Графики в текстовых задачах

Л.АЛЬТШУЛЕР

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОКАЖЕМ, КАК МОГУТ ПРИГОДИТЬся графики при решении задач на движение и на совместную работу. Такие задачи допускают истолкование условия в виде графика равномерного движения (зависимости пройденного пути или доли выполненной работы от времени). Многие из представленных здесь задач допускают обычные алгебраические решения с помощью уравнений или систем уравнений, однако графические (геометрические) методы делают решение наглядным, прозрачным, а потому более понятным. Некоторые задачи не очень-то просто решить алгебраически (попробуйте!).

Приведенные в этой статье задачи взяты из различных книг (см. список литературы в конце статьи), а также из материалов вступительных экзаменов в МГУ им. М.В.Ломоносова.

Начнем с простой задачи, решение которой потребует знания подобия треугольников.

Задача 1. *Винни-Пух и Пятачок одновременно отправились в гости друг к другу, но поскольку оба всю дорогу считали галок, то не заметили друг друга при встрече. После встречи Пятачок подошел к дому Винни-Пуха через 4 минуты, а Винни-Пух к дому Пятачка – через 1 минуту. Сколько минут был в пути каждый из них?*

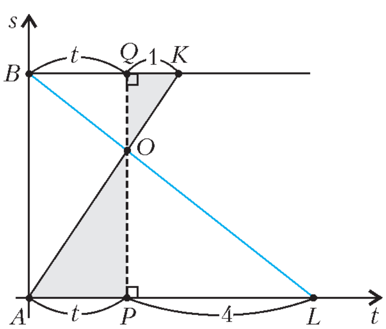

Рис. 1

Решение. На плоскости с координатами $(t;\ s)$, где t – время (в минутах), s – расстояние от дома Винни-Пуха (рис.1), изобразим графики движения Винни-Пуха и Пятачка. На рисунке это отрезки AK и BL соответственно, O – точка пересечения графиков, которая соответствует их встрече. Проведем отрезок PQ, проходящий через точку O, перпендикулярно оси времени. Обозначим $AP = t$ (время до встречи). Из подобия треугольников QOK и POA, а также QOB и POL имеем $\frac{1}{t} = \frac{t}{4}$, что дает $t = 2$.

Ответ. Винни-Пух был в пути 3 минуты, а Пятачок – 6 минут.

Графический способ позволяет решать и задачи на совместную работу.

Задача 2. *Первая бригада может выполнить некоторую работу за 36 дней, а вторая – за 45 дней. За сколько дней обе бригады, работая вместе, выполнят всю работу?*

Решение. На плоскости с координатами $(t;\ s)$, где t – время (в днях), s – доля всей работы ($AB = 1$), изображены графики выполнения работ AK и BL первой и второй бригадой соответственно (рис.2). Абсцисса точки O соответствует времени, за которое выполнят всю работу обе бригады, работая одновременно. Из подобия треугольников BOK и LOA получаем, что $BO : OL = 36 : 45 = 4 : 5$. Из подобия треугольников BCO и BAL имеем $\frac{CO}{AL} = \frac{BO}{BL}$. Следовательно, $CO = \frac{4}{9} \cdot 45 = 20$.

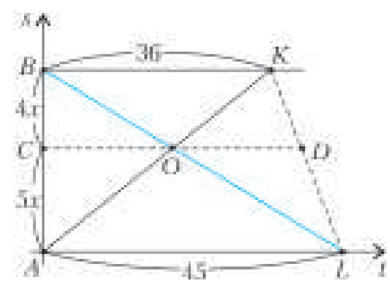

Рис. 2

Ответ. Обе бригады, работая вместе, выполнят всю работу за 20 дней.

Замечание. Стоит обратить внимание на следующий замечательный факт из планиметрии. Четырехугольник $ABKL$ (см. рис.2) – трапеция, отрезок CO – половина отрезка CD (отрезка прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей трапеции, параллельно основаниям). Нетрудно доказать, что этот отрезок – среднее гармоническое оснований трапеции: $CD = \frac{2ab}{a+b}$, где $AL = a$, $BK = b$.

Рассмотрим другие примеры.

Задача 3. *Расстояние между пунктами A и B равно 12 км. Турист вышел из пункта A в 9 часов 25 минут и пришел в пункт B в 13 часов 15 минут. На следующий день он отправился в обратный путь, но вышел в 11 часов и пришел в пункт A в 14 часов 40 минут. Найдите, на каком расстоянии от пункта A находится пункт, который турист проходил в один и тот же момент времени как на прямом, так и на обратном пути, и в котором часу он его прошел.*

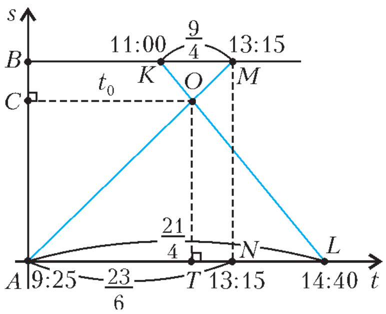

Рис. 3

Решение. На плоскости с координатами $(t;\ s)$, где t – время (в часах), s – расстояние от начального пункта A ($AB = 12$), изображены графики движения туриста туда и обратно AM и KL соответственно (рис. 3); O – точка пересечения графиков, C – пункт, который турист проходил дважды, t_0 – время, когда произошло это событие. Нетрудно вычислить, что KM = 2 ч 15 мин $= \dfrac{9}{4}$ ч, AL = 5 ч 15 мин $= \dfrac{21}{4}$ ч, $AN = BM$ = 3 ч 50 мин $= \dfrac{23}{6}$ ч. Из подобия треугольников AOL и MOK имеем $\dfrac{AO}{OM} = \dfrac{AL}{KM} = \dfrac{21}{4} : \dfrac{9}{4} = \dfrac{7}{3}$. Из теоремы о пропорциональных отрезках следует $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AO}{OM} = \dfrac{7}{3}$. Так как $AB = 12$, то $AC = \dfrac{42}{5} = 8{,}4$ (км). Из подобия треугольников ATO и ANM получаем $\dfrac{t_0}{AN} = \dfrac{AO}{AM}$. Отсюда $t_0 = \dfrac{161}{60}$ = 2 ч 41 мин. Учитывая, что турист вышел из пункта A в 9 ч 25 мин, получаем, что пункт C был пройден дважды в 12 ч 6 мин.

Ответ. 8,4 км, 12 ч 6 мин.

Задача 4. *Однажды я отправился к приятелю. Только я вышел из дома, как от нашей остановки отошел троллейбус, и тогда я решил пойти пешком. Заметив, что в этот момент мимо меня прошел и встречный троллейбус, я стал считать по дороге и те, и другие троллейбусы. У дома моего приятеля меня обогнал m-й попутный троллейбус , а в противоположном направлении проследовал n-й встречный троллейбус. Во сколько раз троллейбусы идут быстрее, чем я, если скорость троллейбусов в обоих направлениях, а также интервалы между ними одинаковы и я шел с постоянной скоростью?*

Решение. Строим графики движения попутных троллейбусов (рис.4) в виде системы параллельных равноотстоящих прямых (синие сплошные линии). Угол наклона выбираем произвольным, но меньшим 90° ; расстояние между прямыми также выбираем произвольно. Затем строим графики движения встречных троллейбусов в виде второй системы параллельных и равноотстоящих прямых (синие штриховые линии). Угол наклона этих прямых к отрицательному направлению оси времени равен углу наклона первых прямых к положительному направлению этой оси. График моего движения – красная прямая OA, где O – начало счета, т.е. момент встречи двух троллейбусов у моего дома, а точка A – окончание счета (а также момент встречи двух троллейбусов у дома моего приятеля). Число прямых, пересекающих отрезок OA в направлении моего движения, равно m, а во

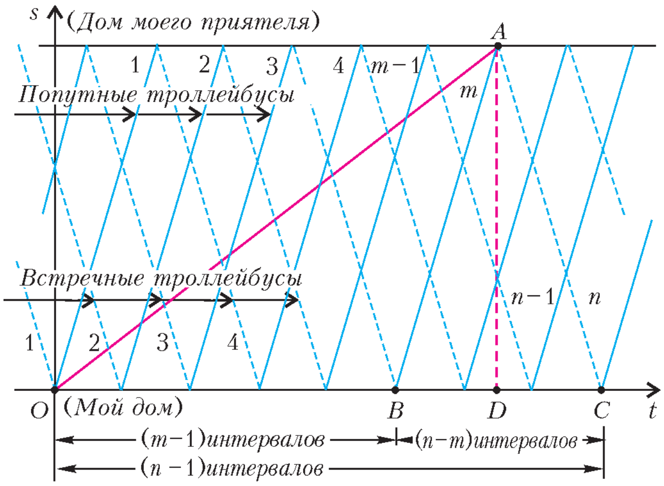

Рис. 4

второй системе число прямых, пересекающих отрезок OA, будет n. Отсюда (отрезки измеряются в интервалах движения) $OB = m - 1$, $OC = n - 1$. Следовательно, $BC = OC - OB = n - m$. Так как треугольник BAC равнобедренный, то $BD = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{n-m}{2}$, и $OD = OB + BD = m - 1 + \dfrac{n-m}{2} = \dfrac{n+m-2}{2}$. Отношение скоростей равно отношению временны́х отрезков OD и BD, так как проходится одно и то же расстояние: $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{n+m-2}{n-m}$.

Ответ. $\dfrac{n+m-2}{n-m}$.

Задача 5. *Две частицы движутся между точками A и B туда и обратно. Первая выходит из A и движется со скоростью 4 м/с. Вторая выходит из B одновременно с первой. Известно, что обе частицы оказались на одинаковом расстоянии от A через 4 с после того, как это произошло в первый раз. Чему равно расстояние AB, если: а) скорость второй частицы 7 м/с; б) скорость второй частицы 9 м/с?*

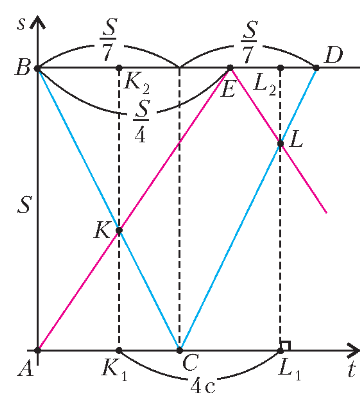

Рис. 5

Решение. а) Так же, как и в предыдущих задачах, строим графики движения частиц (зависимость пройденного пути от времени). Точки встречи соответствуют точкам пересечения графиков. Расстояние AB положим равным S. Все обозначения ясны из рисунка 5. График движения первой частицы – красный, второй – синий. Вторая встреча частиц (L) произойдет уже после того, как первая частица, достигнув B, будет двигаться в обратном направлении ($BD = \dfrac{2S}{7}$, $BE = \dfrac{S}{4}$, и $BD > BE$). За 4 с вторая частица прошла путь 28 м, который складывается из отрезков KK_1 и LL_1. Первая частица за 4 с прошла путь 16 м, который равен $KK_2 + LL_2$. Ясно, что суммарный путь (см. рис. 5) равен $2S = KK_1 + LL_1 + KK_2 + LL_2 = 44$ м. Отсюда $S = 22$ м.

Разберитесь, в чем состоит отличие задачи б) от задачи а), и решите ее самостоятельно.

Ответ. а) 22 м; б) 32,5 м.

Задача 6 (геофак МГУ, 1978). *Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через 15 минут вслед за ним выехал автомобиль. Автомобиль догнал велосипедиста на середине пути от A до B, а прибыл в B, когда велосипедисту оставалось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от A до B?*

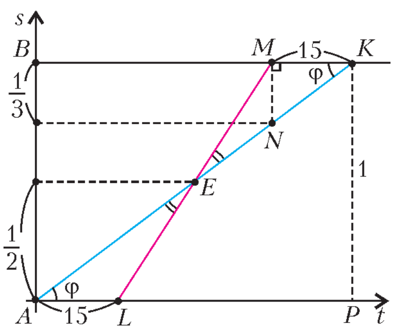

Рис. 6

Решение. На плоскости с координатами $(t;\ s)$, где t – время (в минутах), s – расстояние от пункта A, изобразим графики движения велосипедиста и автомобиля – отрезки AK и LM, $AB = 1$ (рис. 6). Все обозначения ясны из рисунка. Из того, что $\Delta MEK = \Delta LEA$, следует $MK = AL = 15$. Так как $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{KP}{AP} = \dfrac{MN}{MK}$ и $KP = AB$, получаем, что $AP = 45$.

Ответ. 45 мин.

Задача 7 (ВМК МГУ, 1989). *Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут – мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?*

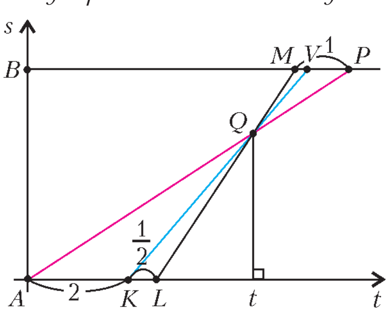

Рис. 7

Решение. Нарисуем графики зависимости пройденного пути от времени пешехода, велосипедиста и мотоциклиста – на рисунке 7 это отрезки AP, KV, LM соответственно, точка Q на графиках соответствует их встрече, $AK = 2$, $KL = 1/2$, $MP = 1$. Время измеряем в часах, расстояния – в долях пути AB. Из подобия треугольников MVQ и LKQ, а также VQP и KQA получаем $\dfrac{AK}{KL} = 4 = \dfrac{VP}{MV}$. Отсюда $VP = 0{,}8$ ч, т.е. 48 мин.

Ответ. 48 мин.

Задача 8 (психфак МГУ, 1978). *Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одном направлении с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?*

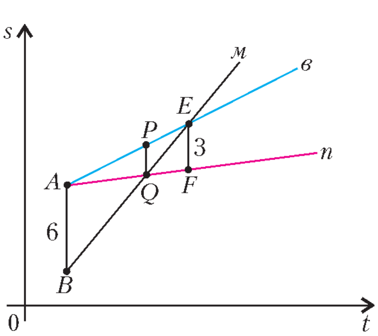

Рис. 8

Решение. Решение задачи легко увидеть из графиков движения (плоскость $(t;s)$, s – в км, t – в условных единицах; рис. 8). Ясно, что $EF = 3$, $AB = 6$, а неизвестным является отрезок PQ. Четырехугольник $ABFE$ – трапеция, поэтому (см. замечание после задачи 2) $PQ = \dfrac{EF \cdot AB}{EF + AB} = 2$.

Ответ. 2 км.

Задача 9 (олимпиада «Ломоносов», МГУ, 2006). *Из пункта A в пункт B в 8:00 выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в A в 17:00 того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?*

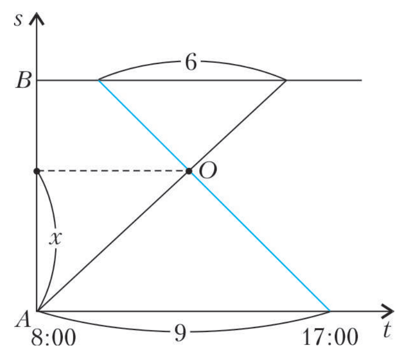

Рис. 9

Решение. Графики движения велосипедиста и пешехода в осях (время, расстояние) изображены на рисунке 9. Из подобия двух треугольников со сторонами 9 и 6 получаем уравнение $\dfrac{x}{AB - x} = \dfrac{9}{6}$. Отсюда $x = 0{,}6\,AB$.

Ответ. 0,6.

Задача 10 (мехмат МГУ, 2004). *Дорога проходит последовательно через пункты A, B, C и D. Расстояние от A до B равно 24 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью автомобиль. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями велосипедист и мотоциклист. Когда автомобиль догнал велосипедиста, мотоциклист обгонял их на 6 км. В пункте C автомобиль догнал мотоциклиста и, доехав до D, сразу поехал обратно в A, встретившись с велосипедистом во второй раз в C. Найдите расстояние между B и C, если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи автомобиля и велосипедиста в два раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда автомобиль впервые догнал мотоциклиста.*

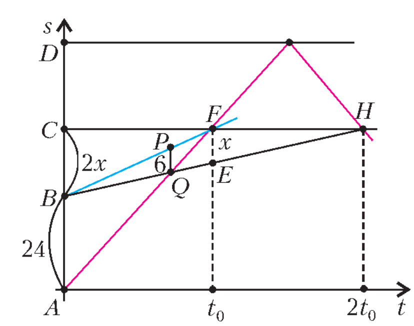

Рис. 10

Решение. Решение получается из рисунка 10, где изображены в осях $(t;\ s)$ графики движения автомобиля, велосипедиста и мотоциклиста. Четырехугольник $ABFE$ – трапеция, следовательно, $PQ = 6 = \dfrac{FE \cdot AB}{FE + AB}$, т.е. $\dfrac{24x}{24 + x} = 6$. Отсюда $x = 8$. Но FE – средняя линия треугольника HCB, поэтому $BC = 2x = 16$.

Ответ. 16 км.

Задача 11 (биофак, ФБИ МГУ, 2006). *Из пункта A вниз по течению реки одновременно начинают движение плот и лодка. В тот же момент из пункта B, находящегося на расстоянии 2 км от A, навстречу плоту начинает движе-*

ние катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т.д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

Решение. Пусть скорость плота и течения равна 1 (км в ед. времени), тогда скорости лодки и катера относительно плота равны 1 и 2 соответственно (рис.11, где s – расстояние до плота в км). Первая встреча катера с плотом происходит в момент 1, когда лодка находится на расстоянии 1 км от них.

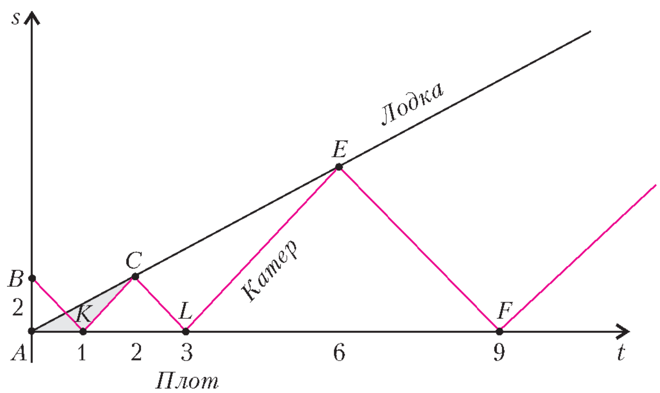

Рис. 11

В момент 2 катер догоняет лодку, оказываясь на расстоянии 2 км от плота, в момент 3 снова встречается с плотом. Из подобия треугольников ACK и AEL, а также ACL и AEF получаем, что третья встреча происходит в момент 9. Далее, аналогично, катер встречает плот в моменты 27, 81, 243, 729, 2187, ... При этом к моменту седьмой встречи плот проплывает $729 < 1000$ километров, а к моменту восьмой должен был бы проплыть $2187 > 1000$ километров.

Ответ. 7.

Упражнения

1. Два туриста выезжают одновременно навстречу друг другу из двух пунктов A и B. При встрече оказалось, что первый проехал на 30 км больше второго и что через 4 ч он будет в B. Второй попадает в A через 9 ч после встречи. Найдите расстояние AB и скорости туристов.

2. Два пешехода идут навстречу друг другу: один из пункта A, другой из пункта B. Первый выходит из A на 6 ч позже, чем второй из B, и при встрече оказывается, что он прошел на 12 км меньше второго. Продолжая после встречи дальнейший путь с той же скоростью, первый приходит в B через 8 ч, а второй в A – через 9 ч. Найдите скорость каждого пешехода.

3. Бассейн наполняется первой трубой за 4 ч. Через 2 ч после открытия первой трубы открыли вторую трубу, через которую весь бассейн может наполниться за 6 ч. За сколько часов был наполнен весь бассейн?

4 (геофак МГУ, 1978). Пешеход вышел из пункта A в пункт B. Через $3/4$ ч из A в B выехал велосипедист. Когда велосипедист прибыл в пункт B, пешеходу оставалось пройти $3/8$ всего пути. Сколько времени потратил пешеход на весь путь, если известно, что велосипедист догнал пешехода на половине пути из пункта A в пункт B и что скорости велосипедиста и пешехода постоянны?

5 (ВМК МГУ, 1989). Вниз по реке от пристани A к пристани B отплыл плот. Вслед за ним через $1/2$ ч от пристани A отплыла лодка, а еще через 1 ч – катер. Плот, лодка и катер двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после отплытия катера оказалось, что к этому моменту все они преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше плота прибыл к пристани B катер, если плот прибыл к пристани B на 15 мин позже лодки?

6 (психфак МГУ, 1978). По шоссе с постоянной скоростью движется пешеход, а навстречу ему с постоянными скоростями движутся велосипедист и мотоциклист. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 8 км них. В тот момент, когда мотоциклист встретил пешехода, велосипедист отставал от мотоциклиста на 4 км. На сколько километров мотоциклист будет обгонять велосипедиста в тот момент, когда пешеход встретится с велосипедистом?

7 (ВМК МГУ, 1992). Из пункта A в пункт B вылетел самолет, через 3 ч в противоположном направлении (из B в A) вылетел вертолет, а еще через 3 ч они поравнялись. Самолет прибыл в B в 13 ч 30 мин, а вертолет в A – в 20 ч 30 мин. Найдите время вылета самолета из A.

8 (олимпиада «Ломоносов», МГУ, 2006). Из пункта A в пункт B в 7:00 вышел пешеход, а через некоторое время из B в A выехал всадник. Пешеход пришел в B через 12 ч после выезда оттуда всадника. Всадник приехал в A в 17:00 того же дня. Скорости пешехода и всадника постоянны. Какую долю пути из A в B прошел пешеход до встречи с всадником?

9 (мехмат МГУ, 2004). Дорога проходит последовательно через пункты A, B, C и D. Расстояние от B до C равно 12 км. Из A в D выехал с постоянной скоростью мотоциклист. Одновременно с ним из B в D отправились с постоянными скоростями пешеход и велосипедист. Когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист обгонял их на 6 км. В пункте C мотоциклист догнал велосипедиста и, доехав до D, сразу поехал обратно в A, встретившись с пешеходом во второй раз в C. Найдите расстояние между A и B, если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи мотоциклиста и пешехода в 4 раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда мотоциклист впервые догнал велосипедиста.

10 (биофак, ФБИ МГУ, 2006). Из пункта B вниз по течению реки начинает движение плот, а в противоположную сторону одновременно с ним выходит катер. По пути следования катера на расстоянии 2 км от B расположен пункт A, из которого в тот же момент против течения реки начинает движение теплоход. Собственная скорость теплохода в 2 раза превышает скорость течения, собственная скорость катера в 3 раза больше скорости течения. Встретив теплоход, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с плотом, после чего снова разворачивается и движется в сторону теплохода до встречи с ним, затем опять к плоту и т.д. Сколько раз катер встретит теплоход за время, в течение которого теплоход преодолеет расстояние, равное 2000 км?

Список литературы

1. *А.П.Савин.* Занимательные математические задачи. – М.: АСТ, 1995.

2. *И.Н.Сергеев.* Математика. Задачи с ответами и решениями. Учебное пособие. – М.: Бином, 2004.

3. *А.И.Островский, Б.А.Кордемский.* Геометрия помогает арифметике. – М.: Физматгиз, 1960.

4. *И.Ф.Шарыгин.* Факультативный курс по математике. Решение задач. Учебное пособие для 10 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1989.