# КПД термодинамических циклов

**В.ДРОЗДОВ**

Указанная в заглавии статьи тема фактически завершает школьный курс термодинамики. Поэтому для решения задач на определение КПД циклов требуется знание почти всего предшествующего материала. В силу этого обстоятельства, такие задачи часто используются для проверки знаний учащихся на экзаменах, в том числе и в форме ЕГЭ.

Коэффициент полезного действия $\eta$ термодинамического цикла определяется по формуле

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где $Q_1$ – количество теплоты, подведенное к рабочему телу (газу) за цикл от нагревателя, $Q_2$ – количество теплоты, отданное рабочим телом за цикл холодильнику, $A = Q_1 - Q_2$ – работа газа за цикл.

Ограничимся случаем, когда рабочим телом является идеальный одноатомный газ. Согласно первому закону термодинамики, количество теплоты $Q_{12}$, полученное идеальным газом при переходе из состояния *1* в состояние *2*, равно сумме изменения внутренней энергии газа и совершенной им работы:

$$Q_{12} = (U_2 - U_1) + A_{12}.$$

Внутренняя энергия идеального одноатомного газа с учетом уравнения Клапейрона–Менделеева может быть записана в виде

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV,$$

где $\nu$ – количество молей газа, $T$ – температура газа, $p$ – его давление, $V$ – объем, $R$ – универсальная газовая постоянная. Работа газа $A_{12}$ численно равна площади под графиком зависимости давления от объема, выраженной в энергетических единицах (в СИ – в джоулях).

Теперь переходим к рассмотрению конкретных задач.

**Задача 1.** *Найдите КПД цикла, изображенного на рисунке 1.*

**Решение.** Легко видеть, что работа газа за цикл равна

$$A = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{1}{2}p_0V_0.$$

Осталось найти подведенное к газу количество теплоты $Q_1$. На участке *1–2* работа газа равна нулю, а давление растет при постоянном объеме, т.е. температура газа повышается. Значит, на этом участке газ получает тепло. На участке *2–3* работа газа $A_{23}$ положительна, а объем растет при постоянном давлении, т.е. температура газа растет.

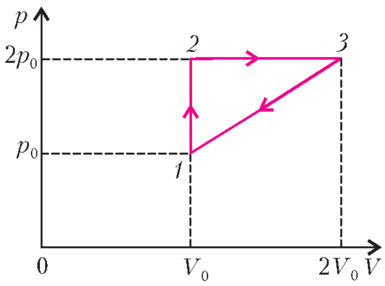

Рис. 1

Следовательно, на этом участке газ тоже получает тепло. А вот на участке *3–1* работа газа отрицательна (ибо газ сжимают), к тому же одновременно падают и давление и объем газа, что приводит к охлаждению газа. Иными словами, на участке *3–1* газ тепло не получает. Итак,

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = (U_2 - U_1) + A_{23} + (U_3 - U_2) = (U_3 - U_1) + A_{23}.$$

Учитывая, что

$$A_{23} = 2p_0(2V_0 - V_0) = 2p_0V_0,$$

получаем

$$Q_1 = \left(\frac{3}{2}\cdot 2p_0 \cdot 2V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0\right) + 2p_0V_0 = \frac{13}{2}p_0V_0.$$

Теперь находим КПД цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(1/2)p_0V_0}{(13/2)p_0V_0} = \frac{1}{13} \approx 7{,}7\%.$$

**Задача 2.** *На рисунке 2 изображен цикл дизельного двигателя, состоящий из адиабат 1–2 и 3–4, изобары 2–3 и изохоры 4–1. Температуры газа в точках 1, 2, 3, 4 равны* $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ *соответственно. Найдите КПД цикла.*

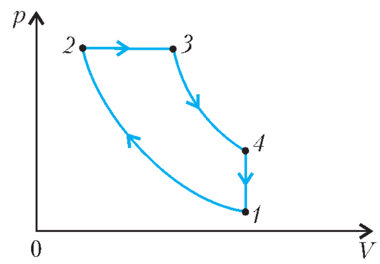

Рис. 2

**Решение.** Работу газа как «энергетическую площадь» цикла здесь вычислить нелегко – цикл криволинейный. Но в этом нет никакой нужды. Вычислим КПД через подведенное и отведенное количества теплоты $Q_1$ и $Q_2$. Естественно, на адиабатах тепло не подводится и не отводится. На изобаре *2–3* тепло подводится, ибо объем растет и, соответственно, растет температура. На изохоре *4–1* тепло отводится, так как давление и температура падают. Таким образом,

$$Q_1 = Q_{23} = (U_3 - U_2) + A_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2) = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + \nu R(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}\nu R(T_3 - T_2).$$

Аналогично,

$$Q_2 = U_4 - U_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_1).$$

Окончательно получаем

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{3(T_4 - T_1)}{5(T_3 - T_2)}.$$

**Задача 3** (МИЭМ, 1990). *Определите КПД цикла, состоящего из двух адиабат и двух изохор (рис.3). Известно, что в процессе адиабатного расширения устанавливается температура* $T_2 = 0{,}75T_1$, *а в процессе адиабатного сжатия* $T_3 = 0{,}75T_4$.

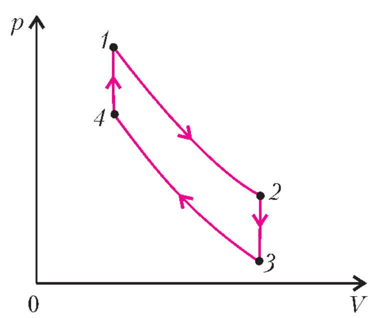

Рис. 3

**Решение.** На изохоре *4–1* тепло подводится, на изохоре *2–3* тепло отводится, на обеих адиабатах теплообмена нет. Кроме того, работа на изохорах не совершается. Поэтому

$$Q_1 = U_1 - U_4\,, \quad Q_2 = U_2 - U_3\,.$$

Значит,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{U_2 - U_3}{U_1 - U_4} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}\,.$$

С учетом условия задачи окончательно получаем

$$\eta = 1 - \frac{0,75T_1 - 0,75T_4}{T_1 - T_4} = 1 - 0,75 = 0,25 = 25\%\,.$$

**Задача 4** (МФТИ, 1989). *КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1 (рис.4), равен* $\eta$. *Разность максимальной и минимальной температур газа в цикле составляет* $\Delta T$. *Найдите работу, совершенную* $\nu$ *молями газа в изотермическом процессе.*

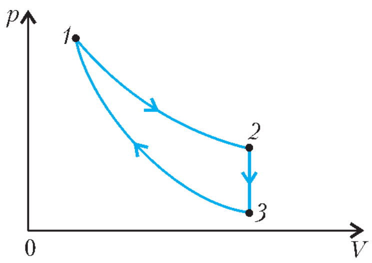

*Рис. 4*

**Решение.** Хотя в данной задаче КПД известен, выразим его, как и в предыдущих задачах, через количества теплоты $Q_1$ и $Q_2$ и искомую работу $A_{12}$.

Так как точки *1* и *2* лежат на одной изотерме, то $T_1 = T_2$ и, соответственно, $U_2 = U_1$. Ясно, что $\Delta T = T_2 - T_3$, ведь точка *3* лежит ниже точки *2*. Тогда

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12}\,.$$

Тепло на изотерме действительно подводится, поскольку работа расширения газа $A_{12}$ заведомо положительна. А на изохоре тепло отводится, причем

$$Q_2 = Q_{23} = U_2 - U_3 = \frac{3}{2}\nu R\left(T_2 - T_3\right) = \frac{3}{2}\nu R\Delta T\,.$$

Следовательно,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{(3/2)\nu R\Delta T}{A_{12}}\,,$$

откуда находим

$$A_{12} = \frac{1,5\nu R\Delta T}{1 - \eta}\,.$$

**Задача 5** (МФТИ, 2005). *В цикле 1–3–4–1 (рис.5) КПД равен* $\eta$. *Чему равен КПД* $\eta'$ *цикла 1–2–3–4–1?*

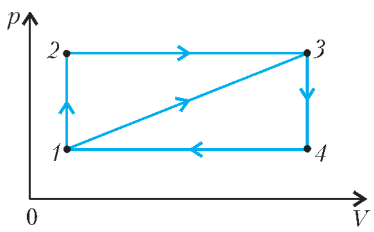

*Рис. 5*

**Решение.** Так как диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника, работа, совершенная во втором цикле *1–2–3–4–1*, вдвое больше работы $A$ в первом цикле *1–3–4–1*.

В первом цикле тепло, очевидно, подводится только на участке *1–3*. При этом

$$Q_1 = Q_{13} = A_{13} + \left(U_3 - U_1\right),$$

где

$$A_{13} = A + p_1\left(V_4 - V_1\right).$$

Значит,

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A + p_1\left(V_4 - V_1\right) + \left(U_3 - U_1\right)}\,.$$

Во втором цикле тепло подводится только на участках *1–2* и *2–3*:

$$Q_1' = Q_{12} + Q_{23} = \left(U_2 - U_1\right) + \left(U_3 - U_2\right) + A_{23} = \left(U_3 - U_1\right) + A_{23},$$

где

$$A_{23} = 2A + p_1\left(V_4 - V_1\right).$$

Следовательно,

$$\eta' = \frac{2A}{Q_1'} = \frac{2A}{2A + p_1\left(V_4 - V_1\right) + \left(U_3 - U_1\right)}\,.$$

Выразив величину $p_1\left(V_4 - V_1\right) + \left(U_3 + U_1\right)$ из уравнения для $\eta$, находим

$$\eta' = \frac{2\eta}{\eta + 1}\,.$$

**Задача 6** (МИЭМ). *Определите КПД цикла (рис.6), совершаемого* $\nu = 3$ *моль газа и состоящего из изохоры, адиабаты и изобары, если известно, что газ получил* $Q_1 = 3000$ *Дж тепла и в результате адиабатного расширения температура его понизилась на* $\Delta T = 40$ *К.*

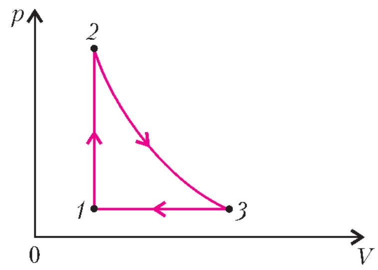

*Рис. 6*

**Решение.** Очевидно, что газ получает тепло на изохоре *1–2* и отдает его на изобаре *3–1*. Поэтому

$$Q_1 = U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right),$$

$$Q_2 = p_1\left(V_3 - V_1\right) + \left(U_3 - U_1\right) =$$

$$= p_3V_3 - p_1V_1 + \frac{3}{2}p_3V_3 - \frac{3}{2}p_1V_1 = \frac{5}{2}\left(p_3V_3 - p_1V_1\right).$$

Запишем уравнения состояния газа в точках *2* и *3*:

$$p_2V_2 = \nu RT_2\,, \quad p_3V_3 = \nu RT_3\,.$$

Отсюда вытекает, что

$$p_2V_2 - p_3V_3 = \nu R\left(T_2 - T_3\right) = \nu R\Delta T\,.$$

По определению термодинамического коэффициента полезного действия,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}\,.$$

Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \eta = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}, \\ Q_1 = \dfrac{3}{2}\left(p_2V_2 - p_1V_1\right), \\ Q_2 = \dfrac{5}{2}\left(p_3V_3 - p_1V_1\right), \\ p_2V_2 - p_3V_3 = \nu R\Delta T. \end{cases}$$

Последовательно исключив из этой системы $p_3V_3$, $p_2V_2 - p_1V_1$ и $Q_2$, приходим к ответу

$$\eta = \frac{5\nu R\Delta T}{2Q_1} - \frac{2}{3} = 0,16 = 16\%\,.$$

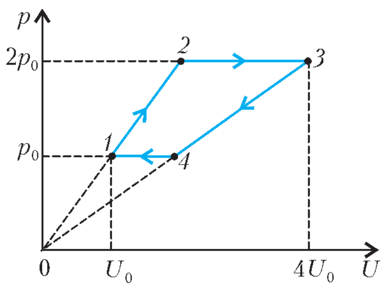

Рис. 7

**Задача 7** (МИЭМ, 1991). *Газ совершает цикл, изображенный на рисунке 7 в координатах p и U, где p – давление, U – внутренняя энергия газа. Определите КПД цикла.*

**Решение.** Прежде всего представим цикл в координатах $p$, $V$. Запишем внутренние энергии газа в вершинах трапеции *1* и *3*:

$$U_0 = \frac{3}{2}p_0V_1,\ 4U_0 = \frac{3}{2}\cdot 2p_0V_3.$$

Отсюда находим

$$V_1 = \frac{2U_0}{3p_0},\ V_3 = \frac{4U_0}{3p_0}.$$

Видим, что $V_3 = 2V_1$. Участки цикла *1–2* и *3–4* – изохоры. Действительно, запишем уравнение прямой *1–2* в виде $p = \alpha U$, где $\alpha$ – коэффициент пропорциональности, или $p = \alpha\cdot\frac{3}{2}pV$, откуда получаем $V = \frac{2}{3\alpha} = \text{const}$. Аналогичный вывод справедлив и для участка *3–4*. Следовательно, $V_2 = V_1$ и $V_4 = V_3$. Тогда цикл в координатах $p$, $V$ представляет собой уже встречавшийся нам в пятой задаче прямоугольник (рис.8).

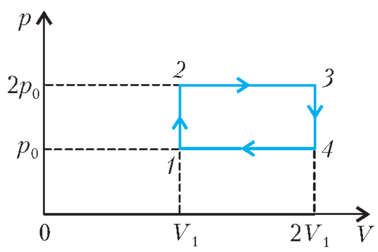

Рис. 8

Теперь приступим к расчетам. Работа цикла равна

$$A = p_0V_1.$$

Тепло подводится к газу на участках *1–2* и *2–3*, поэтому

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + A_{23} =$$

$$= (U_3 - U_1) + 2p_0V_1 = \frac{3}{2}\cdot 2p_0\cdot 2V_1 - \frac{3}{2}p_0V_1 + 2p_0V_1 = \frac{13}{2}p_0V_1.$$

Значит,

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{p_0V_1}{(13/2)p_0V_1} = \frac{2}{13} \approx 15,4\%.$$

**Задача 8** (МФТИ). *КПД цикла 1–2–4–1 равен $\eta_1$, а цикла 2–3–4–2 равен $\eta_2$. Участки 4–1 и 2–3 – изохоры, участок 3–4 – изобара, участки 1–2 и 2–4 представляют собой линейную зависимость давления от объема (рис.9). Все циклы обходятся по часовой стрелке. Найдите КПД $\eta$ цикла 1–2–3–4–1.*

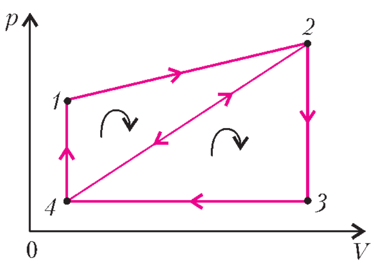

Рис. 9

**Решение.** В цикле *1–2–4–1* тепло подводится на участках *1–2* и *4–1*, а отводится на участке *2–4*. Значит,

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{41},\ Q_2 = Q_{24},$$

и

$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_{24}}{Q_{12} + Q_{41}}.$$

В цикле *2–3–4–2* тепло подводится на участке *4–2*, а отводится на участках *2–3* и *3–4*. Следовательно,

$$\eta_2 = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{24}}.$$

В цикле *1–2–3–4–1* тепло подводится на участках *1–2* и *4–1*, а отводится на участках *2–3* и *3–4*. Поэтому

$$\eta = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{41} + Q_{12}}.$$

Из формул для $\eta_1$ и $\eta_2$ найдем

$$\frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{41} + Q_{12}} = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2)$$

и окончательно получим

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2.$$

**Задача 9** (МГУ, физфак, 2000). *На pV-диаграмме, изображенной на рисунке 10, показано изменение состояния газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя. Отношение максимальной абсолютной температуры газа к его минимальной температуре в данном цикле равно 4. Во сколько раз отличается КПД $\eta$ этого цикла от максимально возможного?*

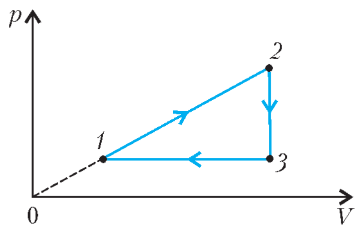

Рис. 10

**Решение.** Произведение $pV$ достигает наибольшего значения в точке *2*, а наименьшего – в точке *1*. В силу уравнения Клапейрона–Менделеева, максимальная температура газа будет в точке *2*, а минимальная – в точке *1*, т.е.

$$T_2 = 4T_1.$$

Запишем уравнения состояния для вершин цикла:

$$p_1V_1 = \nu RT_1,\ p_2V_2 = \nu RT_2,\ p_3V_3 = \nu RT_3.$$

Учтем, что точки *1* и *2* лежат на прямой, проходящей через начало координат:

$$p_1 = \alpha V_1,\ p_2 = \alpha V_2,\ \text{и}\ p_2V_1 = p_1V_2.$$

Из всех полученных уравнений легко найдем, что

$$p_2 = 2p_1\ \text{и}\ T_3 = 2T_1.$$

Известно, что КПД любой тепловой машины, работающей в некотором интервале температур, не может быть больше КПД машины, работающей по циклу Карно в том же интервале температур. В нашем случае

$$\eta_{max} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{3}{4}.$$

Найдем теперь КПД данного цикла $\eta$. Работа газа за цикл равна

$$A = \frac{1}{2}(V_3 - V_1)(p_2 - p_3) = \frac{1}{2}(V_3p_2 - V_3p_3 - V_1p_2 + V_1p_3) =$$

$$= \frac{1}{2}(\nu RT_2 - \nu RT_3 - \nu RT_1) = \frac{\nu RT_1}{2}.$$

Очевидно, что к газу подводится тепло только на участке *1–2*, поэтому

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} + (U_2 - U_1) =$$

$$= \left(A + p_1(V_3 - V_1)\right) + \left(\frac{3}{2}\nu RT_2 - \frac{3}{2}\nu RT_1\right) = 6\nu RT_1.$$

Следовательно,

$$\eta = \frac{0,5\nu RT_1}{6\nu RT_1} = \frac{1}{12}\ , \text{ и } \frac{\eta_{max}}{\eta} = \frac{3/4}{1/12} = 9\ .$$

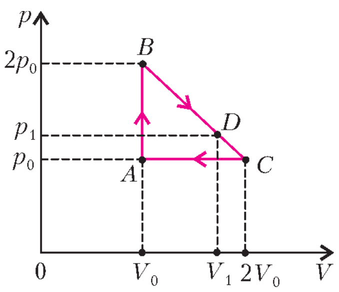


*Рис. 11*

**Задача 10** («Задачник «Кванта», Ф820). *Определите КПД цикла ABCA, изображенного на рисунке 11.*

**Решение.** Эта задача может показаться весьма похожей на первую, ибо треугольный цикл в обеих задачах один и тот же, только расположенный по-разному. Но это сходство кажущееся, так как эта задача существенно труднее первой.

Работа газа за цикл определяется сразу:

$$A = \frac{1}{2} p_0 V_0\ .$$

А для нахождения подведенного количества теплоты $Q_1$ придется немало потрудиться. На участке $AB$ тепло безусловно подводится, и

$$Q_{AB} = U_B - U_A = \frac{3}{2}\cdot 2p_0V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}p_0V_0\ .$$

На участке $BC$ давление все время падает, объем все время растет, а вот температура изменяется более сложно – сначала она до некоторой точки $D$ растет, а потом падает, возвращаясь в точке $C$ к первоначальному значению (в точке $B$). Это означает, что тепло подводится к газу не на всем участке $BC$, а только на этапе $BD$. Найдем $Q_{BD}$.

Запишем первый закон термодинамики для малого количества теплоты:

$$\Delta Q = \Delta U + p\Delta V = \Delta\left(\frac{3}{2}pV\right) + p\Delta V = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p$$

(мы использовали равенство $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p$). Приравнивая $\Delta Q$ к нулю, получим

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{5}{3}\frac{p}{V}\ .$$

Из графика найдем

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -\frac{p_0}{V_0}\ , \text{ т.е. } \frac{p_0}{V_0} = \frac{5}{3}\frac{p}{V}\ .$$

Уравнение прямой $BC$ легко пишется по двум известным точкам:

$$p = -\frac{p_0}{V_0}V + 3p_0\ .$$

Таким образом, для координат точки $D$ получаем

$$p_1 = \frac{9}{8}p_0\ ,\quad V_1 = \frac{15}{8}V_0$$

(видно, что $p_1V_1$ лежит между соответствующими произведениями для точек $B$ и $C$) и находим

$$Q_{BD} = (U_D - U_B) + \frac{1}{2}(2p_0 + p_1)(V_1 - V_0) =$$

$$= \frac{3}{2}p_1V_1 - \frac{3}{2}\cdot 2p_0V_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{25}{8}p_0V_0 = \frac{49}{32}p_0V_0\ .$$

Следовательно,

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BD} = \frac{3}{2}p_0V_0 + \frac{49}{32}p_0V_0 = \frac{97}{32}p_0V_0\ ,$$

и

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{(1/2)p_0V_0}{(97/32)p_0V_0} = \frac{16}{97} \approx 16,5\%\ .$$

### Упражнения

**1.** На рисунке 12 представлен цикл турбореактивного двигателя, состоящий из двух изобар и двух адиабат. По известным температурам $T_1, T_2, T_3, T_4$ найдите КПД цикла.

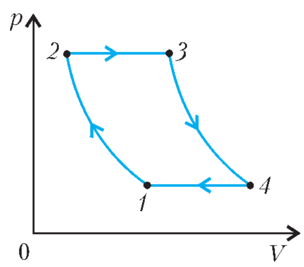


*Рис. 12*

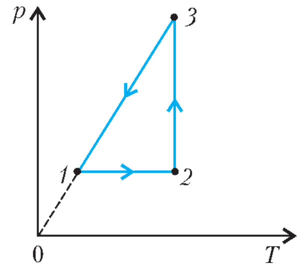


*Рис. 13*

**2** (МИЭТ). Определите КПД цикла, изображенного на рисунке 13, если известно, что в начальном состоянии *1* температура газа $T_1 = 300$ К, отношение объемов газа в состояниях *3* и *2* равно 2 и при изотермическом расширении газ совершает работу $A = 5$ кДж. Количество вещества газа $\nu = 1$ моль.

**3** (МАИ, 2003). Коэффициент полезного действия цикла *1–2–3–1* (рис.14) равен $\eta = 15\%$. Найдите КПД цикла *3–5–4–3*.

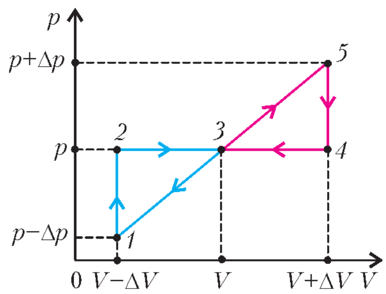


*Рис. 14*

**4** (МГУ, физфак, 1995). Давление газа меняют от величины $p_1$ до величины $p_2$ в соответствии с $pV$-диаграммой, имеющей вид треугольника, показанного на рисунке 15. Найдите КПД цикла, если температура газа в состоянии *3* больше его температуры в состоянии *1*.

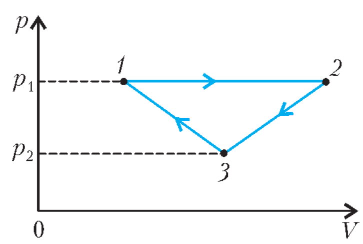


*Рис. 15*

**5** (МАИ, 2003). Цикл состоит из изохоры *1–2*, изобары *2–3* и прямой *3–1* (рис.16). Температуры в точках *1*, *2* и *3* связаны соотношениями $T_2 = 1,5T_1$ и $T_3 = 3T_1$. Определите КПД цикла.

**6** (МФТИ). Цикл *1–2–3–1* состоит из прямолинейного участка *1–2*, адиабаты *2–3* и изотермы *3–1* (рис.17). Его КПД равен

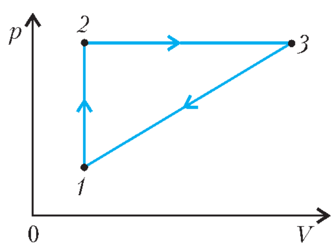


*Рис. 16*

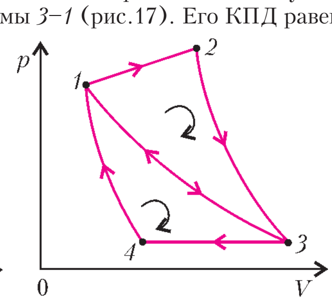


*Рис. 17*

$\eta_1$. Цикл *1–3–4–1* состоит из изотермы *1–3*, изобары *3–4* и адиабаты *4–1*. Его КПД равен $\eta_2$. Определите КПД цикла *1–2–3–4–1*. Все циклы обходятся по часовой стрелке.