разуется параллелограмм со сторонами взаимно простой длины, пока не получится ромб. Длины сторон ромба взаимно просты и потому равны 1. Первый отламывает треугольник со стороной 1, и второй выигрывает.

Если $n = 1$, то первый уже выиграл. Пусть теперь число n составное, p – любой его простой делитель. Выигрышная стратегия для первого игрока состоит в том, что он сначала отламывает треугольник со стороной p, а потом каждый раз отламывает самый большой кусок. Через некоторое время второй игрок получит треугольник со стороной p, после чего, как было разобрано выше, проигрывает.

Заметим, что описанный процесс есть не что иное, как алгоритм Евклида.

9. Пусть точка O – центр окружности, т.е. середина гипотенузы AB. Точки E, N и O лежат на одной прямой (докажите!). Точки A, E, C и O лежат на одной окружности, так как $\angle ECO = \angle EAO = 90^\circ$. Из теоремы о пересекающихся хордах окружности следует, что $AN \cdot NC = EN \cdot NO$. Применяя ту же теорему к хордам AC и MK исходной окружности, получаем $AN \cdot NC = MN \cdot NK$. Как следствие, $MN \cdot NK = EN \cdot NO$. По теореме, обратной к теореме о пересекающихся хордах, получаем, что точки M, K, E и O лежат на одной окружности.

Углы EMK и EOK равны, как опирающиеся на одну дугу. Теперь достаточно показать, что угол NOK прямой. Но средняя линия NO треугольника ABC параллельна его стороне BC, а прямая OK является биссектрисой (а следовательно, и высотой) равнобедренного треугольника BOC.

10. Узники выбирают «счетчика», который делает лишь следующее: если, приходя в комнату, он обнаруживает, что свет включен, то он прибавляет к уже посчитанному числу узников единицу и выключает свет. Каждый из остальных узников действует так: если, приходя в комнату, он обнаруживает, что свет не горит, и до этого ни разу не включал свет, то он его включает. Когда число посчитанных узников становится равным 99, «счетчик» говорит, что все узники уже побывали в комнате.

Действительно, каждый узник включит свет в комнате не более одного раза. Докажем, что каждый из узников, кроме «счетчика», включит свет. Пусть это не так. Тогда, начиная с некоторого дня n, свет включаться не будет. Так как никакой заход в комнату не будет для счетчика последним, он побывает в комнате на m-й день, при некотором $m > n$. Если свет при этом горел, он его выключит. Значит, начиная с $(m+1)$-го дня свет будет все время выключен. Для узника, который свет еще ни разу не зажигал, также никакой заход в комнату не последний, и он побывает в комнате после m-го дня. Но тогда он должен включить свет – противоречие.

11. Да, например, $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$. Можно считать, что $a = 1$, так как иначе все коэффициенты уравнений можно сократить на a (докажите). Достаточно также, чтобы корни уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + bx - c = 0$ были целыми (докажите).

Необходимо, чтобы дискриминанты двух указанных уравнений были точными квадратами: $b^2 - 4c = m^2$, $b^2 + 4c = n^2$. Это же условие оказывается и достаточным (по соображениям четности). Соответствующих b, c, m, n существует бесконечно много.

В действительности задача представления заданного числа в виде суммы двух квадратов хорошо изучена. Она связана с так называемыми гауссовыми целыми числами – числами вида $x + yi$, где x и y – целые числа, i – мнимая единица. В частности, можно доказать, что нетривиальное представление $2b^2 = m^2 + n^2$ существует тогда и только тогда, когда в разложении b на простые множители входит хотя бы одно простое число вида $4k+1$. (Подробнее об этом см. в статье В.Сендерова и А.Спивака «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» в «Кванте» №3 за 1999 г.)

12. Выберем любую из получившихся частей. Рассмотрим сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где a_i – количество сторон i-й грани. Каждое ребро многогранника, по которому ломаная не проходит, посчитано в этой сумме дважды. Каждое ребро, через которое проходит ломаная, входит в сумму ровно один раз. Таких ребер 2003, поэтому вся сумма нечетна. Если количество граней с нечетными числом сторон четно, то рассмотренная сумма должна быть четной. Значит, это количество нечетно.

13. Степень многочлена может равняться только 1. Если степень многочлена $P(x)$ равна 0, то $P(x) = 1$ (старший коэффициент равен 1). Но тогда уравнение $P(a_1) = 0$ не имеет решения. Если степень многочлена равна 1, то, например, многочлен $P(x) = x - 1$ и последовательность $a_n = n$ удовлетворяют условию задачи.

Пусть степень многочлена не меньше 2. Найдется такая положительная константа C, что если $|x| > C$, то $|P(x)| > |x|$. Например, можно взять $C = |b_{n-1}| + \ldots + |b_1| + |b_0| + 1$ (докажите!). Если $|a_n| > C$, то $C < |a_n| < |P(a_n)| = |a_{n-1}|$. Тогда, аналогично, $|a_{n-1}| < |P(a_{n-1})| < \ldots < |P(a_1)| = |0|$, что неверно. Таким образом, последовательность состоит из целых чисел, по модулю не превосходящих C, а их количество конечно, т.е. в последовательности обязательно будут повторения.

14. Сведем задачу к случаю равностороннего треугольника, для которого утверждение задачи тривиально. Точки A', B' и C' определяются следующими условиями:

$$MA' \perp BC,\ MB' \perp AC,\ MC' \perp AB,$$

$$A'B' \perp MC,\ A'C' \perp MB.$$

Повернем треугольник $A'B'C'$ вокруг точки M на 90° против часовой стрелки. Условия на точки A', B' и C' перейдут в следующие:

$$MA' \parallel BC,\ MB' \parallel AC,\ MC' \parallel AB,\ A'B' \parallel MC,\ A'C' \parallel MB.$$

При этом утверждение задачи перейдет в равносильное. Выполним аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в равносторонний. Утверждение задачи снова перейдет в равносильное, поскольку формулируется только в терминах параллельности, пересечения прямых и середин отрезков. Теперь повернем треугольник $A'B'C'$ по часовой стрелке на 90°. Задача перейдет в исходную, но с равносторонним треугольником ABC.

15. Пусть U, V – точки, симметричные точке H относительно AB и AD соответственно, X – точка пересечения прямых UC и AB, Y – точка пересечения прямых VC и AD. Так как прямая PH проходит через X, а QH – через Y, утверждение задачи равносильно тому, что точки X, H, Y лежат на одной прямой.

Точки U и V лежат на описанной окружности четырехугольника. Действительно,

$$\angle(UA, UB) = \pi - \angle(HA, HB) = \angle(DA, DB)$$

(углы ориентированные). Как следствие,

$$\angle(HX, HY) = \angle(HX, HU) + \angle(HU, HV) + \angle(HV, HY) =$$
$$= \angle(UD, UC) + \angle(HD, HB) + \angle(VC, VB) =$$
$$= \angle(AD, AC) + \pi - \angle(AD, AB) + \angle(AC, AB) = \pi.$$

16. 290. Покажем, что при $k > 290$ такая ситуация невозмож-