одержали по 6 побед. Поскольку, как уже отмечалось, каждый участвовал в 12 играх, то согласно условию Боря во всех остальных своих матчах проиграл. 3 матча Бори без участия Андрея можно представить так:

$$(\text{Г+Д}) \to (\text{Б+В})\,;\ (\text{В+Д}) \to (\text{Б+Г})\,;\ (\text{В+Г}) \to (\text{Б+Д})\,.$$

Здесь буквы Б, В, Г, Д – заглавные буквы имен мальчиков, а стрелки идут от победителей к проигравшим командам. Из приведенной схемы видно, что в этих играх Вася, Гена и Дима выиграли по две игры, а всего – по восемь.

Итак, Андрей не выиграл ни разу; Боря выиграл 6 раз; Вася, Гена и Дима выиграли по 8 раз.

18. Пусть в треугольнике ABC из середины M стороны AC восставлен перпендикуляр, делящий его на 2 части, площади которых различаются в 3 раза (рис.2). Этот перпендикуляр пересекает одну из остальных двух сторон треугольника; пусть для определенности это сторона AB. Точку пересечения обозначим через K. Проведем отрезок CK. Треугольники AMK и CMK равны, поэтому площадь четырехугольника $BCMK$ больше площади треугольника AMK в 3 раза и площадь треугольника CKB равна площади треугольника CAK. Отсюда заключаем, что $AK = KB$. Из равенства треугольников AKM и CKM следует также $AK = KC$. Итак, точка K является центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC, причем отрезок AB является ее диаметром. Поэтому $\angle C = 90^\circ$ и $KM \parallel BC$.

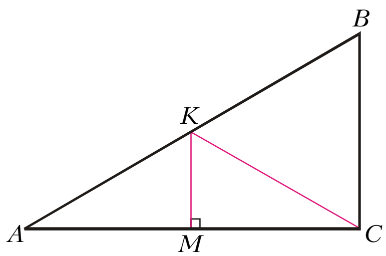

Рис. 2

Заметим, что в этом случае перпендикуляр к середине второго катета BC также проходит через точку K и делит треугольник ABC на две части, площади которых опять же различаются ровно в 3 раза. Поэтому BC не может быть упомянутой в условии «другой» стороной. Следовательно, BC – это «третья» сторона треугольника, о которой говорится в условии, и перпендикуляр к ее середине делит треугольник ABC на две части, площади которых различаются в 3 раза. Это и есть ответ.

19. При нечетном n число $z = n^{n+1} + (n+1)^{n+2} + (n+2)^{n+3}$ четно и больше 2, следовательно, оно составное.

При четном n число z можно представить в виде

$$z = \left(n^{n+1} + 1\right) + (n+1)^{n+2} + \left((n+2)^{n+3} - 1\right).$$

Но

$$n^{n+1} + 1 = (n+1)\left(n^n - n^{n-1} + \ldots - n + 1\right),$$

$$(n+2)^{n+3} - 1 = \left((n+2) - 1\right)\left((n+2)^{n+2} + (n+2)^{n+1} + \ldots + 1\right),$$

так что число z представляет собой сумму трех слагаемых, кратных $n + 1$, поэтому само делится на $n + 1$ и является составным.

20. Достаточно положить $x = a + b$, $y = a - b$, после чего исходное уравнение превращается в тождество. Следовательно, для любых целых чисел (a, b) уравнение

$$x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$$

имеет решения в целых числах (x, y).

Индуктивность в электрических цепях

1. $U_L = \dfrac{\mathcal{E}(2R_1 + R_2) - I_0R_1R_2}{R_1 + R_2}$; $U_C = 2\mathcal{E}$.

2. $I_{L_1} = I_{L_2} = U_0\sqrt{\dfrac{C}{L_1 + L_2}}$; $U_m = U_0\sqrt{\dfrac{L_1}{L_1 + L_2}}$.

3. $I_m = 4\mathcal{E}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

4. $U_m = I_0\sqrt{\dfrac{L_1L_2}{C(L_1 + L_2)}}$.

Прямые и параболы

1. Уравнение (6) (см. статью) имеет хотя бы один корень.
2. Функция (5) не может иметь два нуля второго порядка.
3. Нет. Функция (5) не может иметь два нуля второго порядка.
4. 7. Уравнение ***касательной*** $y = -24x + r - 8$, точка (0; 0) должна лежать между параболой и ***касательной***, т.е. $0 \in (r - 8; r)$, поэтому $0 < r < 8$ и количество целых значений 7.
5. 3. Пусть x_1, x_2 – абсциссы точек касания. Так как прямые пересекаются в точке (0; 0), то $x_1 + x_2 = 0$. Складывая равенства $2ax_1 + b = -1$ и $2ax_2 + b = 7$, получаем $b = 3$.
6. 2. Середина отрезка имеет ту же абсциссу, что и точка a_*, следовательно, $4x + 5 = x + 9$, и $x = 2$.
7. 3. Уравнение для определения абсциссы точки касания $x_0^2 - 9 = 0$, $x_0 = \pm 3$, $y_0 = 18 \pm 3a$. Квадрат искомой длины есть $OM^2 = 9 + (18 \pm 3a)^2$, и $OM_{\min} = 3$.
8. 4. Уравнение касательной $y = 2x_0x - 3 - x_0^2$, ордината и абсцисса точек пересечения этой касательной с координатными осями $y = -3 - x_0^2$, $x = \dfrac{3 + x_0^2}{2x_0}$, и $S = \dfrac{1}{2}|xy| = \dfrac{\left(3 + x_0^2\right)^2}{4|x_0|}$. Поэтому $x_{0\,\min} = 1$, $S_{\min} = 4$.
9. 1. Уравнение касательной $y = (2ax_0 + b)x + 4 - ax_0^2$, точки пересечения этой касательной с координатными осями $A\left(0; 4 - ax_0^2\right)$, $B\left(\dfrac{ax_0^2 + 4}{2ax_0 + b}; 0\right)$. Так как M – середина отрезка AB, то $2\left(ax_0^2 + bx_0 + 4\right) = 4 - ax_0^2$. Получившееся уравнение имеет единственное решение, поэтому $b^2 = 12a$, и $y_{\text{верш}} = 4 - \dfrac{b^2}{4a} = 1$.
10. 8. Уравнение касательной $y = 8\sqrt{a} - \left(a^2 + 4\right)x$, ордината и абсцисса точек пересечения этой касательной с координатными осями $y = 8\sqrt{a}$, $x = \dfrac{8\sqrt{a}}{a^2 + 4}$. Поэтому $S = \dfrac{1}{2}|xy| = \dfrac{32a}{a^2 + 4}$, $a_{\max} = 4$, $S_{\max} = 8$.
11. –2. Поскольку $r = 0$, а при $x = 6$ будет $y = 0$ и $y' = 0$, получаем систему

$$\begin{cases} 36p + 6q = 216, \\ 12p + q = 108, \end{cases}$$

откуда $p = 12, q = -36$ и $x_{\max} = -2$.
12. 3. При $q = 0$ уравнение касательной для $x_0 = 5$ запишется так: $y = (10p + 75)x - 250 - 25p + r$. При $x = -13$ это совпадает со значением функции. Поэтому $p = 3$.
13. 6. При $x_0 = 0$ уравнение касательной $y = 3x + r$. Точка пересечения с осью Ox есть $x = -r/3$. Подстановка в уравнение кривой дает $r = 6$.
14. –5. В уравнение касательной при $x_0 = 15$ подставляем $x = 0$ и находим, что $p = -30$. Один из корней квадратного уравнения 25, а их сумма 20. Поэтому другой корень есть –5.
15. 5. Фраза «касательная проходит через начало координат» означает, что $f(x_0) = f'(x_0)x_0$, в данном случае $15x_0^4 - 18x_0^2 - r = 0$. Чтобы это уравнение имело 4 различных корня, должно быть $r < 0$, $D > 0$. Отсюда $-5{,}4 < r < 0$; целых чисел 5.