«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Каждому (кроме первого) вошедшему в дом правдуну должен предшествовать лгун, а каждому лгуну – правдун. Следовательно, в дом вошли 5 правдунов и 5 лгунов.

2. Совместим вершину A кирпича с углом O стола, а ребра кирпича направим по краям стола (рис.1, *а*). Трижды повер-

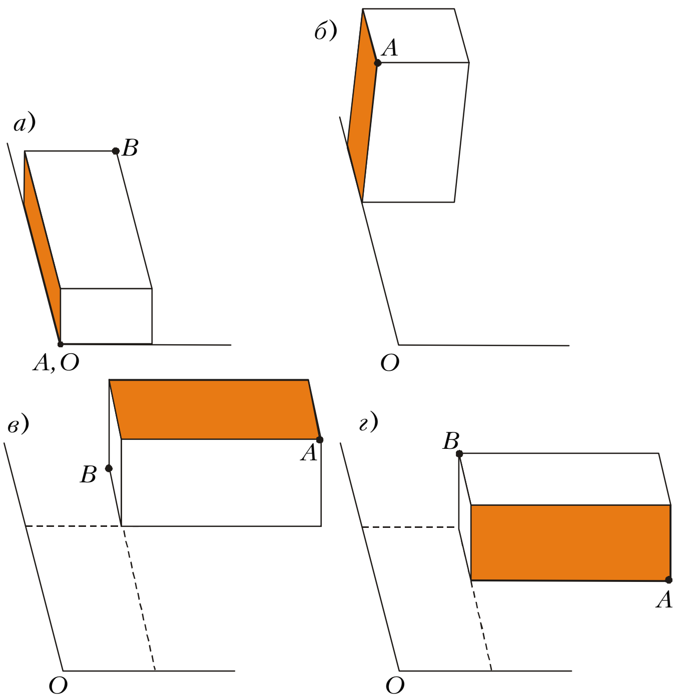

Рис. 1

нув кирпич относительно ребер так, как показано на рисунке, добьемся того, что вершина B кирпича после трех поворотов займет свое исходное положение. На рисунке 1,*г* кирпич уже не мешает измерить расстояние между точками O и B, которое равно расстоянию между точками A и B.

3. Клад не может быть зарыт ближе чем в пяти километрах от Гадюкина, так как тогда он будет далее 4 км от Мартышкина. Но клад не может также быть далее 5 км от Гадюкина, так как тогда береза окажется более чем в двух километрах от него, а дуб – менее чем в двух километрах, т.е. клад окажется не посередине между ними. Значит, клад зарыт ровно в 5 км от Гадюкина.

4. Умножив обе части исходного уравнения

$$x,(yz)+y,(zx)=z,(xy) \qquad (1)$$

на 100, получим

$$\overline{xyz},(yz)+\overline{yzx},(zx)=\overline{zxy},(xy). \qquad (2)$$

Вычтя из уравнения (2) уравнение (1), выводим

$$\overline{xyz}-x+\overline{yzx}-y=\overline{zxy}-z,$$

или

$$100x+10y+z-x+100y+10z+x-y=100z+10x+y-z.$$

После преобразований находим

$$9(5x+6y)=44z. \qquad (3)$$

Одно из возможных решений уравнения (3): $x=y=z=0$.

Исследуем другие решения. Равенство (3) означает, что цифра z кратна 9, следовательно, $z=9$. В этом случае (3) запишется так:

$$5x+6y=44, \text{ или } x=8-y+\frac{4-y}{5}.$$

Отсюда видно, что число x может быть целым только в том случае, если $y=4$. Но тогда $x=4$.

Итак, среди цифр x, y, z обязательно имеются одинаковые.

5. Лом может справиться за три попытки. Опишем порядок его действий.

Вначале Лом указывает на две крайние слева карты, а Фукс ему сообщает, какая из этих карт старшая. Если старшая карта находится слева, то Лом перекладывает ее в середину. При отсутствии нужного порядка (это означает, что в середине оказался туз) Лом отворачивается, а Фукс меняет расположение двух соседних карт. В результате туз попадает на левый или правый край.

Во второй попытке Лом указывает на две крайние карты. После ответа Фукса он узнает, какая из этих карт – туз, и помещает, если это необходимо, туза на последнее место (правый край). Если нужного порядка все еще нет, то единственно возможное расположение карт таково: король–дама–туз. Лом отворачивается, а Фукс перемещает даму в крайнюю (справа или слева) позицию. После этого возможны два варианта расположения карт: король–туз–дама или дама–король–туз.

В третьей попытке Лом опять просит сравнить две крайние карты. Если старшая карта находится справа, то имеет место второй вариант (дама–король–туз), а если слева, то первый (король–туз–дама). В последнем случае достаточно даму переложить на левый край.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Если сумма $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ равна произведению двух последовательных натуральных чисел k и $k+1$, то $n(n+1)=2k(k+1)$. Отсюда получаем

$$n^2+(n+1)^2=2n(n+1)+1=4k(k+1)+1=(2k+1)^2$$

– квадрат целого числа.

Наоборот, если существует такое целое число m, что $n^2+(n+1)^2=m^2$ (в этом случае число m должно быть нечетным), то существует такое натуральное число k, что $n^2+(n+1)^2=(|m|)^2=(2k+1)^2$.

Но тогда

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+(n+1)^2-1}{4}=\frac{m^2-1}{4}=\frac{2k(2k+2)}{4}=k(k+1).$$

17. Подсчитаем, в каком количестве игр принимает участие каждый мальчик. Он может составить с четырьмя другими 4 различные команды. Каждая такая команда должна сыграть три игры, поскольку остальные три мальчика могут составить 3 различные команды. Следовательно, каждый мальчик в турнире должен сыграть 12 раз.

Таким образом, Андрей все игры проиграл и ни одной не выиграл. Каждый из остальных четырех мальчиков сыграл против Андрея 6 раз.

Действительно, например, Дима против пары Андрей + Боря сыграл 2 раза (вместе с Васей и вместе с Геной), точно так же он играл по 2 раза против пары Андрей + Вася и против пары Андрей + Гена; итого – 6 раз. Следовательно, Боря, Вася, Гена и Дима в играх против Андрея с напарником