

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2011» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2206» или «Ф2213». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvantjournal.ru](mailto:math@kvantjournal.ru) и [phys@kvantjournal.ru](mailto:phys@kvantjournal.ru) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2206 – М2211 предлагались на XXXII Турнире городов.

## Задачи М2206–М2213, Ф2213–Ф2219

**М2206.** а) Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой машины. В некоторый момент в участке спохватились и послали своего лучшего полицейского на поимку угонщика, дав ему новую полицейскую машину. Однако полицейский не знал, ни когда машина была угнана, ни в какую сторону вдоль бесконечной в обе стороны дороги уехал угонщик. Сможет ли полицейский догнать угонщика?

б) Решите ту же задачу, если от полицейского участка отходят бесконечные дороги в  $N$  направлениях.

Г.Гальперин

**М2207.** Квадратная доска разделена на  $n^2$  клеток  $n - 1$  горизонтальными и  $n - 1$  вертикальными прямыми. Клетки раскрашены в шахматном порядке. Известно, что на одной диагонали все клетки черные и квадратные. Докажите, что общая площадь всех черных клеток не меньше общей площади всех белых.

П.Кожевников

**М2208.** Имеется многоугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2.

Г.Гальперин

**М2209.** На кольцевом треке  $2N$  велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не

встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее  $N^2$  встреч.

Б.Френкин

**М2210.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ , причем точка  $O$  не лежит ни на одной из диагоналей этого четырехугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника  $AOC$  лежит на прямой  $BD$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $BOD$  лежит на прямой  $AC$ .

Ф.Ивлев

**М2211\*.** Квадрат  $ABCD$  разрезан на одинаковые прямоугольники. Покрасим все прямоугольники, которые разрезает диагональ  $AC$ . Докажите, что  $AC$  делит площадь покрашенной части квадрата пополам.

В.Произволов

**М2212.** Докажите, что для любого натурального  $a \geq 3$  существуют бесконечно много натуральных  $n$  таких что а)  $a^n - 1$  делится на  $n$ ; б\*)  $a^n - 1$  делится на  $n^2$ .

В.Сендеров

**М2213\*.** В описанном четырехугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $E$ , через  $I_a, I_b, I_c, I_d$  обозначены центры вписанных окружностей треугольников  $BCD, CDA, DAB, ABC$ . Докажите, что точка пересечения прямых  $I_a I_c$  и  $I_b I_d$  равноудалена от центров окружностей, вписанных в треугольники  $ABE, BCE, CDE, DAE$ .

Н.Белухов

**Ф2213.** После удара первого натуралиста палкой по стволу дерева пчелы вылетают из дупла, расположенного высоко – на высоте 30 м – на дереве, и разлетаются во все стороны со скоростями 1 м/с в поисках нарушителей их спокойствия. Каждую секунду наружу выбираются 1000 пчел. Второй натуралист (участ-

ник эксперимента) с очень чувствительным микрофоном расположился на соседнем дереве на расстоянии 30 м от «пчелиного» дерева на той же высоте, что и пчелиное гнездо. Он записывает жужжание, производимое пчелами. Почва под деревьями покрыта старой листвой и практически не отражает звук. Как менялась со временем громкость звука до того момента, пока «чистота» эксперимента не была нарушена воплями натуралистов?

Ж. Фабр

**Ф2214.** Найдите минимальную скорость движения границы полной тени Луны по поверхности Земли во время солнечного затмения. Считайте, что орбита Луны при ее движении вокруг Земли круговая и лежит в плоскости орбиты, по которой Земля движется вокруг Солнца. Расстояние от Земли до Луны примерно в 60 раз больше радиуса Земли.

В. Славутинский

**Ф2215.** Куб с ребром  $A$  и с равномерно распределенной по объему массой  $M$ , начальная скорость которого  $v$  направлена вдоль четырех ребер куба, движется в разреженном газе с концентрацией  $n$  молекул с массой  $m \ll M$  и температурой  $T$ . Удары молекул о гладкие стенки куба абсолютно упругие. Длина свободного пробега молекул много больше ребра куба, т.е.  $\lambda \gg A$ , а  $n \gg 1/A^3$ . Каково ускорение куба? Рассмотрите только два крайних случая: а)  $v^2 \gg kT/m$ ; б)  $v^2 \ll kT/m$ .

А. Кубов

**Ф2216.** Имеется гексагональная бесконечная сетка. Каждые два узла сетки характеризуются минимальным количеством «мостиков», которые нужно преодолеть, чтобы из одного узла перебраться в другой. Каждое звено такой сетки, расположенное между двумя соседними узлами, имеет сопротивление  $r$ . К каждому узлу сетки подключены три таких звена. От узла  $A$  можно вдоль проволочек (звеньев) сетки передвигаться к трем ближайшим узлам  $B$  сетки. От этих трех узлов по другим проволочкам можно перебраться к следующим по удаленности от точки  $A$  шести узлам  $C$ . Начиная с этих узлов  $C$ , симметрия перемещения по мостикам нарушается. Если батарейка подключена к двум узлам сетки, расположенным очень далеко друг от друга, то от каждого узла  $C$  токи, уходящие по двум проволочкам к следующим по удаленности от  $A$  узлам, имеют два разных значения, и их отношение неизвестно. Предположим, что отношение токов равно  $k$ . Найдите сопротивления сетки между узлом  $A$  и некоторыми узлами сетки, которые отстоят от  $A$  на 5 проволочек-мостиков.

С. Узлов

**Ф2217.** На длинных невесомых и нерастяжимых нитях, прикрепленных к потолку, висят три стальных сплошных шара диаметрами  $3D$ ,  $2D$  и  $D$ . В равновесном положении все нити вертикальны, центры шаров находятся на одинаковых расстояниях  $L \gg D$  от потолка и на одной горизонтальной линии, причем шары почти касаются друг друга. Посередине находится шар

диаметром  $2D$ . Шар диаметром  $3D$  отводят от положения равновесия так, что нить, к которой он прикреплен, остается выпрямленной, находится в той же плоскости, что и две другие нити, и образует с вертикалью угол  $\alpha \ll 1$ . Шар отпускают. Найдите максимальный угол  $\beta$  отклонения нити, удерживающей шар диаметром  $D$ , после первой серии ударов шаров. Считайте все удары абсолютно упругими.

Д. Шаров

**Ф2218.** Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента при напряжениях, не превышающих по модулю некоторой величины  $U_0$ , имеет вид  $I = \alpha U^3$ . Два диода, включенные параллельно друг другу так, что «плюс» одного соединен с «минусом» другого, имеют похожую характеристику. При подаче на такой элемент напряжения, изменяющегося по гармоническому закону  $u = U_0 \cos \omega t$ , в частотном спектре тока присутствуют первая и третья гармоники. Каково отношение их амплитуд?

В. Поляков

**Ф2219.** В недалеком будущем на уроке физики в школе на Луне проводится такой эксперимент. Сплошной плоский стальной лист большой площади и одинаковой по всей площади толщиной – плиту – окунают в расплавленный парафин, вынимают и ждут, когда он остынет. Плита покрывается тонкой пленкой парафина, который не смачивается водой. Плиту аккуратно опускают на поверхность воды в сосуде, и она не тонет. Какова максимальная толщина используемой в эксперименте плиты? Ускорение свободного падения на поверхности Луны равно  $1,6 \text{ м/с}^2$ . Сталь, парафин и вода на Луне такие же, как и на Земле.

Д. Ломов

#### Решения задач М2184–М2190, Ф2196–Ф2204

**М2184.** Про функцию  $f(x)$  известно следующее: любая прямая на координатной плоскости имеет с графиком  $y = f(x)$  столько же общих точек, сколько с параболой  $y = x^2$ . Докажите, что функция  $f(x)$  тождественно равна  $x^2$ .

Проведем касательную  $l$  к параболе в произвольной точке  $A(a, a^2)$ . Эта касательная имеет с графиком  $\Gamma$  функции  $f(x)$  ровно одну общую точку. Точки под этой касательной не могут принадлежать  $\Gamma$ , поскольку каждая из них лежит на параллельной  $l$  прямой, не имеющей общих точек с  $\Gamma$ . Точки прямой  $l$ , отличные от  $A$ , также не могут принадлежать  $\Gamma$ : каждая из них находится под какой-то другой касательной к параболе. Следовательно, точка  $A$ , а значит и любая точка параболы, принадлежит  $\Gamma$ , откуда (так как  $f(x) = x^2$ ) следует утверждение задачи.

А. Шаповалов

**М2185.** Дано натуральное число  $n \geq 5$ . Про пирамиду  $SA_1A_2 \dots A_n$  известно, что ее основание  $A_1A_2 \dots A_n$  – правильный  $n$ -угольник, а все боковые грани – равнобедренные треугольники (не обязательно с вершиной  $S$ ). Обязательно ли эта пирамида правильная?

**Ответ:** нет при  $n = 5$ ; да при  $n \geq 6$ .

Пусть  $n = 5$ . В плоскости  $\alpha$  возьмем правильный пятиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5$  и построим в плоскости, перпендикулярной  $\alpha$ , треугольник  $A_1SA_3$ , равный треугольнику  $A_1A_2A_3$ . Легко видеть, что пирамида  $SA_1A_2A_3A_4A_5$  не является правильной, но удовлетворяет условию.

Пусть теперь  $n \geq 6$ ,  $O$  – центр правильного  $n$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_n$ , а длина его стороны равна 1. Докажем, что проекция  $S'$  вершины  $S$  на основание совпадает с точкой  $O$ .

Покрасим те вершины  $A_i$ , для которых длина ребра  $SA_i$  равна 1, также покрасим все стороны  $n$ -угольника, не имеющие покрашенных концов. Ясно, что  $S'$  лежит на серединном перпендикуляре к любой покрашенной стороне.

1) Если нашлись две непараллельные покрашенные стороны, то  $S'$  лежит на пересечении серединных перпендикуляров к ним, т.е. совпадает с  $O$ .

2) Если покрашено не менее трех вершин  $A_i$ , то  $S$ , а значит и  $S'$ , равноудалена от трех вершин основания, т.е. совпадает с  $O$ .

Пусть ни одно из двух перечисленных условий не выполнено. Тогда  $n = 6$ , и в правильном шестиугольнике  $A_1A_2 \dots A_6$  покрашены две противоположные вершины. Пусть это  $A_1$  и  $A_4$ . Но это невозможно, так как  $A_1A_4 = 2$  и  $SA_1 + SA_4 = 1 + 1 = 2$ .

П.Кожевников

**M2186.** Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен  $P(x)$  с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения  $P(2)$  и  $P(P(2))$ . Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

**Ответ:** барон прав.

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \text{ и } P(2) = b.$$

Тогда

$$b = 2^n a_n + \dots + 2a_1 + a_0 > a_n + \dots + a_1 + a_0,$$

отсюда

$$b^n > b^{n-1} (a_n + \dots + a_1 + a_0) \geq a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0.$$

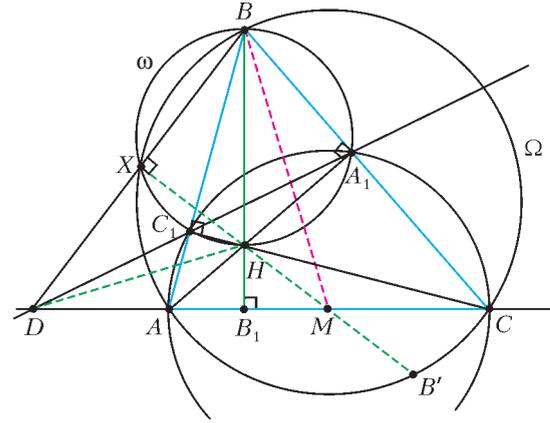
Это означает, что  $a_n$  – неполное частное, а  $a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$  – остаток от деления  $P(P(2))$  на  $b^n$ .

Аналогично,  $a_{n-1}$  определяется как неполное частное от деления  $a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$  на  $b^{n-1}$  и т.д.

С.Маркелов

**M2187.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ , пересекающиеся в точке  $H$ . Прямые  $A_1C_1$  и  $AC$  пересекаются в точке  $D$ . Докажите, что прямая  $DH$  перпендикулярна медиане, проведенной из вершины  $B$ .

Пусть  $BM$  – медиана треугольника  $ABC$  (см. рисунок). Докажем, что  $H$  – точка пересечения высот треугольника  $BMD$ , отсюда будет следовать утверждение задачи. Так как  $BH \perp MD$ , то достаточно доказать, что  $MH \perp BD$ .



Заметим, что точки  $A, C, A_1, C_1$  лежат на одной окружности с диаметром  $AC$ , а точки  $B, H, A_1, C_1$  лежат на одной окружности  $\omega$  с диаметром  $BH$ . Пусть  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $BD$  с описанной окружностью  $\Omega$  треугольника  $ABC$ . Тогда  $DX \cdot DB = DA \cdot DC = DA_1 \cdot DC_1$ , значит,  $X$  лежит на окружности  $\omega$ , следовательно,  $\angle BXH = 90^\circ$ , и прямая  $HX$  пересекает  $\Omega$  вторично в точке  $B'$ , диаметрально противоположной  $B$ . Тогда

$$\angle CAB' = \angle CBB' = 90^\circ - \angle CB'B = 90^\circ - \angle CAB = \angle HCA,$$

и аналогично  $\angle ACB' = \angle HAC$ . Отсюда  $AHCB'$  – параллелограмм, и прямая  $HB'$  (перпендикулярная  $BD$ ) содержит точку  $M$ .

*Замечание.* Для решения данной задачи к точкам  $A, C, A_1, C_1$  можно применить следующий общий факт: если точки  $A, B, C, D$  лежат на одной окружности с центром  $O$  и  $P = AB \cap CD$ ,  $Q = AC \cap BD$ ,  $R = AD \cap BC$ , то точки  $O, P, Q, R$  образуют ортоцентрическую четверку (т.е. любая из них является ортоцентром для треугольника с вершинами в трех других). Этот факт нетрудно доказать с использованием полярного соответствия.

С.Ильясов, П.Кожевников

**M2188.** На плоскости лежит игла. Разрешается поворачивать иглу на  $45^\circ$  вокруг любого из ее концов. Можно ли, сделав несколько таких поворотов, добиться того, чтобы игла вернулась на исходное место, но при этом ее концы поменялись местами?

**Ответ:** нельзя.

*Первое решение.* Пусть  $A$  и  $B$  – концы иглы.

Предположим, что имеется последовательность поворотов на углы, кратные  $45^\circ$ , в результате которой конец  $B$  попадает в начальное положение конца  $A$  (можно считать, что вначале выполняется поворот вокруг  $B$ , затем вокруг  $A$ , затем вокруг  $B$  и т.д.). Пусть после первого поворота конец  $A$  попадает в точку  $A_2$ , после второго поворота конец  $B$  попадает в  $B_2$  и т.д., после очередного поворота конец  $B$  попадает в точку  $B_n = A_1$ . Мы получаем замкнутую цепочку из  $2n - 1$  (нечетного количества!) векторов  $\overline{A_1B_1}, \overline{B_1A_2}, \overline{A_2B_2}, \dots, \overline{A_nB_n}$ , имеющих равные длины. Все эти векторы параллельны одному из четырех направлений (составляющих углы, кратные  $45^\circ$  друг с другом). Покажем, что количество векторов, параллельных каждому на-

правлению, четно; тем самым, получим противоречие. Возьмем одно из этих направлений. Введем координаты, направив ось  $Ox$  параллельно этому направлению. Длину каждого вектора примем равной 2. Абсцисса каждого вектора, параллельного оси  $Ox$ , равна  $\pm 2$ ; пусть  $k$  горизонтальных векторов имеют абсциссу 2, а остальные  $l$  имеют абсциссу  $-2$ . Абсцисса вектора, не параллельного оси  $Ox$ , равна  $\pm\sqrt{2}$  или 0. Так как сумма всех векторов равна  $\vec{0}$ , то сумма их абсцисс равна 0, т.е.  $2k - 2l + m\sqrt{2} = 0$ , где  $m$  – некоторое целое число. Так как число  $\sqrt{2}$  иррационально, то  $2k - 2l = 0$ , значит, общее количество векторов, параллельных оси  $Ox$ , равно  $k + l = 2k$ .

*Второе решение.* Для пары  $P(a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2})$ , где  $a, b, c, d$  – рациональные числа, положим  $f(P) = a + 2b + c$  (отметим, что при покомпонентном сложении двух таких пар значения  $f$  складываются).

Пусть вначале конец иглы  $A$  находится в точке  $(0; 0)$  ( $f(0; 0) = 0$ ), а конец  $B$  – в точке  $(1; 0)$  ( $f(1; 0) = 1$ ). В любой момент координаты вектора  $\overline{AB}$  могут быть равны одной из пар  $(\pm 1; 0)$ ,  $(0; \pm 1)$ ,  $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \mp \frac{\sqrt{2}}{2})$ ; в любом случае значения  $f$  для такой пары равно  $\pm 1$ . Тогда в каждый момент концы иглы  $A$  и  $B$  имеют координаты вида  $(a + b\sqrt{2}; c + d\sqrt{2})$  ( $a, b, c, d$  – рациональные числа), причем  $f(A) - f(B) = \pm 1$ . При каждом повороте иглы одно из чисел  $A$  и  $B$  остается неизменным, поэтому всегда  $f(A)$  четно, а  $f(B)$  нечетно. Значит, концы  $A$  и  $B$  поменяться местами не могут.

А.Грибалко

**M2189.** Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

**Ответ:** могут (для любого числа  $n$  богатырей). Пусть длина кольцевой дороги равна 1. Пусть скорости двух богатырей равны натуральным числам  $v_1$  и  $v_2$ ,  $v_1 > v_2$ . Тогда встречи этих двух богатырей будут происходить через временные интервалы величиной  $\frac{1}{v_1 - v_2}$ . Значит, если  $\frac{v_1}{v_1 - v_2}$  и  $\frac{v_2}{v_1 - v_2}$  равны целым числам, то рассматриваемые богатыри будут встречаться при обгонах только в точке старта.

Теперь для построения примера достаточно показать, что найдется набор из  $n$  различных натуральных чисел, каждое из которых делится на его разность с любым другим из этих чисел. Пример для двух чисел очевиден: 1 и 2. Для большего количества чисел пример можно конструировать по индукции: если  $u_1, \dots, u_n$  –

нужный набор из  $n$  чисел, то  $p, p + u_1, \dots, p + u_n$ , где  $p = u_1 u_2 \dots u_n$ , – искомый набор для  $n + 1$  числа.

Л.Медников, А.Шаповалов

**M2190.** Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить  $12345 + 6 + 789 = 13140$ ). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций.

На самом деле хватит и четырех операций. Для чисел, меньших десяти тысяч, это очевидно. Иначе докажем, что после первой операции можно получить число вида  $10\dots 0abcd$ . После этого достаточно будет трижды заметить число на сумму его цифр.

Предварительно разобьем число на четырехзначные слагаемые (не начинающиеся с нуля) плюс, возможно, несколько нулей, плюс, возможно, одно меньшее число в конце (например,  $12300004500060 = 1230 + 0 + 0 + 0 + 4500 + 0 + 60$ ). Если получилось  $k$  четырехзначных слагаемых, то сумма  $S$  не меньше  $1000k$ . Будем теперь по шагам измельчать эту сумму, заменяя на каждом шаге одно ненулевое слагаемое на сумму его цифр. На каждом шаге  $S$  уменьшается, но не больше чем на 9999. Так как сумма цифр исходного числа не более  $36k + 27 < 100k$ , то наступит момент, когда после очередного шага количество разрядов в числе  $S$  уменьшится. За шаг до этого момента сумма  $S$  равнялась числу вида  $10\dots 0abcd$  – этого мы и добивались.

Л.Медников, А.Шаповалов

**Ф2196.** Катушка индуктивностью  $L = 10$  Гн соединена последовательно с конденсатором емкостью  $C = 0,1$  мкФ, и цепь подключают к батарейке. Через какое время напряжение на конденсаторе установится с точностью не хуже 1%? Элементы цепи считать идеальными, сопротивление соединяющих проводов  $R = 1$  Ом.

Установившееся значение напряжения на конденсаторе будет равно ЭДС батарейки. Если обозначить напряжение на конденсаторе  $U$ , а ЭДС батарейки  $\varepsilon$ , то, в зависимости от того, как был заряжен конденсатор до подключения к батарейке, равновесное значение может быть получено сразу или будет идти процесс постепенного приближения  $U$  к  $\varepsilon$ . Предположим, что в момент подключения на пластинах конденсатора не было зарядов. Закон Ома для замкнутой цепи, описывающий процесс в этой электрической цепи после подключения к батарейке, будет выглядеть так:

$$\varepsilon - L \frac{d^2(CU)}{dt^2} = R \frac{d(CU)}{dt} + U.$$

Слева от знака равенства записана сумма всех ЭДС, действующих в замкнутом контуре, а справа – сумма падений напряжения на резисторе и конденсаторе. Разделим правую и левую части уравнения на  $CL$  и введем новое обозначение:  $V = U - \varepsilon$ . Тогда уравнение

запишется так:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{CL} V = 0.$$

Это уравнение затухающих колебаний. Система приходит к равновесию формально за бесконечно большое время. При этом напряжение на конденсаторе может либо колебаться с затуханием, постепенно приближаясь к равновесному положению, либо это приближение будет носить аperiодический характер. Какой именно режим осуществится, зависит от соотношения между параметрами  $R$ ,  $C$ ,  $L$ . Для указанных в условии значений этих параметров реализуется режим колебаний с постепенным уменьшением амплитуды. При этом промежуток времени между последовательными применениями напряжений через значение  $\varepsilon$  составляет примерно  $2\pi \cdot 10^{-3}$  с. Начальная амплитуда колебаний равна  $\varepsilon$ . Амплитуда колебаний  $A$  меняется со временем по закону

$$A = \varepsilon \cdot \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) = \varepsilon \cdot \exp\left(-\frac{t}{20c}\right).$$

В задаче нужно найти время  $t$ , за которое амплитуда колебаний станет меньше  $\varepsilon/100$ . Отсюда получается уравнение для нахождения  $t$ :

$$\exp\left(-\frac{t}{20c}\right) = \frac{1}{100}, \text{ и } t = \ln 100 \cdot 20 \text{ с} \approx 92,1 \text{ с}.$$

Через  $t = 92,1$  с отличие напряжения на конденсаторе от ЭДС батарейки будет меньше 1%.

**Ф2197.** На плоскую стену перпендикулярно падает плоская световая волна с длиной волны  $\lambda$ . Перед стеной параллельно ей ставят непрозрачный экран с круглым отверстием. Во сколько раз освещенность в центре светового пятна на стене может быть больше, чем освещенность без экрана? Расстояние между экраном и стеной  $h$ .

Освещенность в центре светового пятна зависит от соотношения величин  $\lambda$ ,  $h$  и  $R$  – радиуса круглого отверстия в экране. При заданных  $\lambda$  и  $h$  нужно подобрать такое значение  $R$ , чтобы освещенность в центре пятна была максимальной. Воспользуемся принципом Гюйгенса–Френеля. В точку, соответствующую центру пятна, приходят и складываются волны от вторичных источников волн, расположенных по всей площади отверстия в экране. При этом амплитуды и фазы складывающихся волн зависят от положения создавших эти волны вторичных источников. Для получения максимальной освещенности в центре нужно оставить открытыми только те области, для которых расстояние до центра пятна на экране отличается от  $h$  не более чем на  $\lambda/2$ .

(Чтобы понять зависимость амплитуды колебаний в точке наблюдения – в точке стены напротив центра отверстия – от радиуса отверстия  $R$ , надо разбить открытую область экрана на тонкие концентрические кольца равной площади. Площадь должна быть одной и той же для того, чтобы амплитуды колебаний от всех

колец – вторичных источников света на фронте волны – были одинаковыми. Если расстояние от такого кольца до точки наблюдения равно  $h + l$ , то  $l$  будет увеличением длины пути по сравнению с центральной точкой экрана, а отставание по фазе будет равно  $\varphi = \frac{l}{\lambda} \cdot 2\pi$ . Из формул (рис.1)

$$(h + l)^2 = R^2 + h^2 \rightarrow 2hl + l^2 = R^2 \rightarrow 2h\Delta l = 2R\Delta R$$

следует, что одинаковым приращениям площади  $\Delta S = 2\pi R\Delta R$  соответствуют одинаковые приращения длины пути  $\Delta l$  и фазы  $\Delta\varphi$ . Это означает, что вклады в колебания от последовательных тонких колец будут складываться в окружности с постепенно уменьшающимся радиусом (рис.2.) Из геометрических соображений (см. рис.1) получаем соотношение для нужного радиуса  $R_0$  отверстия:

$$h^2 + R_0^2 = \left(h + \frac{\lambda}{2}\right)^2, \text{ или } R_0^2 = h\lambda + \frac{\lambda^2}{4}.$$

Если считать, что  $h \gg \lambda$ , то вторым слагаемым в правой части последнего равенства можно пренебречь. Тогда

$$R_0^2 = h\lambda, \text{ откуда следует, что } R_0 \ll h.$$

Если плавно увеличивать радиус отверстия до  $\infty$ , т.е. до полного отсутствия экрана, то амплитуда вектора напряженности электрического поля суммарной электромагнитной волны, созданной в центре пятна всеми вторичными источниками света, будет периодически расти и уменьшаться: от  $R = 0$  до  $R = R_0$  амплитуда растет вплоть до значения  $A$ , затем от  $R_0$  до  $R_0\sqrt{2}$  амплитуда уменьшается почти до нуля, затем снова растет почти до  $A$  при значении  $R = R_0\sqrt{3}$ , затем снова уменьшается почти до нуля при значении  $R = R_0\sqrt{4}$ . В конце концов установится значение  $A/2$ , соответствующее полностью отсутствующему экрану (точный расчет выходит за пределы школьных возможностей).

Освещенность в точке на стене пропорциональна квадрату амплитуды колебаний вектора напряженности электрического поля в этой точке. Следовательно, освещенность при наличии отверстия радиусом  $R_0$  в 4 раза больше, чем в отсутствие экрана. На рисунках 3 и 4 приведены полученные в результате численных расчетов зависимости амплитуды поля  $E/E_{\max}$  и освещенности  $I/I_{\max}$  в центре картины от величины отношения  $R/R_0$ . При этом отношение  $h/\lambda = 100$ , шаг изменения радиуса отверстия выбран  $\lambda/20$ , макси-

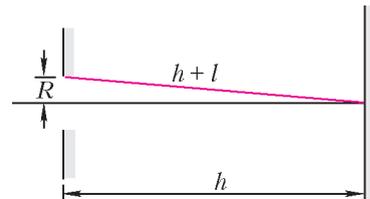


Рис. 1

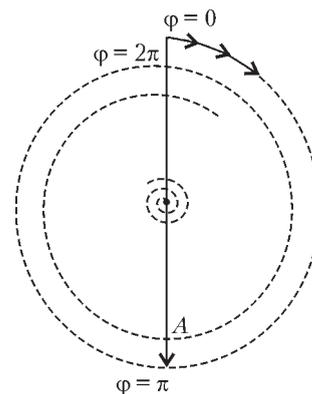


Рис. 2

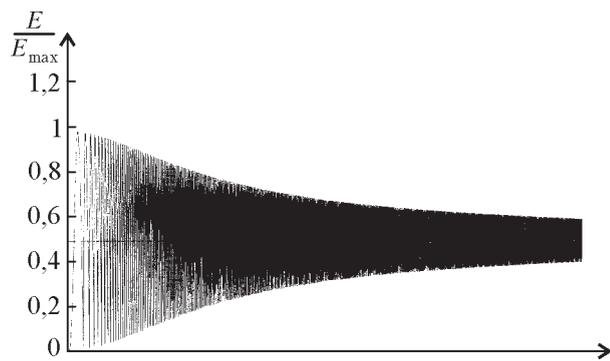


Рис. 3

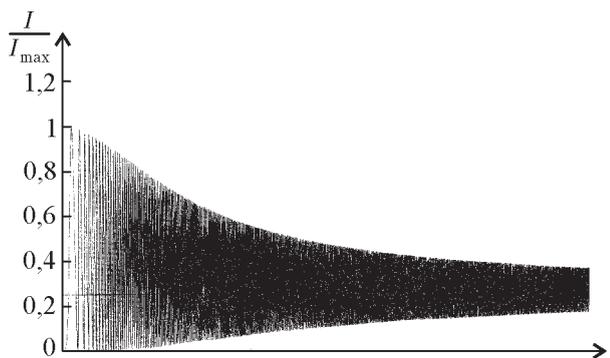


Рис. 4

мальное отношение  $R/R_0 = 50$ . Для «ориентировки» на рисунке 3 проведена линия, соответствующая половине максимальной величины амплитуды напряженности поля, а на рисунке 4 проведена линия, соответствующая значению четверти максимальной величины освещенности.

**Ф2198.** На гладком горизонтальном столе лежит плашмя тонкий обруч массой  $M$ . На обод намотана легкая нерастяжимая нить, за свободный конец нити мы тянем с силой  $F$ , направленной по касательной к обручу. С каким ускорением движется конец нити, за который мы тянем?

Обруч будет скользить по столу, при этом нить будет с него смотываться. Центр масс обруча, совпадающий с его геометрическим центром, движется с ускорением  $a = F/M$ . В неинерциальной системе отсчета, движущейся с таким же ускорением по отношению к инерциальной системе отсчета, связанной со столом, центр обруча покоится (или движется с постоянной скоростью). Чтобы и в такой неинерциальной системе отсчета пользоваться законами Ньютона, нужно ввести так называемую силу инерции  $\vec{F}_{\text{ин}} = -M\vec{a} = -\vec{F}$ , которая, как и сила тяжести, приложена к центру тяжести (к центру обруча). В этой системе отсчета сумма сил, действующих на обруч, с учетом силы инерции равна нулю, поэтому ускорение центра обруча равно нулю. На обруч действует пара сил, момент которой равен по величине  $FR$ , где  $R$  – радиус обруча. Этот момент сил заставляет обруч раскручиваться все быстрее и быстрее. Угловое ускорение  $\beta$  при таком движении равно моменту сил  $FR$ , деленному на момент инерции обруча относительно его оси вращения  $MR^2$ . При этом линейное ускорение точек на обруче и нити, которая с обруча

смотывается, равно

$$a = \beta R = \frac{FR}{MR^2} R = \frac{F}{M}.$$

По отношению к исходной системе отсчета конец нити, за который тянут обруч, участвует в двух движениях: движется вместе с неинерциальной системой отсчета с ускорением  $F/M$  и в этой системе движется с таким же ускорением  $F/M$ . В результате ускорение конца нити в инерциальной системе отсчета равно

$$a' = 2a = 2 \frac{F}{M}.$$

**Ф2199.** Тело, находящееся на наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, бросают горизонтально. Найдите, при каком угле  $\alpha$  траекторией тела будет периодическая кривая. Коэффициент трения тела о наклонную плоскость равен  $\mu$ .

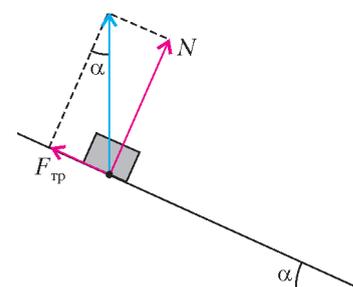
Очевидно, что до первого удара тела о плоскость траекторией тела является кусок параболы. Требуется, чтобы траектория и дальше состояла из точно таких же кусков парабол. Это означает, что если в начальный момент тело имеет скорость  $\vec{v}_0$ , то вектор скорости тела после каждого удара тоже должен быть равен  $\vec{v}_0$ . В процессе движения горизонтальная составляющая скорости остается неизменной, а вертикальная меняется за счет действия силы тяжести. При ударе на тело дополнительно действуют две силы: сила реакции  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Именно в результате действия этих сил происходит отскок от поверхности. Причем в течение всего времени удара действует сила трения скольжения, т.е. выполняется соотношение  $F_{\text{тр}} = \mu N$ . Действительно, скольжение прекращается, если обращается в ноль касательная к поверхности составляющая скорости. В этом случае скорость отскока направлена перпендикулярно к плоскости, а в нашей задаче – горизонтально. (Можно проверить, что такой случай реализуется, если угол  $\beta$  между скоростью падения и плоскостью удовлетворяет соотношению  $\text{tg } \beta > \mu$ . Как будет видно из ответа, в нашем случае  $\text{tg } \beta < \mu$ .)

Следовательно, равнодействующая сил  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$  во все моменты взаимодействия тела с плоскостью будет иметь постоянное направление.

Для того чтобы после отскока вектор скорости был равен  $\vec{v}_0$ , нужно, чтобы силы трения и нормальной реакции изменили скорость тела, скомпенсировав результат действия силы тяжести за время полета. Для этого требуется, чтобы равнодействующая сила была направлена вертикально вверх. Из рисунка видно, что при этом  $F_{\text{тр}} = N \text{tg } \alpha$ . Но, с другой стороны,  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , поэтому  $N \text{tg } \alpha = \mu N$ , откуда

$$\alpha = \text{arctg } \mu.$$

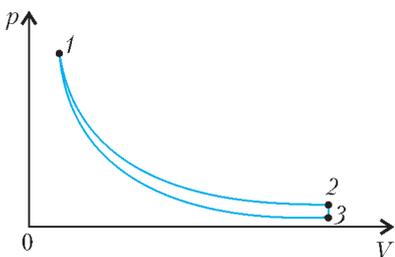
И последнее замечание.



Откуда следует, что равнодействующая сил  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , даже имея вертикальное направление, полностью и точно компенсирует действие силы тяжести за время полета? Может быть, изменение скорости  $\Delta\vec{v}$  направлено вертикально, но не равно нулю? Чтобы убедиться, что  $\Delta\vec{v} = 0$ , надо вспомнить, что перпендикулярная к плоскости составляющая скорости будет как перед ударом, так и сразу после удара (удар упругий) иметь по модулю такое же значение, как и в момент броска. Это значит, что если бы  $\Delta\vec{v}$  не равнялось нулю, то оно обязательно было бы направлено не вертикально, а по касательной к поверхности.

**Ф2200.** С порцией одноатомного газа проводят циклический процесс, состоящий из изотермического расширения в 9 раз, охлаждения в 3 раза при неизменном объеме и адиабатического сжатия до первоначального состояния (можете проверить – получается!). Найдите термодинамический КПД этого цикла.

К сожалению, проверка показала, что числа в условии подобраны неудачно и цикл при значениях коэффициентов 9 и 3 не получается. Однако можно подобрать правильные значения, при которых цикл на самом деле получается: это 8 и 4.



Изобразим на  $pV$ -диаграмме (см. рисунок) этот циклический процесс: 1-2 – изотерма, 2-3 – изохора и 3-1 – адиабата. Для КПД цикла имеем

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = 1 - \frac{Q_-}{Q_+}.$$

Найдем подведенное к газу количество теплоты  $Q_+$  и отведенное от него количество теплоты  $Q_-$ . Тепло подводится на участке 1-2 (изотерма), а отводится на участке 2-3 (изохора). Обозначим температуру на изотермическом участке через  $T$ . Тогда

$$T_2 = T \text{ и } T_3 = \frac{T}{4}.$$

Для  $\nu = 1$  моль идеального одноатомного газа

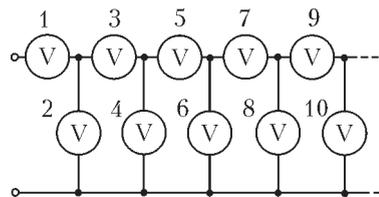
$$Q_+ = RT \ln \frac{V_1}{V_2} = RT \ln 8,$$

$$Q_- = C_V (T_2 - T_3) = \frac{3}{2} R \cdot \frac{3}{4} T = \frac{9}{8} RT,$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{9}{8 \ln 8} \approx 0,46 = 46\%.$$

**Ф2201.** Из множества одинаковых вольтметров собрана обычная «бесконечная» цепь, подключенная к батарейке. Первый из вольтметров показывает больше всех – его стрелка отклоняется почти на всю шкалу. Погрешность приборов составляет 1%. Сколько приборов показывают напряжения, превышающие порог погрешности?

Вот так выглядит обычная «бесконечная» цепь из вольтметров:



Если сопротивление одного вольтметра равно  $R$ , то сопротивление  $Z$  всей цепочки вольтметров можно найти из уравнения

$$R + \frac{RZ}{R+Z} = Z, \text{ откуда } Z = R \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Если ЭДС батарейки равна  $\mathcal{E}$ , то первый вольтметр покажет значение  $U_1 = \mathcal{E}R/Z = 2\mathcal{E}/(\sqrt{5}+1)$ , второй вольтметр покажет  $\mathcal{E} - 2\mathcal{E}/(\sqrt{5}+1) = \mathcal{E}(\sqrt{5}-1)/(\sqrt{5}+1)$ , третий покажет  $2\mathcal{E}(\sqrt{5}-1)/(\sqrt{5}+1)^2$ , четвертый –  $\mathcal{E}(\sqrt{5}-1)^2/(\sqrt{5}+1)^2$  и т.д. В результате все нечетные вольтметры – их  $n$  – показывают значения

$$U_n = U_1 \left( \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right)^{(n-1)/2}.$$

Все четные вольтметры – их  $k$  – показывают значения

$$U_k = U_1 \frac{\sqrt{5}+1}{2} \left( \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right)^{k/2}.$$

Чтобы нечетный вольтметр показывал значение меньше, чем погрешность прибора, его номер  $n$  должен быть таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\left( \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right)^{(n-1)/2} < 0,01.$$

Отсюда находим  $n = 11$ . Чтобы четный вольтметр показывал значение меньше, чем погрешность прибора, нужно, чтобы

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \left( \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right)^{k/2} < 0,01.$$

Отсюда получаем  $k = 12$ .

Следовательно, всего 12 приборов показывают напряжения большие, чем их погрешность.

**Ф2202.** На рисунке 1 приведена схема включения обычного транзистора. Напряжение батарейки равно 6 В. Сопротивления резисторов в цепи базы – по 100 кОм, в цепи эмиттера – 10 кОм. Потенциал вывода базы (относительно «минуса» батарейки) +2,7 В, потенциал эмиттера +2,1 В. Во сколько раз ток коллектора транзистора больше тока базы?

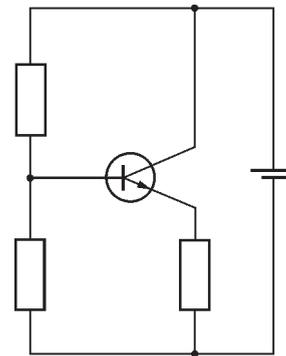


Рис. 1

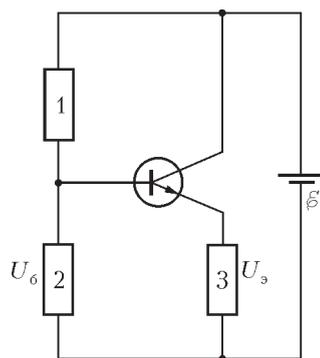


Рис. 2

Обозначим (рис.2) напряжение (ЭДС) батарейки  $\varepsilon$ , сопротивления резисторов  $R_1 = R_2 = 100 \text{ кОм} = R_6$ ,  $R_3 = 10 \text{ кОм} = R_3$ , потенциал базы  $U_6$ , потенциал эмиттера  $U_3$ . Ток эмиттера равен

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 0,21 \text{ мА}.$$

Ток базы есть разница токов резисторов  $R_1$  и  $R_2$ :

$$I_6 = \frac{\varepsilon - 2U_6}{R_6} = 0,006 \text{ мА}.$$

Ток эмиттера складывается (согласно второму правилу Кирхгофа) из тока базы и тока коллектора, поэтому

$$I_k = I_3 - I_6 = \frac{U_3}{R_3} - \frac{\varepsilon - 2U_6}{R_6} = 0,204 \text{ мА}.$$

Искомое отношение токов коллектора и базы равно

$$\frac{I_k}{I_6} = 34.$$

**Ф2203.** Из одинаковых тонких проволочек спаяли кубик – проволочки являются его ребрами. К максимально удаленным двум вершинам кубика подключили источник, который обеспечивает протекание заданного тока во внешней цепи («источник тока»), и вычислили магнитную индукцию поля этих проволочек в центре кубика. Во сколько раз изменится это поле после перерезания одной из проволочек? При решении считайте, что токи остальных ребер после перерезания не меняются (вообще-то это неверно!).

Поле в центре кубика увеличится в бесконечное число раз. Действительно, токи всех (целых еще) проволочек кубика создавали в его центре нулевое магнитное поле. После перерезания какой-либо из проволочек поле в центре кубика не будет равно нулю. При этом оно будет максимальным, если перерезана проволочка, конец

которой соединен с одной из вершин кубика, подключенных к батарее.

**Ф2204.** Одна часть катушки индуктивности содержит 200 витков, намотанных на стержень из феррита – вещества с большой магнитной проницаемостью. В нашем случае это стержень длиной 10 см и диаметром 8 мм, магнитная проницаемость которого равна 1000 (бывает и в несколько раз больше или меньше, но так была устроена магнитная антенна моего первого радиоприемника). Длина катушки составляет 2 см. Вторая часть катушки содержит 20 витков, эта часть намотана на бумажный цилиндр, который можно передвигать по ферритовому стержню, меняя расстояние между частями катушки. Части катушки соединяют последовательно. Оцените, во сколько раз можно изменять индуктивность, передвигая по стержню «малую» катушку.

Есть два варианта последовательного подключения частей такой катушки. В первом случае токи, протекающие по виткам катушек, создают на оси стержня магнитные поля одного направления, во втором случае – поля противоположных направлений. Если две части катушки придвинуты друг к другу вплотную, то они имеют максимальный коэффициент взаимной индукции. В этой ситуации можно считать, что индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков. В первом случае  $L_1 \sim 200^2$ , во втором –  $L_2 \sim 180^2$ . Если же малая катушка удалена достаточно далеко от конца ферритового стержня, то катушки имеют малую взаимную индукцию и могут рассматриваться как независимые. Тогда общая индуктивность катушки  $L \sim (200^2 + 20^2)$ . Отношение максимального значения индуктивности к минимальному значению индуктивности получается больше для второго способа подключения катушек. Это отношение равно

$$k = \frac{200^2 + 20^2}{180^2} \approx 1,25.$$

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВЛОМОК

### Бриллиант в оправе

(Начало см. на 2-й странице обложки)

#### Задание 1

Заблокируйте один обычный кубик шестью кубиками с магнитами на смежных гранях. При этом кубик должен быть так зажат со всех сторон, чтобы его нельзя было не только вынуть, но даже просто пошевелить, не потревожив остальные кубики. Комплект деталей для этого задания изображен на обложке на рисунке 2.

#### Задание 2

Добавьте два кубика, имеющие магниты на противоположных гранях, и попробуйте заблокировать ими два обычных кубика.

#### Задание 3

Добавьте еще один кубик и постарайтесь заблокировать три обычных кубика.

#### Задание 4

Используя все магнитные кубики, заблокируйте семь обычных кубиков (см. на обложке рис.3).

#### Задание 5

Попробуйте подобрать комбинации кубиков с магнитами, чтобы зажать 4, 5 и 6 обычных кубиков. Существуют ли разные способы сделать это?

К.Гребнев