LXVI Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. 16 января 1993 года. Пусть мальчик прожил x лет и y месяцев. Тогда он прожил $12x + y$ месяцев и потому

$$12x + y - x = 111,$$

т.е.

$$11x + y = 11 \cdot 10 + 1 .$$

Поскольку $y < 12$, то $y = 1$ и $x = 10$.

2. Поскольку $C > P$, то $C > 1$. Пусть $P = 1$, $C = 2$ и $E = 0$. Тогда $M \geq 3$. Случай $CEEM = 2003$ возможен: $35 + 1968 = 2003$ или $38 + 1965 = 2003$.

Кроме вышеуказанных двух решений ребус, как легко проверить при помощи компьютерной программы, имеет еще 38 решений: $58 + 2947 = 3005$, $31 + 4972 = 5003$, …, $28 + 5974 = 6002$.

3. Один. Если первый – рыцарь, то в силу его слов второй и третий – лжецы, что невозможно из-за высказывания второго островитянина. Значит, первый – лжец. Если второй – лжец, то в силу его слов третий тоже лжец, но тогда первый сказал правду, а он должен был соврать. Значит, второй – рыцарь. Третий честно ответит: «Один».

4. Нет. Например, число $8/3$ не целое, а средняя линия делит квадрат со стороной $2/3$ на два прямоугольника, периметры которых равны 2 (рис.3). Есть и другие примеры (рис.4).

5. Да, можно (рис.5).

6. Поскольку $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ и $21 - 12 = 9$, а $21 - 15 = 6$, то в первый раз сумма чисел нижней и верхней граней кубика равнялась 9, а во второй – 6. Бросим кубик третий раз так, чтобы он упал на одну из тех двух граней, которые оба раза были боковыми. Поскольку $21 - 9 - 6 = 6$, то сумма чисел, которые при третьем броске оказались на верхней и нижней гранях, равна 6. Очевидно, цифра 3 не могла ни во второй, ни в третий раз оказаться на верхней или нижней грани: иначе напротив нее стояла бы цифра $6 - 3 = 3$, а тройка только одна. Поэтому напротив тройки стоит цифра $9 - 3 = 6$.

Примечание. Удовлетворяющий условию задачи кубик существует: $1 + 5 = 2 + 4 = 6$ и $3 + 6 = 9$.

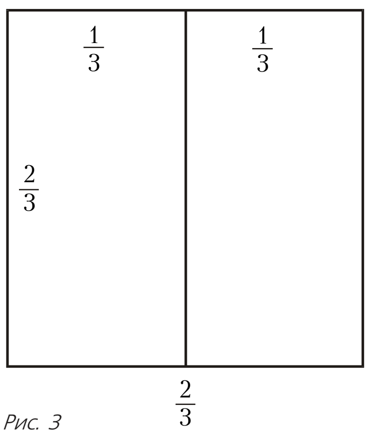

Рис. 3

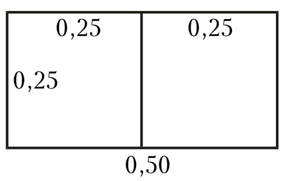

Рис. 4

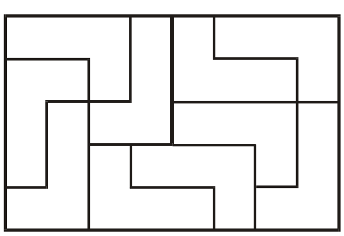

Рис. 5

7 класс

1. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) : \frac{1}{6009} = 2003$.

2. На рисунке 6 изображены все возможные способы разрезания салфетки.

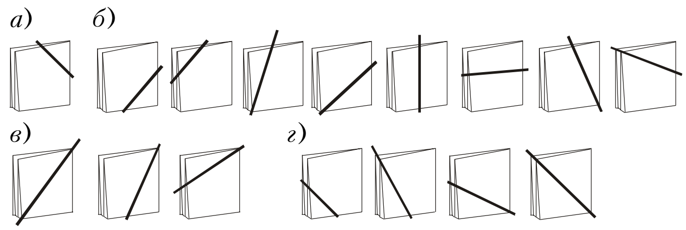

Рис. 6

3. 2222232. По признаку делимости на 4 число, образованное двумя последними цифрами, должно делиться на 4. Поэтому число оканчивается на 32. Так как двоек больше, чем троек, двоек может быть 4, 5 или 6 штук. В первом случае сумма цифр числа равна 17, во втором – 16, в третьем – 15. По признаку делимости на 3 число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Значит, годится только последний вариант.

4. Да. Рассмотрим прямоугольники, выделеные на рисунке 7 («диагональные»). Горизонтальная сторона исходного прямоугольника складывается из их горизонтальных сторон. То же – для вертикальной стороны. Поэтому периметр исходного прямоугольника равен сумме периметров заштрихованных прямоугольников.

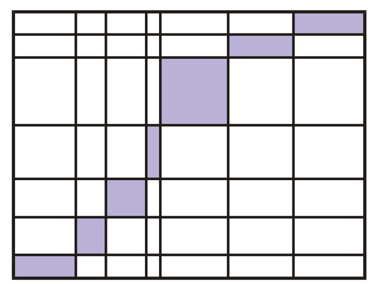

Рис. 7

5. Предположим, что солдаты выстроены в m колонн и n шеренг. Тогда в полку mn солдат. Согласно условию, новое обмундирование получили $mn/100$ из них, и не менее чем в $40n/100$ шеренгах есть хотя бы по одному солдату в новом обмундировании. Значит,

$$\frac{mn}{100} \geq \frac{40n}{100},$$

откуда $m \geq 40$. Аналогично, $n \geq 30$. Следовательно, в полку не менее $40 \cdot 30 = 1200$ солдат.

Покажем, что 1200 солдат можно построить нужным образом. Поставим по диагонали 12 солдат в новом обмундировании (рис.8). Ясно, что солдаты в новом обмундировании стоят ровно в 30% колонн и в 40% шеренг (ибо 30% от 40 – это 12, а 40% от 30 – тоже 12).

6. Нельзя. Предположим, что можно. В кубе 8 угловых кубиков и 6 кубиков, расположенных в центрах граней. Любой ход из углового кубика ведет в кубик в середине ребра, а следующий ход – в кубик в центре грани. Таким образом, чтобы попасть из одного углового кубика в другой, нужно пройти хотя бы через один кубик в центре грани. Значит, последних не меньше семи, а их всего лишь шесть.

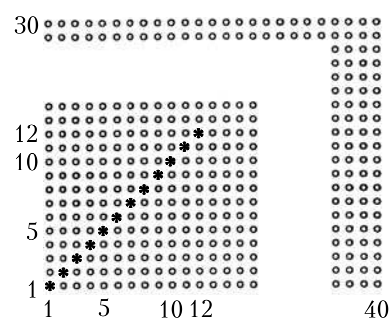

Рис. 8