ные направления выпуклости. Неискушенному смысл этой фразы мы поясним ниже, а пока составим уравнение касательной к кубической параболе в точке P. Для этого достаточно в уравнение касательной подставить $x_0 = -\frac{p}{3}$; после преобразований уравнение примет вид

$$y = \left(q - \frac{p^2}{3}\right)x + \left(r - \frac{p^3}{27}\right). \qquad (15)$$

С точностью до обозначений мы получили первое из уравнений (14). ***Касательную*** к кубической параболе в точке перегиба P, уравнение которой имеет вид (15), мы будем выделять: особым шрифтом в тексте и более толстой линией на рисунке. Если точки на кубической параболе и на ***касательной*** имеют одну и ту же абсциссу x, то разность ординат этих точек равна

$$\Delta y = \left(x + \frac{p}{3}\right)^3.$$

Это равенство означает, что левее точки перегиба P кубическая парабола расположена ниже ***касательной***, а правее – выше.

Приведем теперь точные формулировки, относящиеся к направлению выпуклости графика произвольной функции. График функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 называется выпуклым вверх (вниз), если существует окрестность этой точки, такая что для всех точек этой окрестности касательная к графику, проведенная в точке с абсциссой x_0, расположена выше (ниже) самой кривой. Можно доказать, что признаком выпуклости вверх (вниз) в точке x_0 является выполнение условия $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$). Таким образом, для точек, лежащих левее P, кубическая парабола выпукла вверх, правее – вниз.

С точкой перегиба P связано еще одно любопытное свойство кубической параболы. Ордината этой точки легко определяется подстановкой абсциссы в (5):

$$y\left(-\frac{p}{3}\right) = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$$

Перенесем теперь начало координат в точку P, новые координаты обозначим X, Y. Нас интересует, как запишется уравнение (5) в системе координат XPY. Старые координаты связаны с новыми равенствами

$$x = X - \frac{p}{3}, \quad y = Y + \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$$

Подстановка дает (проверьте!)

$$Y = X^3 - \left(\frac{p^2}{3} - q\right)X.$$

Нечетность функции несомненно влечет за собой симметрию ее графика относительно нового начала координат. Таким образом, установлено, что точка перегиба P есть центр симметрии графика любой кубической параболы.

Но вернемся к задаче о числе касательных, т.е. к равенствам (14). Теперь мы можем прочитать их так: через точку N проходят ровно две касательные к кубической параболе тогда и только тогда, когда эта точка лежит на самой кубической параболе или на ***касательной***, кроме случая, когда N совпадает с точкой перегиба P. Для касательной, проходящей через N, можно определить абсциссы точек касания.

Пусть сначала N лежит на кубической параболе и имеет абсциссу a, тогда ее ордината определяется правой частью второй из формул (14), и подстановка этих координат в уравнение (11) дает

$$2x_0^3 + (p - 3a)x_0^2 - 2pax_0 + \left(a^3 + pa^2\right) = 0. \qquad (16)$$

Найти все корни последнего уравнения помогает то обстоятельство, что один корень $x_0 = a$ мы уже знаем. Разделив уголком левую часть (16) на $(x_0 - a)$, приходим к квадратному уравнению $2x_0^2 + (p - a)x_0 - \left(a^2 + pa\right) = 0$, из двух корней которого a и $\left(-\frac{a+p}{2}\right)$ интерес для нас представляет только второй – это и есть абсцисса второй точки касания.

Если N лежит на ***касательной***, то в (11) подставляем правую часть первой из формул (14) и получаем уравнение

$$2x_0^3 + (p - 3a)x_0^2 - 2pax_0 - \frac{p^2}{27}(9a + p) = 0. \qquad (17)$$

Один из корней этого уравнения мы также знаем – вспомним, что ***касательная*** касается кубической параболы в точке перегиба P с абсциссой $x_0 = -\frac{p}{3}$. Снова на помощь приходит деление уголком, на сей раз – левой части равенства (17) на $\left(x_0 + \frac{p}{3}\right)$, что дает уравнение $2x_0^2 + \frac{1}{3}(p - 9a)x_0 - \frac{p}{9}(9a + p) = 0$ с ожидаемым корнем $x_0 = -\frac{p}{3}$ и новой для нас абсциссой точки касания $x_0 = \frac{p + 9a}{6}$.

На рисунке 4 изображена кубическая парабола $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 14$, точка ее перегиба есть $P(2; -12)$, уравнение ***касательной*** получается из (15): $y = -6 - 3x$. Точки пересечения ***касательной*** и кубической параболы с осью Oy обозначены соответственно N_1 и N_2. Через N_1 проходят ***касательная*** и вторая касательная $y = 24 - 6x$. Через N_2 проходят горизонтальная и наклонная касательные $y = -14$ и $y = 9x - 14$.

Наконец, вернемся к условиям (8), гарантирующим существование трех корней, в них используется, что один из корней производной – меньший, а другой – больший. Если a лежит левее абсциссы точки перегиба, то это и есть меньший корень, x_{01} в обозначениях формулы (8), соответственно, $x_{02} = -\frac{p}{3}$, а необходимые значения функции в этих точках определяются равенствами (13). В итоге получаем, что при выполнении неравенства $a < -\frac{p}{3}$ условия (8) для рассматриваемой задачи выглядят так:

$$\begin{aligned} b &< \left(q - \frac{p^2}{3}\right)a + \left(r - \frac{p^3}{27}\right), \\ b &> a^3 + pa^2 + qa + r. \end{aligned} \qquad (18)$$

При выполнении противоположного неравенства $a > -\frac{p}{3}$ меняются местами и знаки неравенств в (18):

$$\begin{aligned} b &> \left(q - \frac{p^2}{3}\right)a + \left(r - \frac{p^3}{27}\right), \\ b &< a^3 + pa^2 + qa + r. \end{aligned} \qquad (19)$$

Условия (18) и (19) легко прочитать: для того чтобы через точку на плоскости можно было провести три касательные к кубической параболе, необходимо и достаточно, чтобы точка принадлежала области между этой параболой и ***касательной***. На рисунке 6, где изображены кубическая парабола $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ и ее ***касательная*** $y = 12 - 12x$, эта область выделена цветом. К сожалению, определить в общем случае абсциссы всех трех точек касания нам не удастся, но если задать одну из них, то две другие легко найти с помощью