Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2011» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2214» или «Ф2220». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvantjournal.ru и phys@kvantjournal.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2214, М2215а, М2218 предлагались на региональном этапе XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2214–М2220, Ф2220–Ф2227

М2214. На доске выписаны $N \ge 4$ чисел. Оказалось, что сумма любых трех выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

И.Богданов

М2215. а) Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвертая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.
б) Существует ли четверка простых чисел p, q, r, s такая, что шестая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение трех остальных?

В.Сендеров

М2216. На сторонах A_1A_2, A_2A_3, A_nA_1 выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ взяты точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно. Докажите, что круги, описанные вокруг треугольников $B_nA_1B_1$, $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3, \ldots, B_{n-1}A_nB_n$, покрывают весь многоугольник.

П.Кожевников, Н.Седракян

М2217. Найдите все наборы из $n \ge 2$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющие равенствам

$$|a_1 - a_2| = 2|a_2 - a_3| = 3|a_3 - a_4| = \ldots = n|a_n - a_1|.$$

По мотивам Румынской олимпиады

М2218. Прямую палку длиной $2M$ сантиметров распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

А.Магазинов

М2219. Две неравные окружности ω_1 и ω_2 касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B. Пусть C и D – точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2 (C и D лежат внутри ω). Прямая CD пересекает ω в точках E и F. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках E и F, пересекаются на прямой AB.

Фольклор

М2220. Скандалист и n нормальных зрителей купили билеты в театр. Билеты на s мест оказались нераспроданы. Скандалист, растолкав всех, первым вошел в зал и сел на случайно выбранное им место, не поинтересовавшись номером своего места. После этого остальные зрители действовали по следующим правилам: если указанное в билете место свободно, то зритель садится на свое место; если место занято, то зритель садится на любое еще не занятое место. Какова вероятность того, что последний вошедший в зал зритель сядет не на свое место?

М.Гервер

Ф2220. Во время ремонтных работ на МКС космонавт, находясь снаружи, пользовался молотком. После одного неудачного удара головная часть молотка отломилась и улетела со скоростью 20 м/с относительно станции (эта скорость перпендикулярна плоскости орбиты станции). Оказалось, что сразу после этого удара и МКС и «новый спутник» имели относительно Земли строго одинаковые по величине скорости порядка 8 км/с, которые были горизонтальными для наблюдателя на Земле, над головой которого произошло описываемое происшествие. На какое максимальное расстояние удалятся друг от друга МКС и «новый спутник» за первые полчаса его самостоятельного полета?

Л.Мотков

Ф2221. В далеком космосе оказался школьный динамометр, корпус которого имеет массу $M = 20$ г, а пружина имеет массу m = 10 г. За крючок, укрепленный на корпусе, тянут с силой F_1 = 5 Н, направленной вдоль оси пружины, а за крючок, находящийся на свободном конце пружины, тянут с силой F_2 = 2 Н, направленной в противоположную сторону. Что будет показывать динамометр, т.е. напротив какого деления на его шкале остановится индикаторная стрелка?

В.Сергеев

Ф2222. На наклонной плоской поверхности, составляющей угол $\alpha = 60°$ с горизонтом, находится небольшая плоская шайба массой m = 0,5 кг, прикрепленная легкой нитью длиной L = 1 м к точке на этой поверхности. Шайбу толкают вдоль поверхности так, что нить оказывается натянутой и скорость шайбы перпендикулярна нити. В некоторый момент шайба имеет горизонтальную скорость v = 2 м/с. Каково по величине ускорение шайбы в этот момент? Каким может быть натяжение нити в этот момент? Коэффициент трения шайбы о поверхность μ = 0,6. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

С.Дмитриев

Ф2223. Парафиновые свечи имеют цилиндрическую форму с площадью поперечного сечения $S = 1$ см^2 и длиной L = 20 см. Если свеча горит в подсвечнике, то время ее горения равно T = 3 ч. На одном конце такой свечи поджигают фитиль, а к другому концу прикрепляют стальной шарик диаметром D = 7 мм. Свечу опускают в воду при температуре 4 °С, и она некоторое время плавает, не касаясь дна сосуда. Сколько времени она будет гореть в этом случае? Плотность парафина $\rho_п = 0{,}9$ г/см^3, плотность стали $\rho_с = 7{,}7$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3.

В.Свечкин

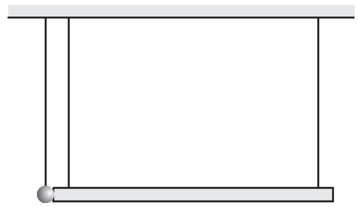
Ф2224. Экспериментатор Вася приобрел очень качественный термос (сосуд, который исключает теплообмен содержимого с окружающей средой) емкостью 1 л, теплоемкость стенок которого 100 Дж/К. Начальная температура стенок пустого термоса 20 °С (как в комнате). Вася последовательно наливает в термос 1 г воды при температуре 1 °С, затем 2 г воды при температуре 2 °С, потом 3 г воды при температуре 3 °С ... и так далее вплоть до заполнения термоса. Какой будет установившаяся температура содержимого термоса?

Э.Васин

Ф2225. Легкое кольцо из тонкой проволоки висит на мыльной пленке, которая удерживается рамкой в форме окружности. Масса кольца m, его радиус R, коэффициент поверхностного натяжения пленки σ, диаметр рамки $D > 2R$. Рамка и кольцо горизонтальны, их центры находятся на одной вертикали. Каково расстояние от плоскости кольца до плоскости рамки? Массой пленки можно пренебречь в сравнении с массой кольца. Выполняется условие «легкости» кольца: $mg \ll \sigma R$.

С.Кольцов

Ф2226. Маленький шарик и тонкий непроводящий стержень большой длины L, массы которых M одинаковы, подвешены к потолку на нитях одной и той же и очень большой длины R ($R \gg L$). Нити позволяют шарику и стержню двигаться только в одной вертикальной плоскости. Сначала шарик и стержень не были заряжены и висели так, что почти соприкасались друг с другом, причем шарик находился возле одного из концов стержня (см. рисунок). Шарику и стержню сообщили одинаковые электрические заряды Q, причем заряд на стержне распределили равномерно по его длине. На каком расстоянии x окажутся в положении равновесия шарик и тот конец стержня, возле которого шарик находился вначале? Считайте, что диаметр шарика много меньше x, а x много меньше длины стержня L.



Д.Шариков

Ф2227. Связь между эффективным напряжением U на лампе накаливания и током I, текущим через нее, дается формулой $I \sim U^{3/5}$. Две лампы с номинальными напряжениями 220 В и номинальными мощностями 40 Вт и 100 Вт включили последовательно в сеть напряжением 220 В. Каково падение напряжения на лампе меньшей номинальной мощности? (Разрешается пользоваться калькулятором.)

С.Варламов

Решения задач М2191–М2198

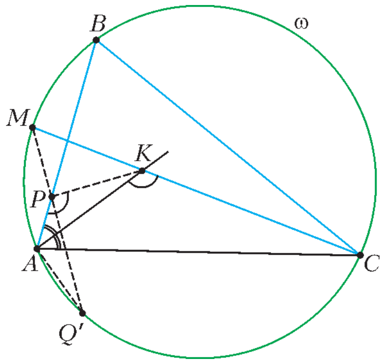
М2191. *Дано натуральное $n > 1$. Докажите, что найдутся такие n последовательных натуральных чисел, что их произведение делится на все простые числа, не превосходящие $2n + 1$, и не делится ни на одно другое простое число.*

Предположим, что число $n + 1$ составное; покажем, что тогда подходят числа $n + 2, \ldots, 2n + 1$. Очевидно, их произведение делится на все простые числа из отрезка $[n + 2; 2n + 1]$, но не делится на простые числа, большие $2n + 1$ (ибо все сомножители не превосходят $2n + 1$). Для любого же простого $p \le n$ одно из p последовательных чисел делится на p; значит, и одно из наших n чисел также делится на p.

Если теперь число $n + 1 > 2$ простое, то оно нечетно, а число $n + 2 > 2$ четно и потому составное. В этом случае подходят числа $n + 3, \ldots, 2n + 2$. Действительно, по аналогичным причинам их произведение P делится на все простые числа из отрезков $[1; n]$ и $[n + 3; 2n + 2]$, но не делится на простые числа, большие $2n + 1$ (поскольку число $2n + 2$ составное). Кроме того, P делится на $n + 1 = \dfrac{2n+2}{2}$.

И.Богданов

М2192. *Внутри треугольника ABC взята точка K, лежащая на биссектрисе угла BAC. Прямая CK вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке M. Окружность Ω проходит через точку A, касается прямой CM в точке K и пересекает вторично отрезок AB в точке*



P, а окружность ω – в точке Q. Докажите, что точки P, Q и M лежат на одной прямой.

Из касания вытекает равенство $\angle APK = \angle AKC$. Пусть прямая MP пересекает вторично окружность ω в точке Q' (см. рисунок). Тогда имеем

$$\angle AQ'P = \angle AQ'M = \angle ACM = 180° - \angle AKC - \angle KAC =$$

$$= 180° - \angle APK - \angle PAK = \angle AKP .$$

Значит, точки A, P, K и Q' лежат на одной окружности, эта окружность совпадает с Ω, и, следовательно, Q' совпадает с Q.

Л.Емельянов

М2193. *В каждой клетке квадрата 100×100 записано некоторое натуральное число. Прямоугольник, стороны которого идут по линиям сетки, назовем хорошим, если сумма чисел во всех его клетках делится на 17. Разрешается одновременно закрашивать все клетки в некотором хорошем прямоугольнике. Одну клетку запрещается закрашивать дважды. При каком наибольшем d можно закрасить хотя бы d клеток при любом расположении чисел?*

Ответ. $9744 = 100^2 - 16^2$.

Лемма. *Пусть полоска $1 \times k$ заполнена натуральными числами. Тогда в ней можно закрасить несколько непересекающихся хороших прямоугольников, содержащих не меньше $k - 16$ клеток.*

Доказательство. Индукция по k. При $k \le 16$ ничего красить не надо. Пусть $k \ge 17$. Пусть в 17 левых клетках стоят числа $a_1, \ldots, a_{17}$. Среди чисел $0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_{17}$ найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 17. Тогда их разность, имеющая вид $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$, будет делиться на 17. Удалим клетки с i-й по j-ю из полоски. Оставшиеся клетки будем считать одной полоской длины $k - (j - i + 1)$. Применив к ней предположение индукции, мы закрасим несколько хороших прямоугольников так, что останется не более 16 незакрашенных клеток. Тогда в исходной полоске можно закрасить те же клетки, а также клетки с i-й по j-ю (они либо образуют новый хороший прямоугольник, либо попадут внутрь старого).

Лемма доказана.

Перейдем к задаче. Покажем, что можно оставить не более $16^2 = 256$ незакрашенных клеток. Рассмотрим полоску 1×100, в клетки которой записаны суммы чисел в столбцах исходного квадрата. Применив к ней утверждение леммы, мы найдем несколько хороших прямоугольников. Тогда в исходном квадрате можно закрасить соответствующие прямоугольники высоты 100. После этого незакрашенными останутся не более 16 столбцов. Применим теперь лемму к каждому из них по отдельности; в каждом столбце останется не более 16 незакрашенных клеток, т.е. всего не более 256 клеток.

Осталось привести пример расстановки, в которой нельзя оставить менее 256 клеток незакрашенными. Расставим в каком-нибудь квадрате 16×16 единицы, а во всех остальных клетках – нули. Рассмотрим произвольный прямоугольник P; если он содержит единицу, то он пересекается с квадратом по некоторому прямоугольнику $a \times b$ ($1 \le a, b \le 16$); но тогда сумма всех чисел в P будет равна ab, что не может быть кратным 17. Таким образом, ни одна клетка с единицей закрашена не будет, а значит, останется хотя бы 256 незакрашенных клеток.

П.Зусманович, Ф.Петров

М2194. *В буфете лежат 100 яблок суммарной массой 10 кг, каждое массой не меньше 25 г. Буфетчице нужно разрезать их на части и раздать 100 детям, каждому по 100 г. Докажите, что она может это сделать так, чтобы масса любого куска яблока была не меньше 25 г.*

Все массы в решении будем измерять в граммах. Назовем кусок яблока (или само яблоко) *большим*, если его масса не меньше 25.

Докажем индукцией по n, что n больших яблок суммарной массы $100n$ можно разрезать на большие куски и раздать n детям поровну.

База при $n = 1$ очевидна. Пусть $n > 1$. Рассмотрим два самых тяжелых яблока; пусть их массы $a \ge b$. Заметим, что $a + b \ge 200$ (иначе средняя масса одного яблока будет меньше чем $200/2 = 100$). Выкинем эти два яблока из набора и добавим в него яблоко массы $c = a + b - 100 \ge 100$. По предположению индукции, полученный набор можно разрезать на большие куски и раздать $n - 1$ детям поровну. Если при этом какой-то кусок нового яблока оказался больше 50, разрежем его на два больших куска. Через несколько таких разрезаний мы придем к ситуации, когда новое яблоко разделено на куски массами $c_1, c_2, \ldots, c_k$, не превосходящими 50. Обозначим $s_d = c_1 + \ldots + c_d$ при $d = 1, 2, \ldots, k$ и положим $s_0 = 0$.

Покажем теперь, как разрезать исходный набор. Все яблоки, кроме a и b, разрежем так же, как и в новом наборе. Заметим, что $a \ge 200/2 = 100$. Обозначим через t минимальный индекс такой, что $a - s_t \le 75$, и отрежем от a куски $c_1, \ldots, c_t$, а от b – куски $c_{t+1}, \ldots, c_k$. Заметим, что $a - s_{t-1} > 75$, поэтому от a остался кусок $a' = a - s_t = (a - s_{t-1}) - c_t$ такой, что $75 \ge a' > 75 - c_t \ge 25$. От b же остался кусок b' такой, что $a' + b' = a + b - c = 100$, поэтому $25 \le b' \le 75$. Итак, можно a' и b' отдать одному ребенку, а остальные куски распределить между остальными детьми так же, как это делалось в новом наборе. Утверждение доказано.

Замечание. В доказанном *общем* утверждении число 25 нельзя заменить на большее, не зависящее от n.

К.Кноп, И.Богданов

М2195. *Даны $n \ge 3$ попарно взаимно простых чисел. Известно, что при делении произведения любых $n - 1$*

из них на оставшееся число получается один и тот же остаток r. Докажите, что $r \le n-2$.

Если $r = 0$, то утверждение задачи, очевидно, истинно. Пусть $r > 0$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – данные числа; положим $P = a_1a_2\ldots a_n$, $P_i = P/a_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что $a_i > r$, ибо число P_i дает остаток r при делении на a_i.

Рассмотрим число $S = P_1 + P_2 + \ldots + P_n - r$. Заметим, что $S = (P_1 - r) + (P_2 + P_3 + \ldots + P_n) \vdots a_1$, поскольку оба слагаемых делятся на a_1. Аналогично, $S \vdots a_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$; так как a_i попарно взаимно просты, получаем, что S делится на $a_1\ldots a_n = P$. Поскольку $S > a_1 - r > 0$, получаем, что $S \ge P$, а тогда $P_1 + \ldots + P_n = S + r > P$. Значит, при некотором i верно неравенство $P_i > P/n$, откуда $a_i < n$, или $a_i \le n-1$. Но тогда $r < a_i \le n-1$, т.е. $r \le n-2$.

В.Сендеров

M2196. *Могут ли 4 центра вписанных в грани тетраэдра окружностей лежать в одной плоскости?*

Ответ. Не могут.

Пусть I_A, I_B, I_C, I_D – центры вписанных окружностей треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Предположим, что они лежат в одной плоскости. Тогда либо они образуют выпуклый четырехугольник, либо одна из этих точек лежит в треугольнике, образованном тремя другими.

Случай 1. Пусть без ограничения общности $I_AI_BI_CI_D$ – выпуклый четырехугольник, тогда отрезки I_AI_C и I_BI_D пересекаются. Обозначим через M, N, K, L середины ребер AB, AD, CD, BC соответственно (рис.1). Рассмотрим треугольник ABC (рис.2). Проведем через точку B прямую l, параллельную AC; тогда вписанная окружность этого треугольника лежит между прямыми l и AC, касаясь AC, но не касаясь l. Это значит, что точки

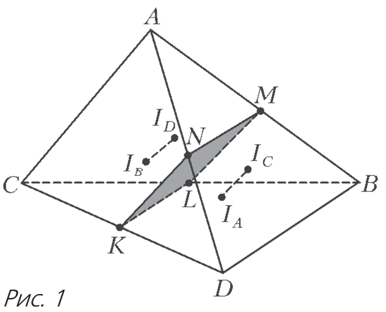


Рис. 1

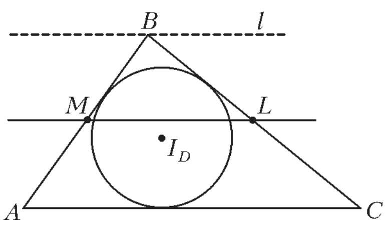


Рис. 2

I_D и B лежат по разные стороны от средней линии ML. Аналогично получаем, что точки I_B и I_D окажутся по одну сторону от плоскости $MNKL$, а точки I_A и I_C – по другую. Но тогда отрезки I_BI_D и I_AI_C не могут пересекаться – противоречие.

Случай 2. Покажем, что точка I_A не может лежать в треугольнике $I_BI_CI_D$. Это следует из того, что точки I_B, I_C, I_D лежат строго по одну сторону от плоскости BCD, а точка I_A – в этой плоскости.

И.Богданов, О.Подлипский

M2197. *Многочлен $P(x)$ степени $n \ge 3$ имеет n вещественных корней $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, причем $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \ldots < x_n - x_{n-1}$. Докажите, что максимум функции $y = |P(x)|$ на отрезке $[x_1; x_n]$ достигается в точке, принадлежащей отрезку $[x_{n-1}; x_n]$.*

Заметим, что максимум функции $|P(x)|$ не может достигаться в точке x_i, ибо $|P(x_i)| = 0$. Рассмотрим произвольную точку $a \in (x_i; x_{i+1})$ при $i < n-1$; положим $t = a - x_i$, $b = x_n - t$. Заметим, что $b \in (x_{n-1}; x_n)$, поскольку

$$x_n > b > x_n - (x_{i+1} - x_i) > x_n - (x_n - x_{n-1}) = x_{n-1}.$$

Покажем, что $|P(b)| > |P(a)|$; из этого, очевидно, следует утверждение задачи.

Из условия следует, что $x_{k+m} - x_k < x_{l+m} - x_l$ при $1 \le k < l \le n-m$. Поскольку нам известны n корней многочлена $P(x)$, имеем $P(x) = p(x-x_1)\ldots(x-x_n)$, где p – старший коэффициент многочлена $P(x)$. Заметим, что

$$|b - x_s| = x_n - x_s - t > x_{i+n-s} - x_i - t = |x_{i+n-s} - a|$$

при $i+1 \le s \le n-1$. Кроме того,

$$|b - x_r| = b - x_r > x_{n-1} - x_r > a - x_r = |a - x_r|$$

при $1 \le r \le i-1$. Перемножая все полученные неравенства с равенством

$$p|b - x_n| \cdot |b - x_i| = pt(x_n - x_i - t) = p|a - x_i| \cdot |a - x_n|,$$

получаем

$$P(b) = p|b - x_1| \cdot |b - x_2| \cdot \ldots \cdot |b - x_n| >$$
$$> p|a - x_1| \cdot |a - x_2| \cdot \ldots \cdot |a - x_n| = P(a),$$

что и требовалось доказать.

И.Богданов

M2198*. *Четырехугольник ABCD вписан в окружность ω с центром O, а его диагонали пересекаются в точке K. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 – середины дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Точки I_1, I_2, I_3, I_4 – центры окружностей, вписанных в четырехугольники ABK, BCK, CDK, DAK соответственно.*

а) Докажите, что прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что точка пересечения прямых из пункта а) лежит на прямой OK.

Заметим, что точка I_1 лежит на биссектрисах AM_2 и BM_4 углов BAC и ABD, поэтому $I_1 = AM_2 \cap BM_4$ (рис.1). Аналогично, $I_2 = BM_3 \cap CM_1$, $I_3 = CM_4 \cap DM_2$, $I_4 = DM_1 \cap AM_3$. Поскольку $\smile AM_1 + \smile CM_3 = \smile BM_1 + \smile DM_3$, прямая M_1M_3 составляет равные углы с хордами AC и BD; следовательно, прямая M_1M_3

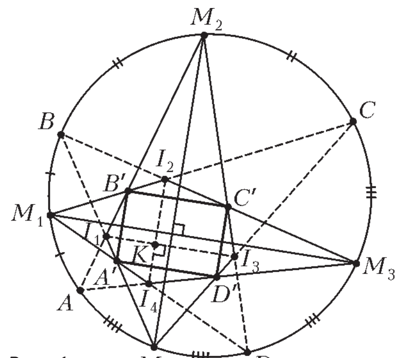


Рис. 1

параллельна биссектрисе угла AKB, т.е. прямой I_1I_3. Аналогично, $M_2M_4 \parallel I_2I_4 \perp I_1I_3$ (поскольку внешняя и внутренняя биссектрисы угла перпендикулярны).

а) Если прямые I_1I_3 и M_1M_3, а также I_2I_4 и M_2M_4 совпадают, утверждение задачи очевидно. Пусть, скажем, точка I_1 не лежит на прямой M_1M_3. Обозначим $A' = DM_1 \cap BM_4$, $B' = AM_2 \cap CM_1$, $C' = BM_3 \cap DM_2$, $D' = AM_3 \cap CM_4$.[1] Имеем $\angle BM_1M_2 = \angle CM_1M_2$ и $\angle BM_2M_1 = \angle AM_2M_1$, поэтому треугольники M_1M_2B и M_1M_2B' симметричны относительно прямой M_1M_2. Отсюда $M_2B' = M_2B$. Аналогично, $M_2C' = M_2C$, и из $M_2B = M_2C$ получаем $M_2B' = M_2C'$. Поскольку $\angle AM_2M_4 = \angle DM_2M_4$, прямая M_2M_4 является биссектрисой (и, значит, высотой) равнобедренного треугольника $M_2B'C'$. Поэтому, $B'C' \perp M_2M_4$, откуда $B'C' \parallel M_1M_3 \parallel I_1I_3$.

Пусть прямая M_2I_2 пересекает отрезки $B'C'$, I_1I_3 и M_1M_3 в точках X, Y, Z соответственно (рис.2).

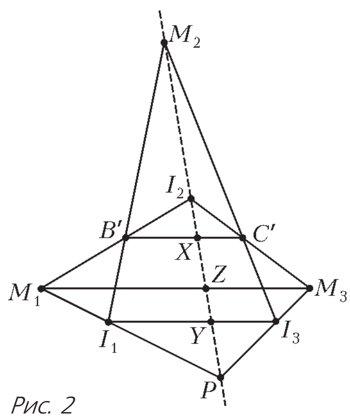


Рис. 2

Рассматривая гомотетии с центрами I_2 и M_2, получаем $\frac{M_1Z}{M_3Z} = \frac{B'X}{C'X} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Пусть $P = M_1I_1 \cap M_3I_3$. Если прямая PY пересекает M_1M_3 в точке Z', то из гомотетии с центром P получаем $\frac{M_1Z'}{M_3Z'} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Значит, Z' совпадает с Z. Получаем, что точка P лежит на прямой M_2I_2. Аналогично, P лежит на прямой M_4I_4, т.е. все четыре прямые M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3, M_4I_4 пересекаются в точке P.[2]

б) Пусть биссектриса I_1I_3 угла AKB пересекает вторично описанную окружность треугольника AKB в точке N_1 (рис.3). Аналогично, пусть I_1I_3 пересекает вторично описанную окружность треугольника CKD в точке N_3.

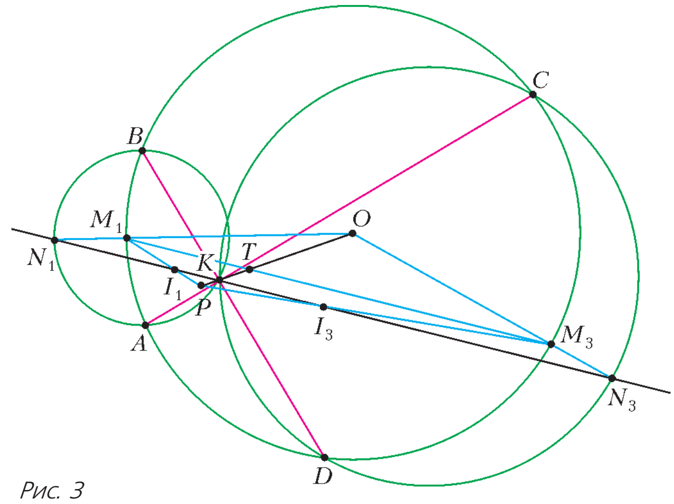


Рис. 3

Из подобия $\Delta AKB \sim \Delta DKC$ следует равенство отношений соответствующих отрезков, в частности $\frac{KI_1}{KI_3} = \frac{KN_1}{KN_3}$. Далее, точки M_1 и N_1 равноудалены от A и B, значит, M_1N_1 – серединный перпендикуляр к отрезку AB, и O лежит на M_1N_1. Аналогично, O лежит на M_3N_3. В случае, если прямая OK совпадает с M_1M_3, задача очевидна. Иначе, пусть $T = OK \cap M_1M_3$. Из гомотетии с центром O (вспомним, что $M_1M_3 \parallel N_1N_3$) следует, что $\frac{TM_1}{TM_3} = \frac{KN_1}{KN_3}$. Пусть $PT \cap I_1I_3 = K'$. Из гомотетии с центром P следует, что $\frac{TM_1}{TM_3} = \frac{K'I_1}{K'I_3}$. В результате получаем, что $\frac{KI_1}{KI_3} = \frac{K'I_1}{K'I_3}$, и, значит, $K' = K$, т.е. O, P, K лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Замечание. Из решения пункта б) вытекает следующий факт: прямая OK делит отрезок M_1M_3 в отношении, равном коэффициенту подобия треугольников AKB и DKC.

И.Богданов, П.Кожевников

[1] *Точки A', B', C', D' являются центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD, BAC, CBD, DAC соответственно.*

[2] *Здесь по сути работает теорема о трех гомотетиях (для гомотетий, переводящих отрезки $B'C'$, M_1M_3, I_1I_3 друг в друга).*