Разрезания металлического прямоугольника

М.СКОПЕНКОВ, М.ПРАСОЛОВ, С.ДОРИЧЕНКО

Задачи на разрезание наглядны и красивы, но иногда их совсем не просто решить. С давних пор они вдохновляли дизайнеров и архитекторов. Ученые обратили на них внимание, когда обнаружилась их неожиданная связь с физикой и теорией вероятностей. Об одной из таких задач и пойдет речь в этой статье.

Какие прямоугольники можно разрезать на квадраты

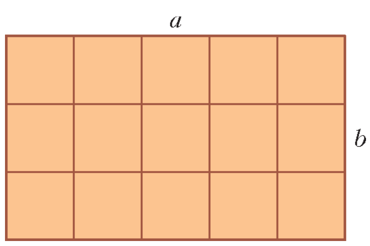

Рис.1. Прямоугольник $a \times b$ разрезается на $a \cdot b$ одинаковых квадратов

Прямоугольник размером $a \times b$, где a и b – целые числа, легко разрезается на $a \cdot b$ одинаковых квадратов (рис.1). Так же легко разрезать на равные квадраты прямоугольник с рациональным отношением сторон.

Естественный вопрос: какие прямоугольники можно разрезать на квадраты не обязательно одного и того же размера? Оказывается, ответ тот же самый:

Теорема Дена о разрезании прямоугольника. *Если прямоугольник можно разрезать на квадраты (не обязательно равные), то отношение длин его сторон рационально.*

Эту теорему открыл Макс Ден в 1903 году.

Его доказательство было довольно сложным. Впоследствии появились более простые. Мы приведем одно из них, принадлежащее Р.Л.Бруксу, К.А.Б.Смиту, А.Г.Стоуну и У.Т.Татту. Они придумали его, еще будучи студентами.[1] Это доказательство основано на физической интерпретации, использующей электрические цепи. При этом физические соображения служат отправной точкой, а само доказательство чисто математическое.

Итак, пусть прямоугольник разрезан на квадраты. Чтобы найти отношение его сторон, достаточно найти стороны этих квадратов с точностью до пропорциональности. Покажем на примере, как это можно сделать.

Как найти стороны квадратов

На рисунке 2 изображено фото[2] прямоугольного шкафа с квадратными полками. Представим себе, что мы хотим изготовить такой же шкаф. Для этого нам в первую очередь нужно узнать размеры полок. Просто измерить эти величины на фотографии не удастся, так как мы видим шкаф «под углом», а значит, истинные длины искажены.

Рис.2. Прямоугольный шкаф с квадратными полками

Для того, чтобы найти эти размеры, занумеруем квадраты (полки), как показано на рисунке 3. Будем считать, что горизонтальная сторона прямоугольника (шкафа) равна 1, а вертикальную сторону (без учета ножек) обозначим через x. Сторону квадрата k обозначим через x_k.

[1] *Увлекательный рассказ об этом можно прочитать в главе «Квадрирование квадрата» книги М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М.: Мир, 1999).*

[2] *Фото с сайта http://www.mynl.com/ww/project11.html*

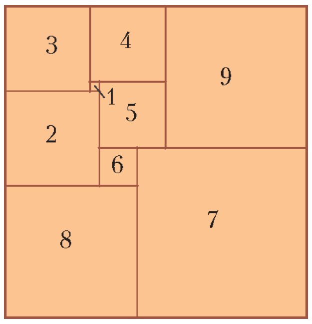

Рис.3. Нумерация квадратов

К левой стороне прямоугольника примыкают квадраты 2, 3 и 8, откуда $x = x_2 + x_3 + x_8$. К правой стороне квадрата 3 примыкают квадраты 1 и 4: $x_3 = x_1 + x_4$. Аналогично, $x_6 + x_8 = x_7$, $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$, $x_4 + x_5 = x_9$. Равенство для правой стороны прямоугольника мы не записываем, поскольку оно следует из предыдущих (получается сложением всех выписанных равенств). Сформулируем наше наблюдение, (рис. 4):

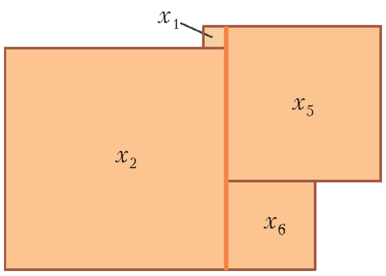

Рис.4. Условие вертикальной стыковки: $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$

Условие вертикальной стыковки. *Для каждого вертикального разреза сумма сторон квадратов, примыкающих к разрезу слева, равна сумме сторон квадратов, примыкающих справа. Вертикальная сторона прямоугольника равна сумме сторон примыкающих к ней квадратов.* [3]

Заменяя слово «вертикальный» на «горизонтальный», а слова «слева» и «справа» – на «сверху» и «снизу», мы получаем *условие горизонтальной стыковки*, (рис. 5).

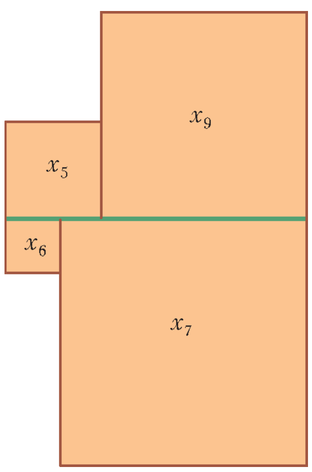

Рис.5. Условие горизонтальной стыковки: $x_5 + x_9 = x_6 + x_7$

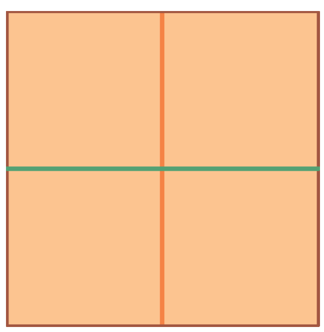

Рис.6. В таком разрезании один горизонтальный и два вертикальных разреза

[3] *Для разрезаний, у которых в некоторых точках сходится сразу 4 квадрата (как на рисунках 1 или 6), надо уточнить понятие разреза. Покрасим все горизонтальные стороны квадратов, не лежащие на периметре прямоугольника, в зеленый цвет. Они объединятся в несколько зеленых отрезков, которые мы и назовем* горизонтальными разрезами. *Вертикальные стороны квадратов, не лежащие на периметре, покрасим в оранжевый цвет. Полученные оранжевые отрезки делятся горизонтальными разрезами на части, именно эти части мы и назовем* вертикальными разрезами *(рис. 6).*

Из этого условия в нашем примере со шкафом получим: $1 = x_3 + x_4 + x_9$, $x_4 = x_1 + x_5$, $x_1 + x_3 = x_2$, $x_5 + x_9 = x_6 + x_7$, $x_2 + x_6 = x_8$. Условие для нижней стороны прямоугольника мы не записываем, поскольку оно следует из остальных.

Итак, осталось решить систему уравнений

$$x = x_2 + x_3 + x_8,\ x_3 = x_1 + x_4,\ x_6 + x_8 = x_7,$$
$$x_1 + x_2 = x_5 + x_6,\ x_4 + x_5 = x_9,$$
$$x_3 + x_4 + x_9 = 1,\ x_4 = x_1 + x_5,\ x_1 + x_3 = x_2,$$
$$x_5 + x_9 = x_6 + x_7,\ x_2 + x_6 = x_8.$$

Такие уравнения называются *линейными*.

Как решить систему линейных уравнений [4]

Будем последовательно выражать неизвестные. В первом уравнении неизвестная x выражена через другие неизвестные. Больше x нигде не участвует, поэтому переходим ко второму уравнению. В нем неизвестная x_3 выражена через x_1 и x_4. Подставим это выражение в другие уравнения системы, содержащие неизвестную x_3 – в первое, шестое и восьмое. Получим систему

$$x = x_2 + \underline{x_1} + \underline{x_4} + x_8,\ \underline{x_3} = \underline{x_1} + \underline{x_4},\ x_6 + x_8 = x_7,$$
$$x_1 + x_2 = x_5 + x_6,\ x_4 + x_5 = x_9,$$
$$\underline{x_1} + \underline{2x_4} + x_9 = 1,\ x_4 = x_1 + x_5,\ \underline{2x_1} + \underline{x_4} = x_2,$$
$$x_5 + x_9 = x_6 + x_7,\ x_2 + x_6 = x_8.$$

Она равносильна исходной. Но теперь неизвестная x_3 участвует только во втором уравнении. Перейдем к третьему уравнению. Подставляя выражение $x_7 = x_6 + x_8$ в девятое уравнение, получим систему, содержащую x_7 только в третьем уравнении:

$$x = x_2 + x_1 + x_4 + x_8,\ x_3 = x_1 + x_4,\ \underline{x_6} + \underline{x_8} = \underline{x_7},$$
$$x_1 + x_2 = x_5 + x_6,\ x_4 + x_5 = x_9,$$
$$x_1 + 2x_4 + x_9 = 1,\ x_4 = x_1 + x_5,\ 2x_1 + x_4 = x_2,$$
$$x_5 + x_9 = \underline{2x_6} + \underline{x_8},\ x_2 + x_6 = x_8.$$

Будем продолжать таким же образом дальше. В итоге мы получим систему «уравнений»

$$x = 33/32,\ x_3 = 9/32,\ x_7 = 1/2,\ x_1 = 1/32,$$
$$x_4 = 1/4,\ x_9 = 15/32,\ x_5 = 7/32,\ x_2 = 5/16,$$
$$x_8 = 7/16,\ x_6 = 1/8.$$

Решение исходной системы найдено! Значения неизвестных $x_1, \ldots, x_9$ – это и есть стороны квадратов. В нашем примере прямоугольник оказался разрезан на попарно различные квадраты.

Задача 1. Докажите, что плоскость можно замостить попарно различными квадратами, длины сторон которых: а) рациональные; б) целые числа.

А можно ли *квадрат* разрезать на попарно различные квадраты? Задача эта появилась в начале прошлого века и оказалась очень сложной. Решили ее только

[4] *Подробно об этом рассказывается в статье В.Гутенмахера «Системы линейных уравнений» в «Кванте» №1 за 1984 год.*

спустя несколько десятилетий уже известные нам четыре студента и независимо от них Р.Шпраг. Но если Р.Шпраг использовал сложный перебор, то нашим студентам найти решение помогла физическая интерпретация. Потом было найдено много разных примеров, пример с наименьшим количеством квадратов изображен на рисунке 7.

Рис.7. Квадратное одеяло, сшитое из квадратных лоскутков

Задача 2*. Можно ли куб разрезать на несколько попарно-различных кубиков?

Когда наш метод работает

Итак, для шкафа мы нашли все интересующие нас размеры. Но будет ли так и для любого другого разрезания? Ясно, что если решение системы, построенной по условиям стыковки, единственно, то мы найдем его нашим методом. И, конечно же, оно будет рациональным: ведь коэффициенты системы рациональны, а мы, выражая неизвестные, используем только сложение, вычитание, умножение и деление. Это простое наблюдение мы назовем так:

Теорема о решении системы. *Пусть система линейных уравнений с рациональными коэффициентами имеет единственное решение. Тогда это решение состоит из рациональных чисел.*

Бывают системы линейных уравнений, у которых решение не единственно. Например, система

$$x_1 + x_2 = 0\,,\ \ x_1 + x_3 = 1$$

имеет бесконечно много решений: в качестве x_1 можно взять любое число t, в качестве x_2 число $-t$, а в качестве x_3 число $1 - t$. У нее есть и иррациональные решения (когда t иррационально).

Совершенно не очевидно, что условий стыковки достаточно, чтобы найти стороны квадратов, т.е. что система, построенная по реальному разрезанию, имеет единственное решение. Оказывается, что это всегда так: наш метод позволяет *однозначно* восстановить все размеры по фотографии разрезания (если мы считаем горизонтальную сторону прямоугольника равной 1). Мы докажем это с помощью физической интерпретации. А теорема Дена о разрезании прямоугольника отсюда сразу следует по теореме о решении системы.

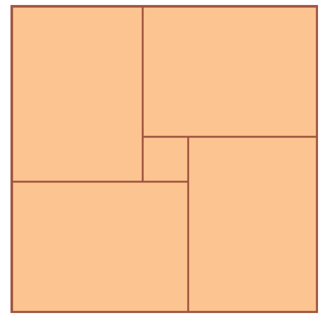

Рис.8. План квартиры

Задача 3. Архитектор нарисовал план квартиры. На плане (рис. 8) показано, как должны примыкать комнаты друг к другу, но их размеры искажены. Можно ли сделать все комнаты квадратными?

Физическая интерпретация

Оказывается, каждому разрезанию прямоугольника на квадраты можно сопоставить электрическую цепь. Если мы найдем токи в этой электрической цепи, то мы найдем и стороны квадратов. Но обо всем по порядку.

Мы будем рассматривать *математическую модель* электрической цепи.[5] Вместо физических законов и опытных фактов у нас будут определения, аксиомы, теоремы.

С математической точки зрения *электрическая цепь* – это связный плоский граф, каждому ребру которого сопоставлено некоторое положительное число, причем концы одного из ребер отмечены знаками «+» и «–». Ребро с отмеченными концами называется *батарейкой*, остальные – *резисторами*. Число, сопоставленное батарейке, называется *напряжением* батарейки, а числа, сопоставленные резисторам, – их *сопротивлениями*. Вершины графа называются *узлами*, от-

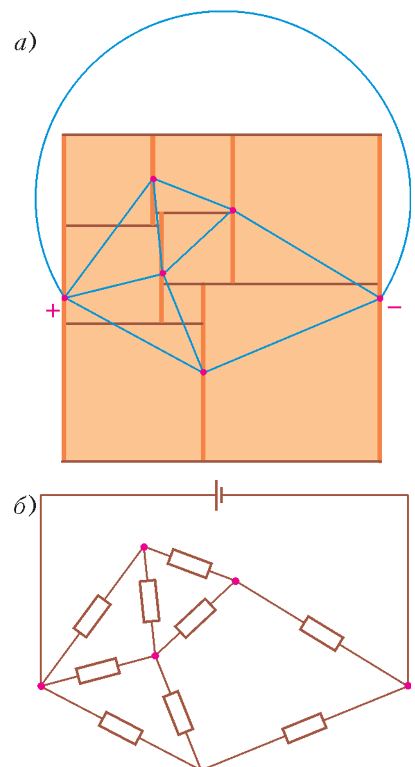

Рис.9. а) Построение электрической цепи по разрезанию.
б) Общепринятое изображение электрической цепи

---

[5] *Желающим подробно разобраться в физике происходящего рекомендуем, например, статью «Правила Кирхгофа» в «Кванте» №1 за 1985 год.*

меченные узлы батарейки – *положительной* и *отрицательной клеммами*.

По разрезанию цепь строится так (рис. 9,*а*). На каждой вертикальной линии разреза отметим по точке – это будут узлы электрической цепи. На вертикальных сторонах прямоугольника выберем по клемме, отметим их знаками «+» (на левой стороне) и «–» (на правой стороне) и соединим с батарейкой.

Каждый квадрат ограничен слева и справа двумя вертикальными разрезами. В электрической цепи его изображением служит резистор, соединяющий два узла на этих разрезах (узлы могут оказаться на продолжениях сторон квадрата). Сопротивление каждого резистора положим равным 1.[6] Напряжение батарейки также положим равным 1. Нужная нам электрическая цепь построена (рис. 9, *б*).

Как найти токи в электрической цепи

Теперь объясним, что такое *токи* в электрической цепи и как их можно найти.

Занумеруем резисторы, как показано на рисунке 10 (т.е. так же, как соответствующие квадраты). Нарисуем на каждом резисторе стрелку слева направо, а на батарейке – справа налево, т.е. от отрицательной клеммы к положительной.[7] Электрическая цепь делит плоскость на части. Обходя границу любой части по часовой стрелке, получим замкнутую цепочку ребер, называемую *контуром.*[8]

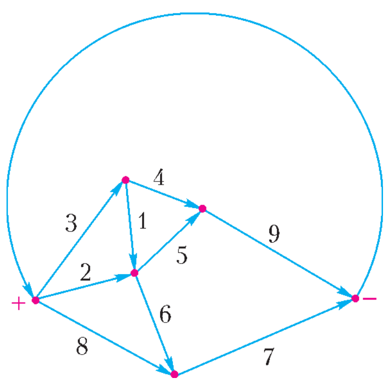

Рис.10. Нумерация резисторов и выбор направлений на резисторах и батарейке

Сила тока через k-й резистор – это просто некоторое действительное число I_k, сопоставленное резистору. *Сила тока* через батарейку – это некоторое действительное число I. *Напряжение* на резисторе – это произведение силы тока на сопротивление резистора. (А для батарейки напряжение вообще от тока не зависит. Такая батарейка в физике называется *идеальной.*) Силы тока определяются следующими аксиомами (правилами), проиллюстрированными на рисунках 12, 13, 14.

---

[6] *Мы раз и навсегда фиксируем единицы измерения: сопротивления будем измерять в килоомах, напряжения – в вольтах, токи – в миллиамперах. В дальнейшем единицы измерения не указываются.*

[7] *Мы нарисовали предполагаемые направления тока. Читателя может смутить, что в одном из ребер ток направлен от «минуса» к «плюсу». Но это действительно так: ток в резисторах идет от «плюса» к «минусу», а вот в батарейке – наоборот.*

[8] *Для простоты будем считать, что контур не проходит ни через какое ребро дважды. Это не всегда так (рис. 11). Однако в дальнейшем мы увидим, что это так для любой цепи, построенной по разрезанию прямоугольника.*

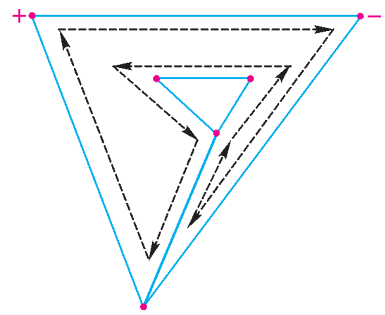

Рис.11. Контур, проходящий по ребру дважды

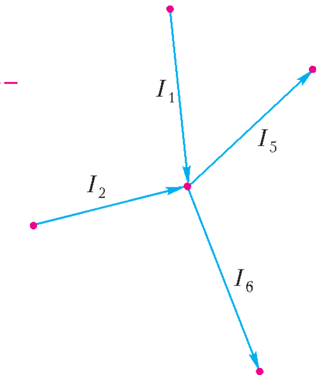

Рис.12. Первое правило Кирхгофа: $I_1 + I_2 = I_5 + I_6$

Первое правило Кирхгофа. *В каждом узле сумма входящих токов равна сумме выходящих.*

Для нашего примера (см. рис.10) получаем такие уравнения:

$$I = I_2 + I_3 + I_8\,,$$
$$I_3 = I_1 + I_4\,,\quad I_6 + I_8 = I_7\,,$$
$$I_1 + I_2 = I_5 + I_6\,,$$
$$I_4 + I_5 = I_9\,.$$

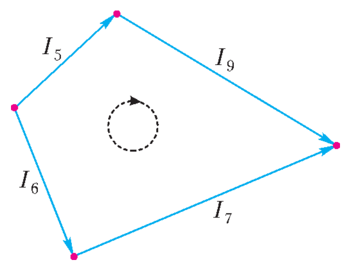

Рис.13. Второе правило Кирхгофа для контура без батарейки: $I_5 + I_9 - I_6 - I_7 = 0$ (учтено, что все сопротивления в нашем примере равны 1)

(Мы не записываем уравнение для правой клеммы, поскольку оно непосредственно следует из остальных.)

Второе правило Кирхгофа. *Для любого контура сумма напряжений на резисторах (с соответствующими знаками) равна напряжению батарейки (с соответствующим знаком), если контур содержит батарейку, а иначе – равна нулю. Напряжение на резисторе берется со знаком «+», если направление стрелки на резисторе совпадает с направлением обхода контура, а иначе – со знаком «–». Так же определяется знак для батарейки.*

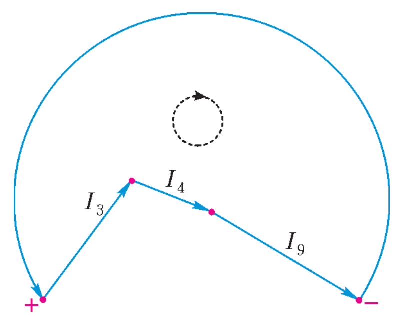

Рис.14. Второе правило Кирхгофа для контура с батарейкой: $-I_3 - I_4 - I_9 = -1$ (учтено, что напряжение батарейки в нашем примере равно 1)

Поскольку у нас напряжение батарейки равно 1 и все сопротивления равны 1, получаем уравнения

$$-I_3 - I_4 - I_9 = -1\,,\quad I_4 - I_1 - I_5 = 0\,,$$
$$I_1 + I_3 - I_2 = 0\,,\quad I_5 + I_9 - I_6 - I_7 = 0\,,\quad I_2 + I_6 - I_8 = 0\,.$$

(Мы не записываем уравнение для контура вокруг всей цепи, поскольку оно непосредственно следует из остальных.) Решая полученную систему уравнений, находим все силы токов:

$$I = 33/32\,,\ I_3 = 9/32\,,\ I_7 = 1/2\,,\ I_1 = 1/32\,,\ I_4 = 1/4\,,$$
$$I_9 = 15/32\,,\ I_5 = 7/32\,,\ I_2 = 5/16\,,\ I_8 = 7/16\,,\ I_6 = 1/8\,.$$

У нас есть аксиомы (правила Кирхгофа), которые мы заимствовали из физики, а все остальные утверждения об электрических цепях мы выводим из них чисто математически.

Задача 4. Выведите из второго правила Кирхгофа более общее правило, которое получается, если заменить в формулировке контур на любую замкнутую цепочку ребер (не проходящую ни через какую вершину дважды).

Правила Кирхгофа совпадают с условиями стыковки

Удивительным образом правила Кирхгофа дают нам ту же самую систему уравнений на силы токов, что и условия стыковки на длины сторон квадратов! Докажем это.

Рассмотрим первое правило Кирхгофа. Зафиксируем вертикальный разрез и соответствующий ему узел. Входящие в узел токи соответствуют сторонам квадратов, примыкающим к разрезу слева, а выходящие из узла – сторонам квадратов справа (рис. 15). Значит, первое правило Кирхгофа в этом узле для токов совпадает с правилом вертикальной стыковки.

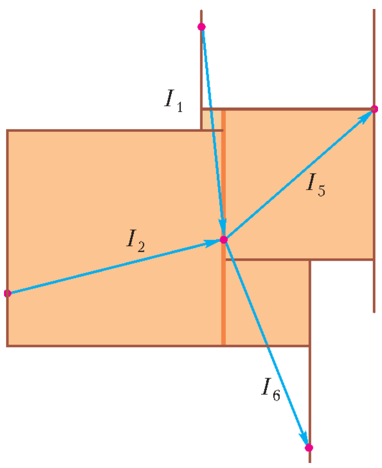

Рис.15. Первое правило Кирхгофа и условие вертикальной стыковки

Рассмотрим второе правило Кирхгофа. Возьмем любой горизонтальный разрез. Ясно, что резисторы, соответствующие примыкающим к нему квадратам, образуют контур (рис. 16). Квадраты сверху образуют верхнюю часть контура, а квадраты снизу – нижнюю. Поскольку все сопротивления единичны, напряжение на каждом резисторе равно силе тока на нем. Значит, правило горизонтальной стыковки для нашего разреза совпадает со вторым правилом Кирхгофа.

Наоборот, возьмем любой контур. Его самый левый узел соответствует некоторому вертикальному разрезу. К разрезу примыкают справа два квадрата, соответствующие двум выходящим из узла резисторам контура. Рассмотрим горизонтальный разрез, к которому примыкают эти квадраты. Снова, все квадраты, примыкающие к разрезу сверху, образуют верхнюю часть нашего контура, а все примыкающие снизу – нижнюю. Значит, второе правило Кирхгофа для нашего контура совпадает с правилом горизонтальной стыковки.

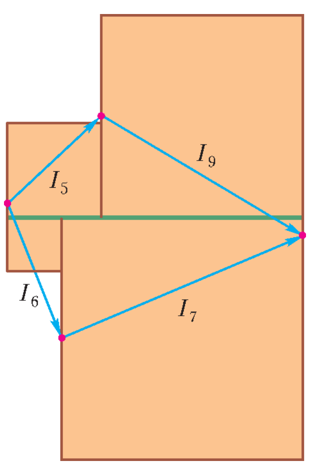

Рис.16. Второе правило Кирхгофа и условие горизонтальной стыковки

Итак, правила Кирхгофа совпадают с условиями стыковки. Значит ли это, что токи совпадают с длинами сторон квадратов? Да, но только если наша система уравнений имеет *лишь одно* решение. В этом случае, изготовив по разрезанию электрическую цепь, длины сторон квадратов можно было бы найти… просто измерив токи!

Единственность распределения токов в электрической цепи

Теорема единственности. *Пусть сопротивления всех резисторов цепи положительны. Тогда система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа, в которой силы тока – неизвестные, а напряжение батарейки и сопротивления резисторов известны, имеет не более одного решения.*

На «физическом уровне строгости» эта теорема почти очевидна. Пусть решений два. Вычтем одно из другого. Тогда напряжение батарейки станет нулевым, а ток не везде будет равен нулю, чего не бывает.

С точки зрения математики это объяснение нельзя считать доказательством. Нельзя исключить возможность, что наша система уравнений имеет какие-то «посторонние» решения, которых не бывает в «реальной» электрической цепи. Да и в нашем рассуждении мы нигде не использовали, что сопротивления всех резисторов строго положительны. А без этого предположения теорема неверна: в кольце из сверхпроводника (т.е. резистора с нулевым сопротивлением) может течь ненулевой ток при нулевом напряжении!

Вот как можно математически строго доказать теорему единственности:

Доказательство теоремы единственности. Пусть есть два решения. Первое будем обозначать $I_1, I_2, \ldots$, второе $J_1, J_2, \ldots$ Наша цель – доказать, что их разность $I_1 - J_1,\ I_2 - J_2, \ldots$ нулевая.

Рассмотрим любое уравнение нашей системы. Пусть, например, оно записано для узла, изображенного на рисунке 12. Подставив в него первое решение, получим: $I_1 + I_2 = I_5 + I_6$. Подставив второе, получим $J_1 + J_2 = J_5 + J_6$. Вычтем одно равенство из другого: $(I_1 - J_1) + (I_2 - J_2) = (I_5 - J_5) + (I_6 - J_6)$. Получается, что разность наших решений удовлетворяет тому же самому уравнению. Так будет и для уравнения, записанного для любого другого узла или любого контура, не содержащего батарейку.

Пусть теперь уравнение записано для контура, содержащего батарейку, например для контура на рисунке 14. Подставляя в это уравнение наши решения, получим равенства $I_3 + I_4 + I_9 = 1$ и $J_3 + J_4 + J_9 = 1$. Вычтем одно равенство из другого: $(I_3 - J_3) + (I_4 - J_4) + (I_9 - J_9) = 0$. Получается, что разность наших решений удовлетворяет тому же самому уравнению, только с нулевой правой частью. Но в правой части исходного уравнения стояло напряжение батарейки. Получаем, что разность наших решений подчиняется правилам

Кирхгофа для той же цепи, только с нулевым напряжением батарейки.

Теорема единственности свелась к такому утверждению:

Принцип техники безопасности. *Если напряжение батарейки равно нулю, то и все силы тока в электрической цепи нулевые.*

Доказательство. Пусть в цепи есть ненулевые токи. Если сила тока на каких-то ребрах отрицательна, то поменяем на каждом из них направление стрелки, знак силы тока и знак напряжения. Ясно, что правила Кирхгофа по-прежнему будут выполняться, а все силы тока станут неотрицательны. Начнем движение с ребра, на котором сила тока ненулевая, и будем двигаться в направлении стрелок. Из первого правила Кирхгофа следует, что мы можем неограниченно продолжать движение (ведь если у вершины есть положительный входящий ток, то есть и выходящий). Рано или поздно мы впервые вернемся в вершину, в которой уже побывали. Значит, мы получим замкнутую цепочку ребер, на которых сила тока неотрицательна, причем хотя бы на одном из них она больше нуля. По задаче 4 получаем противоречие со вторым правилом Кирхгофа, потому что напряжение батарейки равно нулю. Принцип техники безопасности, а вместе с ним и теорема единственности доказаны.

Задача 5*. Выведите из правил Кирхгофа, что если напряжение батарейки положительно, то сила тока через нее: а) не равна нулю; б) положительна.

Задача 6. Напряжение батарейки увеличили в n раз. Докажите, что все силы тока в цепи также увеличились в n раз.

Доказательство теоремы Дена о разрезании прямоугольника

Пусть прямоугольник разрезан на квадраты. Расположим его так, чтобы две его стороны были вертикальны, а две другие – горизонтальны. Будем считать, что длина горизонтальной стороны равна 1. Ясно, что стороны всех квадратов либо вертикальны, либо горизонтальны. Рассмотрим электрическую цепь, соответствующую разрезанию. Система уравнений, построенная по правилам Кирхгофа для этой цепи, имеет решение – в качестве сил токов можно взять длины сторон квадратов. По теореме единственности других решений у этой системы нет. Значит, по теореме о решении системы оно состоит из рациональных чисел. Поэтому длины сторон всех квадратов, а следовательно, и отношение сторон прямоугольника рациональны. Теорема Дена доказана.

Задача 7. Покажите, что квадрат нельзя разрезать на подобные (но не обязательно равные) прямоугольники с отношением сторон $\sqrt{2}$.

Десерт

Мы ответили на все вопросы, поставленные в статье, но ее название осталось загадкой. Объяснение названия мы оставили на десерт: это будет наглядная картинка электрической цепи, построенной по разрезанию. Раньше физическая интерпретация выглядела как некоторый трюк, теперь *наша цель – показать, как до нее можно додуматься*.

Пусть большой прямоугольник разрезан на меньшие (не обязательно квадраты), и требуется выразить отношение сторон большого прямоугольника через отношения сторон меньших. Расположим большой прямоугольник так, чтобы две его стороны были вертикальны, а две другие – горизонтальны. *Отношением сторон* прямоугольника договоримся считать отношение длины его горизонтальной стороны к длине вертикальной.

Пример 1. Прямоугольник с отношением сторон R разделен вертикальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон R_1 и R_2 (рис.17,*а*). Покажем, что $R = R_1 + R_2$. Действительно, пусть вертикальная сторона большого прямоугольника равна x. Тогда горизонтальные стороны меньших прямоугольников равны R_1x и R_2x. Значит, $R = (R_1x + R_2x)/x = R_1 + R_2$.

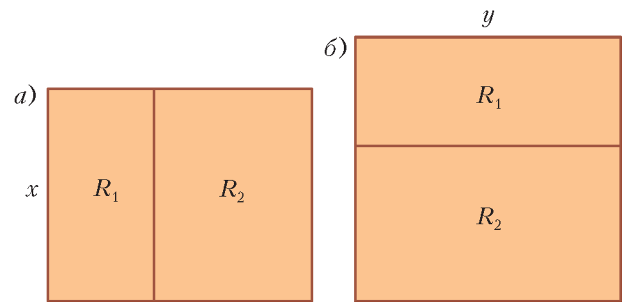

Рис.17. Разрезания прямоугольника на 2 прямоугольника

Пример 2. Прямоугольник с отношением сторон R разделен горизонтальным разрезом на два прямоугольника с отношениями сторон R_1 и R_2 (рис.17,*б*). Покажем, что $R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$. Действительно, пусть горизонтальная сторона большого прямоугольника равна y. Тогда вертикальные стороны меньших прямоугольников равны y/R_1 и y/R_2. Значит,

$$R = \frac{y}{y/R_1 + y/R_2} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Да это же формулы сопротивления цепей из последовательно и параллельно соединенных резисторов! Объяснение очень простое (рис. 18, 19).

Представим себе, что у нас есть прямоугольная металлическая пластинка. Соединим ее вертикальные стороны с клеммами батарейки (точнее, к каждой из вертикальных сторон по всей длине приложим проводник, соединенный с соответствующей клеммой). Тогда через пластинку пойдет ток в горизонтальном направлении. Пластинка играет роль резистора. Как известно из физики, ее сопротивление пропорционально отношению длины к площади вертикального поперечного сечения. Иными словами, сопротивление пластинки пропорционально отношению ее сторон. Для простоты будем считать коэффициент пропорциональности равным 1.

Для примера 1 приставим друг к другу две прямоугольные пластинки одинаковыми вертикальными сто-

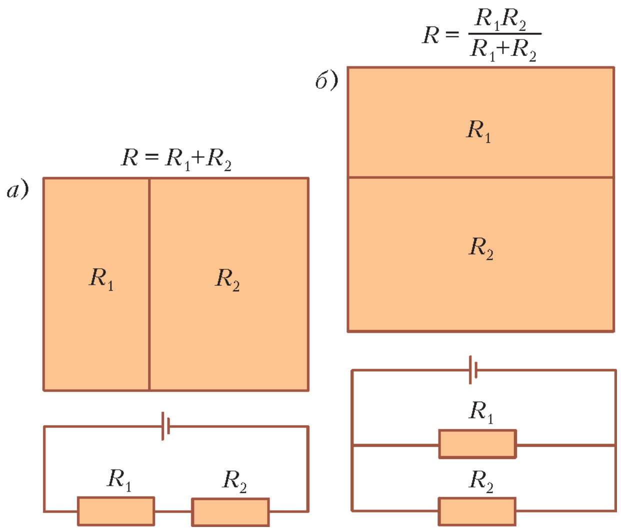

Рис.18. Формулы для отношения сторон такие же, как и для сопротивления

ронами. Оставшиеся вертикальные стороны соединим с полюсами батарейки. Получим цепь из двух последовательно соединенных резисторов (рис.19,*а*). Если отношения сторон этих пластинок R_1 и R_2, то их сопротивления – тоже R_1 и R_2. Сопротивление большой пластинки, составленной из двух, равно $R_1 + R_2$ как сопротивление двух последовательно соединенных резисторов. Вот «физическое» объяснение того, что отношение сторон большой пластинки равно $R_1 + R_2$.

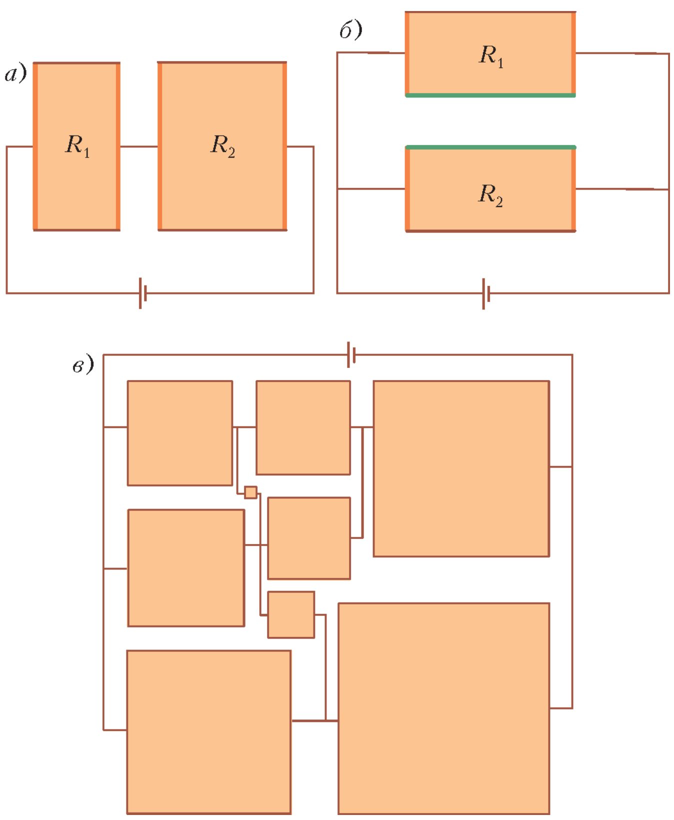

Рис.19. Электрические цепи из металлических пластинок

Перейдем к примеру 2. Приставим две пластинки друг к другу одинаковыми горизонтальными сторонами, а вертикальные стороны соединим с полюсами батарейки (рис.19,*б*). Поскольку ток течет в горизонтальном направлении, то через линию стыковки ток не идет. Изолируем пластинки друг от друга: ток и сопротивление цепи не изменятся. Мы получим пару параллельно соединенных резисторов, значит, отношение сторон большого прямоугольника находится по формуле $\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$.

Это же построение можно применить для любого разрезания прямоугольника на прямоугольники, скажем для изображенного на рисунке 3. Представим себе большую прямоугольную пластинку, разбитую на меньшие. Вертикальные стороны большой пластинки соединим с полюсами батарейки. Вдоль горизонтальных линий разреза изолируем меньшие пластинки друг от друга, а вдоль вертикальных линий разреза пусть они стыкуются. Мы получим электрическую цепь, сопротивление которой равно отношению сторон большой пластинки (рис.19,*в*). На самом деле это та же самая электрическая цепь, которую мы построили раньше.

Таким образом, чтобы найти отношение сторон прямоугольника, достаточно измерить сопротивление электрической цепи, построенной по разрезанию! Об этом мы подробно расскажем в одном из следующих номеров журнала.

Задача 8. Прямоугольник разделен на пять прямоугольников с отношениями сторон $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, $R_4 = R_5 = 3$ так, как показано на рисунке 20. Найдите отношение сторон большого прямоугольника.

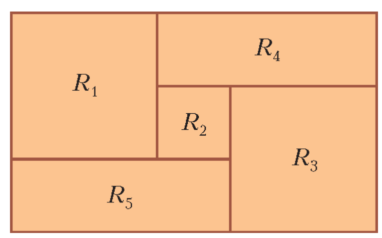

Рис. 20. Разрезание прямоугольника на 5 прямоугольников

Задача 9.** На плоскости дана электрическая цепь из резисторов сопротивлением 1 и батарейки напряжением 1. Предположим, все силы токов в цепи ненулевые, а все контуры – треугольные[9]. Попробуйте доказать, что тогда эта цепь получается из некоторого разрезания прямоугольника на квадраты.

Авторы благодарны Евгению Выродову, Сергею Маркелову, Евгению Могилевскому, Владимиру Протасову, Александру Прохорову, Святославу Фельдшерову и Борису Френкину за ценные замечания.

М.Скопенков благодарен за помощь Институту проблем передачи информации РАН и Университету науки и техники короля Абдуллы (Саудовская Аравия).

[9] *На самом деле, достаточно предположения, что в каждом контуре* потенциалы *вершин попарно различны.*