XIX Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии МГУ им. М.В.Ломоносова, Фонда некоммерческих программ «Династия» и при поддержке компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон» и «1С», Издательского Дома «Первое сентября» и журнала «Квант+» провел очередную международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила с 10 по 17 октября 2010 года на полуострове Халкидики (Греция) на берегу Эгейского моря. На олимпиаду приехали участники из разных регионов России, Казахстана и Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике и истории научных идей и открытий. В олимпиаде также участвовали школьники, интересующиеся экологией и биологией.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2010» в командном зачете стала команда лицея 2 города Альметьевска (Россия). Ей был вручен главный приз соревнований — Суперкубок. Команда была также лучшей в турах по истории научных идей и открытий, физике и математике. Второе место в общем зачете заняла команда лицея «Классический» города Ростова-на-Дону (Россия). Она заняла также второе место по истории научных идей и открытий, физике и математике. Команде был вручен большой кубок за второе место в общем зачете и соответствующие дипломы за успехи в командных соревнованиях. На третье место вышла команда из Норвегии. Ей также были вручены кубок и диплом.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стал Иван Кучмиев, ученик 11 класса лицея «Классический» из Ростова-на-Дону. Ему были вручены большая золотая медаль, малая серебряная медаль за второе место по физике и малая бронзовая медаль за третье место по математике. Вторым призером в общем зачете стал Ринат Садыков, ученик лицея 2 из Альметьевска. Ему были вручены большая серебряная медаль и малая золотая медаль за первое место по физике. Большую бронзовую медаль в общем зачете и малую бронзовую медаль за третье место по физике завоевала Ксения Сафина, представляющая лицей 2 из Альметьевска. Тимур Хусаенов (лицей 2, Альметьевск) получил малую золотую медаль за первое место по математике, а Дамир Фархутдинов (лицей 2, Альметьевск) был награжден за второе место по математике малой серебряной медалью.

Все победители и призеры получили подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XX (юбилейной) Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2011 года в Греции.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Россия, Москва, Пролетарский проспект, д. 15/6, корп.2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru (см. также сайт: www.gluon.ru)

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

Письменный индивидуальный тур

Математика

1. Пусть m и n – четырехзначные положительные числа, имеющие одинаковые суммы цифр, причем $m > n$. Какова *а*) наименьшая; *б*) наибольшая разница $m - n$?

2. Из пунктов A и B одновременно с постоянными скоростями выехали навстречу друг другу два велосипедиста, встретились в 70 км от A и продолжили движение, каждый – в своем направлении. В конечных пунктах велосипедисты отдохнули по одному часу, а затем выехали назад с прежними скоростями. Их вторая встреча произошла в 40 км от A. Найдите расстояние AB.

3. Найдите углы треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 1, а длины всех высот – натуральные числа.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y}} + \dfrac{y}{\sqrt{x}} = xy, \\ x^5 + y^5 = 8xy. \end{cases}$$

5. На стороне AC правильного треугольника ABC взяли точку D, а на сторонах AB и BC – точки E и F так, что $DE \parallel BC$, а $DF \parallel AB$. Найдите угол между прямыми AF и CE.

6. Конечно или бесконечно множество троек $(m;\ n;\ k)$ натуральных чисел, больших единицы, для которых $m!\cdot n! = k!$? (Для натурального числа q под $q!$ понимают произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до q: $q! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot q$.)

7. Существуют ли n различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них, если *а*) $n = 2$; *б*) $n = 3$; *в*) $n = 4$; *г*) n – произвольное натуральное число?

Физика

1. При выполнении упражнения «Летающий скайбордист» гонщик массой $m = 75$ кг движется по трамплину, начиная движение из состояния покоя с высоты $H = 22$ м над краем трамплина (рис.1). На нижнем краю трамплина скорость направлена под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Пролетев по воздуху, гонщик приземлился на горизонтальной поверхности на расстоянии $s = 10$ м от края трамплина. Чему равна работа сил трения движения по снегу?

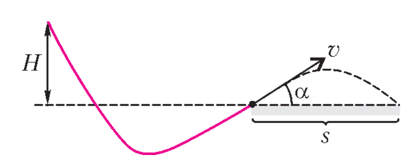

Рис. 1

2. В цилиндрический сосуд, площадь дна которого $S = 250\ см^2$, залили 1,1 л воды и поместили пенопластовый плотик, ко дну которого была приклеена пластинка из кристаллической соли NaCl. Объем кристаллической пластинки $V_с = 140\ см^3$, плотность поваренной соли (NaCl) $\rho_с = 2{,}2\ г/см^3$, плотность пенопласта $\rho_п = 0{,}6\ г/см^3$. Вначале блок из пенопласта и пластинки из соли полностью был

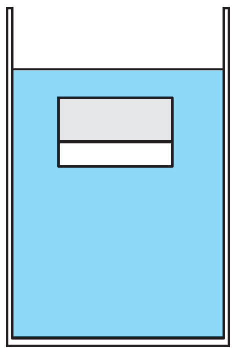

Рис. 2

погружен в воду и «парил» в ее объеме (рис.2). С течением времени соль растворилась. Полученный раствор после этого тщательно перемешали, не вынимая пенопласта. Определите, как изменился уровень жидкости в цилиндре после растворения солевой пластинки. Найдите также объем пенопласта.

Примечание. Несмотря на ничтожную сжимаемость воды, молекулы растворившейся соли заполняют межмолекулярные пустоты, что не приводит к сколько-нибудь заметному изменению объема.

3. В горизонтальном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится идеальный одноатомный газ. Первоначальное давление газа $p = 7{,}5 \cdot 10^4$ Па, расстояние от дна сосуда до поршня L = 40 см, площадь поперечного сечения поршня $S = 60$ см^2. В результате медленного нагревания газа поршень сдвинулся на расстояние x = 10 см. При движении поршня на него со стороны стенок действует сила трения $F_{\text{тр}} = 600$ Н. Какое количество теплоты подвели к газу в этом процессе? Сосуд находится в вакууме.

4. Положительно заряженный шарик массой m = 1 г подвешен на нити длиной L = 1 м и равномерно движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией B = = 1 Тл (рис.3). Заряд шарика q = 1 мКл, нить образует с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$. Найдите угловую скорость равномерного обращения шарика по окружности.

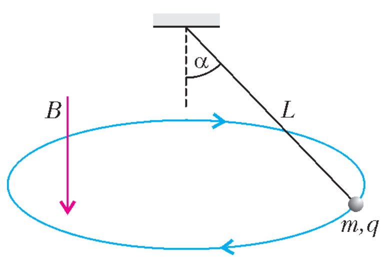

Рис. 3

5. На непроводящей горизонтальной поверхности лежит жесткая рамка из тонкой однородной металлической проволоки, согнутая в форме квадрата $ACDE$ со стороной b и массой M (рис.4). Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен сторонам AE и CD. По рамке по часовой стрелке протекает ток I. При каком значении B модуля магнитной индукции рамка начинает поворачиваться и каким образом?

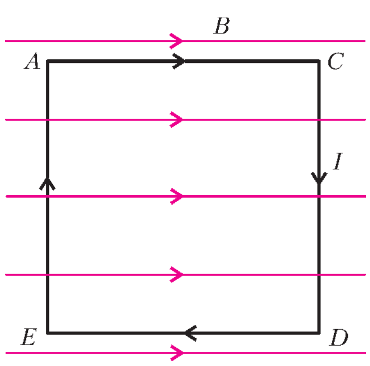

Рис. 4

6. Найдите показатель преломления материала, из которого сделан прозрачный шар, если изображение удаленного предмета фокусируется на задней поверхности этого шара. Достаточно рассмотреть изображение, образованное параксиальными лучами.

7. На гладкой горизонтальной плоскости между двумя закрепленными одинаковыми положительными зарядами Q = 4 мкКл, отстоящими на расстояние $2L$ = 2 м друг от друга, точно посредине находится отрицательный заряд величиной q = 2 мкКл и массой m = 1 г. При малом смещении заряда q из положения равновесия перпендикулярно линии, соединяющей заряды Q, возникают малые колебания. Найдите период этих малых колебаний.

Устный командный тур

Математика

1. Десятичная запись произведения четырех последовательных нечетных чисел оканчивается цифрой 9. Какова предпоследняя цифра этой записи?

2. На параболе $y = x^2$ выбрали точки A, B, C и D так, что прямые AB и CD пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки D, если абсциссы точек A, B и C равны a, b и c соответственно.

3. Тиран собрал мудрецов и сказал: «Завтра я вас соберу снова и надену на каждого белый или черный колпак – так, что вы увидите шапки других, но не свою. Затем по моему свистку вы все, не сговариваясь, поднимете левую или правую руку, при этом люди в белых колпаках должны поднять одну руку, а в черных – другую». И ушел. Мудрецы погоревали, но потом придумали простой способ сделать требуемое. Какой?

4. Из точки O внутри четырехугольника $ABCD$ площади 1 опущены перпендикуляры OK, OL, OM и ON на стороны AB, BC, CD и DA соответственно. Известно:

$$AK \geq KB,\ BL \geq LC,\ CM \geq MD,\ DN \geq NA\ .$$

Найдите площадь четырехугольника $KLMN$.

5. Можно ли число 2010 представить в виде суммы шести квадратов нечетных чисел?

6. Два игрока по очереди разламывают шоколадку размером 100×99. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом вдоль углубления любого из имеющихся кусков. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

7. Существуют ли такие действительные числа a, b и c, что при всех действительных значениях x и y выполняется неравенство

$$|x+a| + |x+y+b| + |y+c| > |x| + |x+y| + |y|\,?$$

8. Какое наибольшее количество прямоугольников размером *а*) 1×3 клетки; *б*) 1×4 клетки можно закрасить на листе клетчатой бумаги 10×10 клеток так, чтобы никакие два закрашенных прямоугольника не имели общих точек?

9. На сторонах BC и CD единичного квадрата $ABCD$ взяли точки M и N соответственно. Найдите угол MAN, если периметр треугольника CMN равен 2.

10. Одиннадцать девочек и n мальчиков собрали $n^2 + 9n - 2$ грибов, причем все грибники собрали по одинаковому количеству грибов. Найдите n.

11. Корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + px + q$ таковы, что $0 < x_1 < 1$, $x_2 > 1$. Найдите знак числа $f(q)$.

Физика

1. Груз массой 1 кг, подвешенный на нити длиной 1 м, двигаясь равномерно, описывает в горизонтальной плоскости окружность. Во все время движения груза нить образует с вертикалью угол 30°. Найдите момент силы натяжения нити относительно точки подвеса.

2. На рисунке 5 приведена электрическая схема, состоящая из четырех одинаковых сопротивлений и одного конденсатора. Найдите сопротивление цепи (постоянному току) между точками a и b.

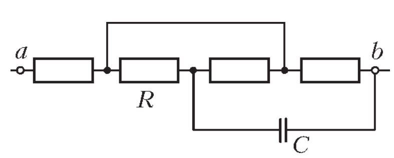

Рис. 5

3. Какая часть количества теплоты (в %), получаемого при изобарном нагревании идеального одноатомного газа, расходуется на изменение внутренней энергии этого газа?

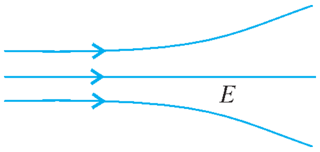

Рис. 6

4. На рисунке 6 приведена картина силовых линий электрического поля. Как будет вести себя металлический шарик, помещенный в это поле?

5. В цепи постоянного тока, показанной на рисунке 7, необходимо изменить сопротивления первого (R_1) и второго (R_2) реостатов с таким расчетом, чтобы мощность, выделяющаяся на втором реостате, увеличилась вдвое, а мощность на третьем реостате (R_3) осталась неизменной. Как этого добиться? Начальные значения сопротивлений реостатов таковы: $R_1 = 9$ Ом , $R_2 = 6$ Ом и $R_3 = 6$ Ом .

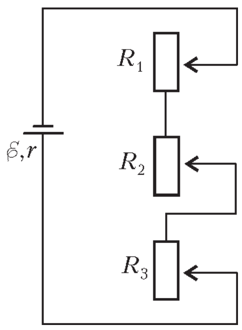

Рис. 7

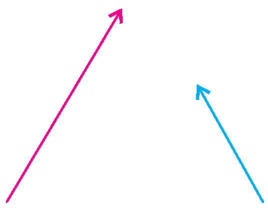

Рис. 8

6. В архивах Виллеброда Снеллиуса (Снелла) нашли рисунок предмета и его изображения в тонкой линзе (рис.8). Помогите определить, какая это линза, и найти положение ее фокусов.

7. Четыре металлических нагретых бруска положили вплотную друг к другу, как показано на рисунке 9. Между ними начал происходить теплообмен. Стрелки указывают направление теплопередачи от бруска к бруску. В некоторый момент времени термодатчики показали такие температуры брусков: 420 °С , 280 °С , 210 °С , 140 °С . Укажите, какие температуры измерены у каких брусков.

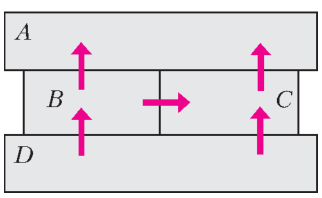

Рис. 9

8. На рисунке 10 приведен график изменения состояния идеального газа в координатах p, V. Как изменялась температура газа в этом процессе?

9. Кот Леопольд сидел у края плоской крыши сарая высотой 2 м и шириной 2,4 м, а озорной мышонок подкрался с другой стороны сарая и выстрелил по Леопольду из рогатки камнем (рис.11). Какой должна быть минимальная начальная скорость камня, чтобы мышонок смог попасть в кота?

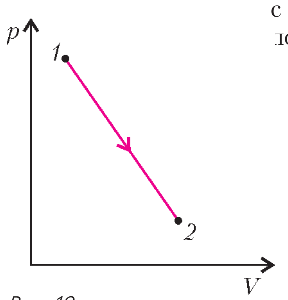

Рис. 10

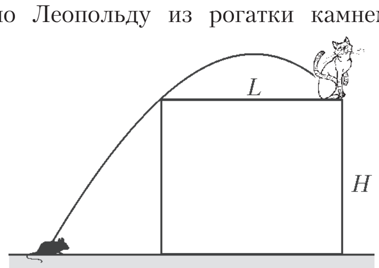

Рис. 11

10. В свободно падающее деревянное тело попадает пуля и застревает в нем. В момент попадания пули в дерево вектор ее скорости был горизонтален. Изменится ли в результате попадания пули полное время падения тела?

История научных идей и открытий

Математика

1. *Назовите имена* известных вам выдающихся математиков – как советских, так и зарубежных, – принимавших участие в создании ядерного оружия в 40–50-х годах прошлого века.

2. Один из создателей теории чисел французский математик П.Ферма предполагал, что все натуральные числа вида $2^{2^n}+1$ являются простыми. Однако более чем полвека спустя Л.Эйлер доказал, что число $2^{2^5}+1=2^{32}+1$ делится на 641.

Докажите это утверждение.

Указание: $641 = 5^4 + 2^4 = 5\cdot 2^7 + 1$.

3. Современная математическая символика создавалась и совершенствовалась в течение многих веков. Например, в 1545 году итальянец Дж. Кардано мог записать некоторое уравнение так:

1.cubus p̃. 5. positionibus æquantur 12 .

Француз Ф.Виет в 1591 году записал бы то же самое уравнение так:

$1C + 5N$, æquantur 12 .

Уже в 1637 году Р.Декарт записал бы это уравнение почти так же, как и мы.

Что это за уравнение?

4. Выдающийся педагог-математик Андрей Петрович Киселев (1852–1940) создал комплект учебников по математике для средних учебных заведений. По его учебникам с конца XIX до 60-х годов XX века обучались миллионы школьников в России и других странах. Помимо ясного, четкого и строгого изложения предмета, учебники содержали много интересных задач.

Решите задачу из учебника по планиметрии: постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по сумме гипотенузы и катета.

5. Выпишем в порядке возрастания несократимые правильные дроби, знаменатели которых не превосходят заданного натурального числа n. Полученный ряд чисел называется n-м рядом Фарея. Сам Фарей подметил две закономерности:

1) Если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ – соседние дроби ряда Фарея, то $ad - bc = 1$.

2) Если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ – три последовательные дроби ряда Фарея, то

$$\frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}$$

(последняя дробь называется медиантой дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{e}{f}$).

В 1816 году О.Коши доказал эти закономерности. В дальнейшем выяснилось, что ряды Фарея оказались весьма полезными при решении целого ряда задач теории чисел.

а) Выпишите первые 6 рядов Фарея.

б) Докажите утверждение 2), предполагая, что утверждение 1 уже доказано.

Физика

1. Сто лет назад, в 1910 году, Нобелевская премия по физике была вручена «за работу над уравнением состояния газов и жидкостей». Ученый, получивший премию, всю свою научную деятельность посвятил работам по молекулярной физике и термодинамике. Построенная к середине XIX века кинетическая теория газов позволяла получить уравнение состояния идеального газа. Отказавшись от двух допущений молекулярно-кинетической теории идеального газа, ученый получил уравнение состояния реального газа. Более того, он показал, что между газообразным и жидким состояниями вещества нет принципиальной разницы – в том и в другом случае между молекулами действуют силы одной и той же природы. Хотя полученное уравнение и не удовлетворяло полностью экспериментальным данным, оно явилось существенным улучшением более простого закона для идеальных газов. Важным следствием уравнения было установление критической температуры, выше которой ни при каких условиях газ не конденсировался в жидкость, и других критических параметров. Этот ученый сделал также ряд открытий в области молекулярной физики смеси газов и капиллярных явлений. Вдумчивый ученый, состоявший во многих академиях наук мира, в высшей степени порядочный человек, он прожил долгую жизнь.

а) Кто этот ученый?

б) В какой стране он жил?

в) Какие предположения о свойствах молекул реального газа были им сделаны для получения уравнения состояния реального газа?

2. Древнегреческий ученый: математик, физик, инженер. Он жил в одной из средиземноморских греческих колоний. В молодости он много путешествовал, учился в Александрии Египетской, работал в Александрийской библиотеке. Вычисление объема тел и площадей фигур, оценка значения числа π, расчет центров масс плоских фигур и правило рычага, гидростатические законы и гидравлические конструкции, оптические теоремы и устройства, военная техника и строительство – вот далеко не полный перечень его интересов. О нем сложены легенды, о возможности реализации некоторых его легендарных конструкций до сих пор идут споры. Он прожил 75 лет и погиб при взятии его родного города чужестранной армией. Его именем названы математические аксиомы, физические законы и технические устройства, астероид, горная цепь и кратер на Луне, площадь в его родном городе, улицы в двух городах Украины, одном городе России и одном городе Нидерландов.

а) Кто этот ученый?

б) Где находится его родной город и как он называется?

в) Армия какого государства взяла родной город ученого и кто ею командовал?

3. Для изучения строения материи современная физика использует как теоретические, так и экспериментальные методы. Для исследования взаимодействий элементарных частиц необходимы источники частиц высоких энергий. За последние полвека построены ускорители элементарных частиц с различными энергиями частиц в пучке. В 2008 году запущен новый ускоритель, над которым работали физики из многих стран мира, в том числе и из России. В 2010 году он вышел на проектную мощность, и уже получены первые интересные результаты.

а) О каком ускорителе идет речь?

б) Где он расположен?

в) На какую энергию частиц рассчитан ускоритель?

4. Этот ученый знаменит открытием и исследованием специфического волнового процесса, получившего впоследствии большое практическое значение в аэродинамике, гидродинамике, физике плазмы. Его именем названы многие величины и понятия, например число... и конус... Он также знаменит глубоким критическим анализом механики Ньютона. Физики назвали высказанные им идеи принципом, носящим его имя. Эйнштейн строил свою общую теорию относительности, опираясь на этот принцип. Сам автор принципа не принял даже специальную теорию относительности. Он также утверждал, что идея атомизма лишена физического основания, считая, что материя непрерывна.

а) Назовите этого ученого.

б) Как называется открытый им аэродинамический процесс и как называются величины, связанные с именем этого ученого?

5. Этот английский ученый был одновременно архитектором, много занимался вопросами строительной механики. Он впервые предложил закон всемирного тяготения, позже сформулированный и опубликованный Ньютоном. Ранее он изобрел и построил воздушный насос, экспериментируя с которым открыл газовый закон, названный впоследствии законом Бойля–Мариотта. Наблюдая цвета тонких пленок, открыл явление интерференции и объяснил его, выдвинув идею о волновой природе света одновременно с Гюйгенсом. С помощью усовершенствованного им микроскопа открыл живую клетку (ему же принадлежит сам термин «клетка»). И многое другое.

а) Кто этот ученый?

б) Какой музей мира располагает портретом этого ученого?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, О.Карпов, А.Кравцов, В.Крыштоп, Ж.Раббот, Л.Шляпочник

XVI Международный турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в очередном, XVI Турнире «Компьютерная физика» в январе-феврале 2012 года.

Заявки на участие присылайте по адресу:

115522 Москва, Пролетарский пр., 15/2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт: www.gluon.ru

ЗАДАНИЕ ЗАОЧНОГО ТУРА

«Магнитная ловушка»

Движение заряженных частиц, управляемое электромагнитными полями, используется во многих технических устройствах и физических экспериментальных установках. В современной технике широкое распространение получили электронно-лучевые трубки, магнетроны, клистроны, лампы бегущей и обратной волны и другие сверхвысокочастотные приборы. Для физических исследований строятся ускорители заряженных частиц – от сравнительно простых циклотронов до знаменитого Большого адронного коллайдера. Успех в решении такой важной задачи, как управляемый термоядерный синтез, во многом определялся возможностью формирования нужных траекторий заряженных частиц в сверхвысокотемпературной плазме. Понимание многих астрофизических процессов, например формирования радиационных поясов Земли, также требует изучения движения заряженных частиц в электромагнитном поле.

Рассмотрим движение электрона в магнитном поле бесконечного прямолинейного тонкого проводника, по которому течет ток I, создающий вокруг проводника магнитное поле. На движущийся со скоростью $\vec{v}$ заряд действует сила Лоренца. В соответствии со вторым законом Ньютона, справедливо уравнение движения

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\vec{v}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}),$$

где m и e – масса и заряд электрона соответственно, $\vec{r}$ – радиус-вектор электрона, $\vec{B}(\vec{r})$ – индукция магнитного поля. Индукция поля, создаваемого бесконечным прямолинейным проводником, равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r^2}\vec{n}\times\vec{r},$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный по току. В результате уравнение движения электрона приобретает вид

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\mu_0 eI}{2\pi}\frac{\vec{n}(\vec{v}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{v}\cdot\vec{n})}{r^2}.$$

Это уравнение позволяет рассчитать траекторию заряженной частицы и определить ее параметры – такие, например, как радиус кривизны, а для спиралевидных траекторий еще и шаг. Выберем декартову систему координат таким образом, что ее начало находится на проводнике, ось Oz направлена по току, две другие оси перпендикулярны проводнику. Запишем уравнения движения в проекциях на эти оси:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu_0 eI}{2\pi}\frac{x\frac{dz}{dt}}{x^2+y^2+z^2},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu_0 eI}{2\pi}\frac{y\frac{dz}{dt}}{x^2+y^2+z^2},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\mu_0 eI}{2\pi}\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{x^2+y^2+z^2}.$$

В случае если к магнитному полю, создаваемому током, добавляется однородное магнитное поле, индукция которого равна B_0 и направлена по току, то уравнения движения преобразуются к виду

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu_0 eI}{2\pi}\frac{2\pi\frac{B_0\frac{dy}{dt}}{\mu_0 I} - x\frac{dz}{dt}}{x^2+y^2+z^2},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu_0 eI}{2\pi}\frac{2\pi\frac{B_0\frac{dx}{dt}}{\mu_0 I} + y\frac{dz}{dt}}{x^2+y^2+z^2},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\mu_0 eI}{2\pi}\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Задание

1. Определите характер (плоская или пространственная) и вид траектории электрона в поле тонкого бесконечно длинного проводника с током и рассчитайте параметры (радиус кривизны, шаг, наличие особенностей) траектории при следующих начальных координатах: (30 см; 0; 0), (1 м; 0; 0), (3 м; 0; 0). Начало отсчета выберите на оси проводника, ось Oz направьте по току в проводнике. Задайте в каждой начальной точке следующие значения проекций начальной скорости: (0; 3 м/с; 0,3 м/с), (0; 30 м/с; 30 м/с), (0; 100 м/с; 300 м/с).

2. Определите характер (плоская или пространственная) и вид траектории электрона в поле тонкого бесконечно длинного проводника с током и рассчитайте параметры (радиус кривизны, шаг, наличие особенностей) траектории при начальных координатах (1 м; 0; 0). Начало отсчета выберите на оси проводника, ось Oz направьте по току в проводнике. Задайте следующие значения проекций начальной скорости: (1 м/с; 0; 0), (1 м/с; 1 м/с; 1 м/с), (20 м/с; 20 м/с; 20 м/с).

3. Определите характер (плоская или пространственная) и вид траектории электрона в поле тонкого бесконечно длинного проводника с током и в наложенном на него однородном магнитном поле с индукцией B_0, направленной по току, и рассчитайте параметры (радиус кривизны, шаг, наличие особенностей) траектории при начальных координатах (1 м; 0; 0). Начало отсчета выберите на оси проводника, ось Oz направьте по току в проводнике. Задайте следующие значения проекций начальной скорости: (0; 30 м/с; 30 м/с). Расчеты проведите для значений модуля B_0 магнитной индукции 0,1 мкТл, 1 мкТл, 3 мкТл.

Математическое приложение

Численное решение дифференциальных уравнений второго порядка – это сложная процедура, поэтому одно уравнение второго порядка сведем к двум уравнениям первого порядка. Запишем получившуюся подсистему уравнений для первого уравнения исходной системы:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\mu_0 eI}{2\pi}\frac{x\frac{dz}{dt}}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x,$$

где v_x – проекция скорости электрона, x – координата частицы. Конечно-разностная схема для численного решения этой системы уравнений проще, чем для исходного уравнения. Для примера, конечно-разностная производная от скорости по времени вычисляется как

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{x0}}{\Delta t},$$

где v_{x0} – координата скорости частицы в некоторый момент времени t_0, v_x – проекция скорости частицы через малый интервал времени Δt. Для координаты x (и для других координат) конечно-разностная производная строится аналогично.

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Кравцов

Избранные задачи Санкт-Петербургской городской олимпиады по математике

После номера задачи указано, в каком классе она предлагалась.

1 (6). На острове живет племя рыцарей и племя лжецов. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды каждый житель острова заявил: «В моем племени у меня больше друзей, чем в другом». Может ли рыцарей быть меньше, чем лжецов?

С.Берлов

2 (6). На плоскости нарисованы горизонтальные и вертикальные отрезки трех цветов, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Каждый синий отрезок пересекает ровно 100 зеленых, каждый зеленый – ровно 100 красных, а каждый красный – ровно 100 синих. Укажите наименьшее возможное количество нарисованных отрезков.

С.Берлов

3 (7). В двух соседних вершинах правильного 777-угольника стоят фишки. Если фишки стоят в вершинах A и B, то их разрешается одновременно переставить в вершины C и D, если треугольники ABC и ABD равнобедренные. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы фишки стояли в двух вершинах через одну?

Ф. Бахарев, А. Смирнов

4 (7). Внутри треугольника даны точки A, B, C и D. Докажите, что на сторонах треугольника найдется такая точка K, что $KA + KB \geq KC + KD$.

С. Берлов

5 (8). Натуральные числа a, b, c таковы, что

$$a + c = 2011201120112011 \text{ и } (5a - b)(c + b) = b^2 .$$

Докажите, что числа a, b, c имеют общий делитель, больший 1.

Ф.Петров

6 (8). В некоторых клетках доски 100×100 расставлены фишки. Клетка называется хорошей, если ровно в двух соседних с ней по стороне клетках стоят фишки, причем эти две клетки граничат по углу. (В хорошей клетке фишка может стоять, а может и не стоять.) Может ли на доске быть ровно 2011 хороших клеток?

С. Берлов

7 (8). В строку без пробелов в порядке возрастания выписаны все натуральные числа от 1 до 100002, получилась десятичная запись огромного числа. Докажите, что для каждого двузначного простого числа p можно в этом огромном числе заменить нулями две соседние цифры так, чтобы полученное число делилось на p.

Жюри

8 (9). Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $AD = DC$. Прямая BD пересекает сторону AC в точке E. Оказалось, что $\frac{BD}{BE} = \frac{AE}{EC}$. Докажите, что $BE = BC$.

Ф.Бахарев

9 (9, 10). В городе Угрюмове 2000000 жителей, которые мало общаются друг с другом. Тем не менее, среди любых 2000 жителей найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что в городе есть четверо попарно знакомых жителей.

А. Голованов, С. Берлов

10 (9). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ все углы меньше 150°, причем сумма углов A и D равна 150°. Докажите, что его площадь больше чем

$$\frac{1}{4}(AB \cdot CD + AB \cdot BC + BC \cdot CD) .$$

С.Берлов

11 (9). Бесконечная последовательность a_1, a_2, a_3, … составных натуральных чисел задается следующим правилом: $a_{n+1} = a_n - p_n + \frac{a_n}{p_n}$, где p_n – наименьший простой делитель a_n. Известно, что все члены последовательности кратны 37. Какие значения может принимать число a_1?

О.Иванова

12 (9). Саша и Сережа играют в игру на правильном стоугольнике. В начале игры Саша расставляет в вершинах стоугольника натуральные числа. Далее игроки ходят по очереди, начинает Сережа. Каждым ходом Сережа прибавляет по 1 к числам в двух противоположных вершинах, а Саша прибавляет по 1 к числам в двух соседних вершинах. Сережа стремится к тому, чтобы после его хода в вершинах стоугольника стояло как можно больше нечетных чисел. Какого наибольшего количества нечетных чисел он сможет добиться независимо от Сашиных действий?

С.Берлов

13 (10, 11). Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC с углом $\angle B = 30^\circ$. Луч BO пересекает отрезок AC в точке K. Точка L – середина дуги OC описанной окружности треугольника KOC, не содержащей точку K. Докажите, что точки A, B, L, K лежат на одной окружности.

Ф.Петров

14 (10, 11). Назовем число x *далеким от квадратов и кубов*, если для каждого целого числа k выполняются неравенства $|x - k^2| > 10^6$ и $|x - k^3| > 10^6$. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что число 2^n далеко от квадратов и кубов.

А. Голованов, С. Иванов

15 (11). В тайном обществе 2011 членов, и у каждого есть счет в банке (на счету целое число рублей, которое может быть отрицательным). Время от времени один из членов общества переводит со своего счета на счет каждого из своих друзей, состоящих в обществе, по 1 рублю. Известно, что с помощью цепочки таких переводов можно перераспределить имеющиеся на счетах средства произвольным образом. Докажите, что в этом обществе ровно 2010 пар друзей.

К.Кохась

Публикацию подготовил К.Кохась