frac{3}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p$. Получаем

$$0 = \frac{3}{2}V\Delta p + \frac{5}{2}p\Delta V ,$$

откуда находим изменение давления:

$$\Delta p = -\frac{5}{3}p\frac{\Delta V}{V} = -\frac{5}{3}p\frac{x}{l}$$

и возвращающую силу:

$$F_x = \Delta p S = -\frac{5}{3}\frac{pS}{l}x = -\frac{5}{3}\frac{mg}{l}x$$

(из условия равновесия поршня $pS = mg$). Отсюда получаем

$$k_{эф} = \frac{5}{3}\frac{mg}{l}, \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m}} = \sqrt{\frac{5g}{3l}} .$$

Замечание. Если решать задачу в предположении постоянства температуры T (стенки хорошо проводят тепло, колебания достаточно медленные), то из уравнения состояния и условия $\Delta T = 0$ запишем

$$p\Delta V + V\Delta p = 0 ,$$

откуда для эффективной жесткости и частоты колебаний получим

$$k_{эф} = \frac{mg}{l}, \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} .$$

В следующей задаче рассматриваются колебания под действием кулоновских сил.

Задача 6 (ЕГЭ 2009). *По гладкой горизонтальной направляющей длиной 2l скользит бусинка массой m с положительным зарядом Q. На концах направляющей находятся одинаковые положительные заряды q (рис.7). Бусинка совершает малые колебания около положения равновесия с периодом T. Чему будет равен период колебаний бусинки, если: а) ее заряд увеличить в два раза; б) длину l увеличить в два раза?*

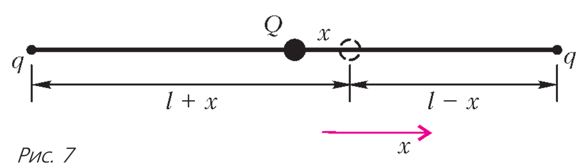

Рис. 7

Решение. Возвращающая сила, возникающая при смещении бусинки вдоль направляющей, равна равнодействующей двух кулоновских сил:

$$F_x = k\frac{qQ}{(l+x)^2} - k\frac{qQ}{(l-x)^2} = -k\frac{4qQlx}{\left(l^2-x^2\right)^2} \approx -\frac{4kqQ}{l^3}x .$$

Получаем

$$k_{эф} = \frac{4kqQ}{l^3}, \quad \text{и} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{эф}}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{4kqQ}} .$$

При увеличении заряда Q в два раза период колебаний уменьшится в $\sqrt{2}$ раз, а при увеличении длины l в два раза – увеличится в $2\sqrt{2}$ раз.

Отметим, что ответ на первый вопрос очевиден и без расчетов. Действительно, при увеличении Q в два раза все кулоновские силы (при заданном x) возрастут в два раза, следовательно, возвращающая сила возрастет в два раза, а значит, и $k_{эф}$ возрастет тоже в два раза.

Энергетический подход здесь возможен, но оказывается более громоздким, чем динамический. Начнем с того, что не все школьники знакомы с потенциальной энергией кулоновского взаимодействия (формулы для $E_п$ нет в учебниках базового уровня и она не входит в программу ЕГЭ). Кроме того, необходимо учесть потенциальную энергию в точке равновесия (от этого положения в энергетическом подходе отсчитывается потенциальная энергия). Получаем

$$E_п = k\frac{qQ}{l+x} + k\frac{qQ}{l-x} - 2k\frac{qQ}{l} = k\frac{2qQl}{l^2-x^2} - 2k\frac{qQ}{l} =$$

$$= k\frac{2qQl\left(l^2+x^2\right)}{l^4-x^4} - 2k\frac{qQ}{l} \approx \frac{4kqQ}{l^3}\frac{x^2}{2} .$$

В следующей задаче изучаемое движение ничем не похоже на колебательное, но получить ответ удается именно с помощью теории колебаний.

Задача 7. *Стержень длиной l, скользивший по гладкой горизонтальной поверхности вдоль своей длины, наезжает на шероховатый участок и останавливается, заехав на него частью своей длины. Какое время длилось торможение, если коэффициент трения между стержнем и шероховатым участком равен* μ*?*

Решение. В тот момент, когда на шероховатый участок заехала часть стержня длиной x (рис.8) и массой $m_1 = m(x/l)$, сила трения действует только на эту часть стержня:

$$F_{тр} = \mu m_1 g = \frac{\mu mg}{l}x .$$

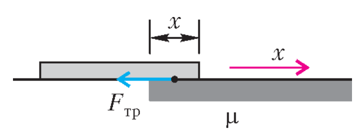

Рис. 8

Видно, что уравнение движения стержня

$$mx'' = -\frac{\mu mg}{l}x$$

совпадает с уравнением гармонических колебаний (1). Значит, движение стержня до остановки происходит по закону $x = A\sin\omega t$ (движение от центральной точки), где $\omega = \sqrt{\mu g/l}$, и время до остановки равно одной четверти периода воображаемых колебаний:

$$t = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}} .$$

Если в последней задаче энергетический подход не применим в принципе, то в следующей задаче, во многом на нее похожей, энергетический подход оказывается более удобным.

Задача 8. *Тонкую цепочку длиной l удерживают за верхний конец на наклонной плоскости, составляющей угол* α *с горизонтом. Через какое время после освобождения цепочки она полностью покинет наклонную плоскость, если вначале ее нижний конец находился у края наклонной плоскости? Трением пренебречь.*

Решение. Запишем механическую энергию через координату x верхнего конца цепочки (рис.9):

$$E_к = \frac{mx'^2}{2},$$

$$E_п = m_1 g \frac{x}{2}\sin\alpha = \left(m\frac{x}{l}\right) g \frac{x}{2}\sin\alpha = \frac{mg\sin\alpha}{l}\frac{x^2}{2}.$$

Видно, что энергия имеет такой же вид, как в уравнении (2). Следовательно, движение происходит по закону $x = l\cos\omega t$,

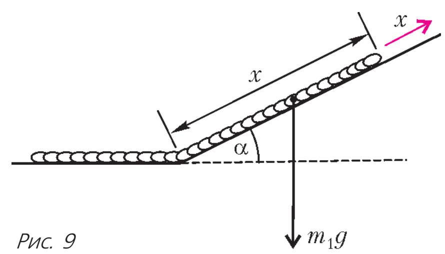

Рис. 9

где $\omega = \sqrt{(g\sin\alpha)/l}$ (движение от крайней точки к центру), и время до точки $x = 0$ занимает четверть периода:

$$t = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}}.$$

Можно ли решить эту задачу динамическим способом? Видимая трудность заключается в том, что разные части цепочки движутся с одинаковыми по модулю, но по-разному направленными ускорениями. Однако можно преодолеть эту трудность, применив метод, который часто используется в задачах с протяженными гибкими телами. Условно этот метод можно назвать «суммированием вдоль линии тела». Разобьем цепочку на маленькие кусочки и запишем второй закон Ньютона для каждого кусочка в проекциях на направление его движения (вдоль поверхности):

$$\Delta m a_x = (F_1)_x - (F_2)_x + (\Delta m g)_x,$$

куда вошли силы взаимодействия с соседними кусочками. Силы нормальной реакции поверхности ни в одно уравнение не входят. При суммировании всех уравнений силы взаимодействия между кусочками сократятся (по третьему закону Ньютона), и мы получим уравнение колебаний

$$mx'' = -m_1 g\sin\alpha,$$

где $m_1 = mx/l$ – масса части цепочки, находящейся на наклонной плоскости.

Замечание. Применение этого метода позволит нам, например, решить задачу, которая, являясь модификацией предыдущей, может быть рассмотрена только в рамках динамического подхода. Если к условию предыдущей задачи добавить трение о наклонную плоскость (оставив горизонтальную поверхность гладкой), то закон сохранения энергии применять нельзя (точнее, можно, но совсем иначе – с учетом работы силы трения), а метод суммирования вдоль цепочки дает уравнение колебаний

$$mx'' = -\left(m\frac{x}{l}\right) g\sin\alpha + \mu\left(m\frac{x}{l}\right) g\cos\alpha,$$

откуда находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}, \text{ и } t = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Рассмотрим теперь несколько задач, которые хорошо решаются энергетическим методом, но, как мы увидим, могут быть решены и в рамках динамического подхода.

Задача 9. *Невесомый стержень длиной 2l согнули посередине под углом 2α, прикрепили к его концам одинаковые грузы и повесили местом сгиба на тонкий гвоздь, вбитый в стену (рис.10). Пренебрегая трением, найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия.*

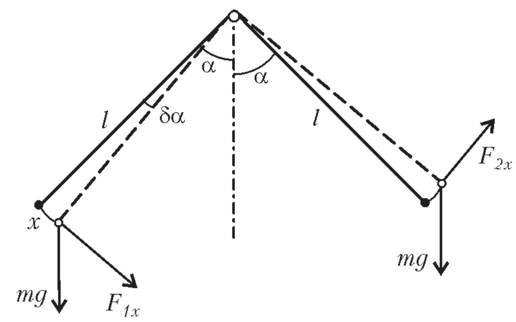

Рис. 10

Решение. Вообще говоря, рассматриваемая система представляет собой один из примеров так называемого *физического маятника*, т.е. твердого тела, которое может вращаться относительно горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс. Такие задачи решаются стандартно и легко в рамках динамики твердого тела. В школьных задачниках обычно рассматриваются модельные физические маятники, состоящие из нескольких точечных масс, скрепленных невесомыми стержнями. К такой конструкции можно применить энергетический метод, поскольку легко выразить как кинетическую, так и потенциальную энергию. Обозначив за x малое смещение каждого груза, а за $\delta\alpha = x/l$ – малый угол отклонения стержней, получим

$$E_к = 2m\frac{x'^2}{2},\ E_п = 2mg(l\cos\alpha)\frac{(\delta\alpha)^2}{2} = \frac{2mg\cos\alpha}{l}\frac{x^2}{2}.$$

При расчете $E_п$ мы нашли высоту подъема центра масс, который располагается под точкой подвеса на расстоянии $l\cos\alpha$ от нее. Для циклической частоты колебаний получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{l}}.$$

На первый взгляд, обычный динамический подход здесь не применим. В самом деле, как учесть силу реакции стержней, которые в точке подвеса взаимодействуют с гвоздем? Однако на помощь приходит невесомость конструкции, из которой следует следующее утверждение (правило моментов для жесткой невесомой конструкции): сумма моментов внешних сил равна нулю, даже если невесомая конструкция движется. Введем силы F_{1x} и F_{2x} (см. рис.10), действующие на грузы со стороны стержней (точнее, перпендикулярные стержням составляющие). Так как на стержни со стороны грузов действуют такие же силы, то из правила моментов $F_{1x}l + F_{2x}l = 0$ следует, что $F_{1x} + F_{2x} = 0$. Уравнения движения для грузов имеют вид

$$mx'' = F_{1x} + mg\sin(\alpha - \delta\alpha)$$

и

$$mx'' = F_{2x} - mg\sin(\alpha + \delta\alpha).$$

Сложив эти уравнения, получим

$$2mx'' = -2mg\cos\alpha\sin\delta\alpha, \text{ или } x'' = -\frac{g\cos\alpha}{l}x.$$

Задача 10. *Невесомый стержень длиной 2l может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. К свободному концу стержня и к его середине прикрепили одинаковые грузы. Найдите частоту*

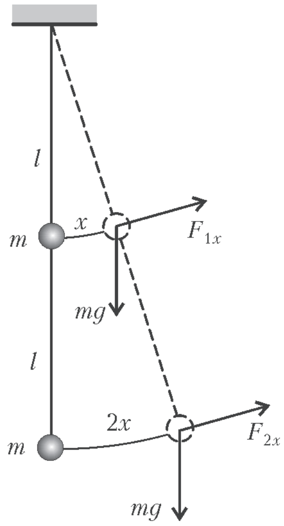

Рис. 11

малых колебаний такой системы около положения равновесия.

Решение. Решим задачу сначала энергетическим методом. Обозначим за x смещение верхнего груза (рис.11), тогда смещение нижнего груза равно $2x$ и скорости грузов равны x' и $2x'$. Кинетическая энергия системы равна

$$E_к = m\frac{x'^2}{2} + m\frac{(2x')^2}{2} = 5m\frac{x'^2}{2},$$

а потенциальная энергия равна

$$E_п = \frac{mg}{l}\frac{x^2}{2} + \frac{mg}{2l}\frac{(2x)^2}{2} = \frac{3mg}{l}\frac{x^2}{2}.$$

Получаем $m_{эф} = 5m$, $k_{эф} = \frac{3mg}{l}$, и

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{эф}}{m_{эф}}} = \sqrt{\frac{3g}{5l}}.$$

Решим теперь эту же задачу динамическим методом. Если силы, действующие на грузы в перпендикулярном стержню направлении, равны F_{1x} и F_{2x} (см. рис.11), то из уравнения моментов для невесомого стержня получим

$$F_{1x}l + F_{2x}\cdot 2l = 0\text{, т.е. } F_{1x} + 2F_{2x} = 0.$$

Запишем уравнения движения грузов:

$$mx'' = F_{1x} - mg\frac{x}{l}$$

и

$$m(2x)'' = F_{2x} - mg\frac{2x}{2l},$$

домножим второе уравнение на 2 и сложим их. Получим

$$5mx'' = -\frac{3mg}{l}x\text{, и } \omega = \sqrt{\frac{3g}{5l}}.$$

Задача 11. *Стержень длиной l изогнули по дуге окружности в виде полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости. Найдите циклическую частоту малых колебаний полукольца.*

Решение. Эта задача красиво решается энергетическим методом (рис.12). Обозначим за x смещение полукольца из

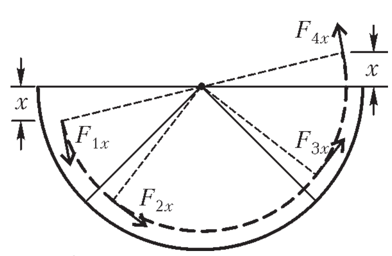

Рис. 12

положения равновесия. Кинетическая энергия полукольца равна

$$E_к = m\frac{x'^2}{2},$$

а изменение потенциальной энергии удается рассчитать благодаря свойствам симметрии дуги окружности. Действительно, при повороте дуги на малый угол все изменение в распределении масс сводится к перемещению кусочка длиной x и массой $\Delta m = m(x/l)$ с одного конца дуги на другой. Изменение потенциальной энергии при этом будет равно

$$E_п = \Delta mgx = \frac{2mg}{l}\frac{x^2}{2}.$$

Получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg/l}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Для решения задачи в рамках динамического подхода применим метод суммирования уравнений движения вдоль линии полукольца, разобранный в задаче 8. При этом сумма всех сил взаимодействия с невесомыми спицами (в проекции на линию дуги) равна нулю, поскольку равен нулю суммарный момент этих сил относительно оси вращения:

$$F_{1x}R + F_{2x}R + \ldots = 0$$

(см. задачу 9). При суммировании проекций сил тяжести вклады участков, симметричных относительно нижней точки, сокращаются и остается только сила тяжести кусочка длиной $2x$ и массой $m(2x/l)$. Получаем уравнение движения

$$mx'' = -m\frac{2x}{l}g = -\frac{2mg}{l}x,$$

которое дает такой же ответ для частоты колебаний, как и при энергетическом подходе.

Упражнения

1. В U-образную трубку сечением S налили жидкость объемом V. Найдите циклическую частоту малых колебаний жидкости около положения равновесия. Трением пренебречь.

2. Тело массой m плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$). Найдите период малых вертикальных колебаний тела, если площадь сечения тела на уровне границы раздела жидкостей равна S.

3. Невесомый стержень длиной $2l$ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню. К концам стержня прикрепили грузы массами m и $2m$. Найдите частоту малых колебаний системы около положения равновесия.

4. Тонкий стержень длиной l движется вдоль своей длины по гладкой горизонтальной плоскости и наезжает на большой шероховатый участок. Через какое время стержень остановится, если к тому моменту, когда он целиком въехал на этот участок, его скорость уменьшилась вдвое? Коэффициент трения между стержнем и шероховатой поверхностью равен μ.

Указание. Первый отрезок времени t_1 и скорость v_0 найдите из уравнений $\frac{v_0}{2} = v_0\cos\omega t$, $l = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$, где $\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{l}}$ (см. задачу 7 статьи).