

Рис. 6

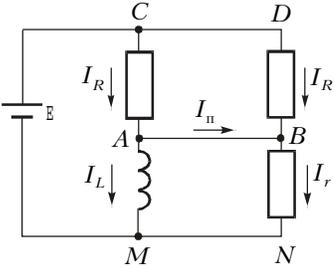


Рис. 7

Пусть в произвольный момент времени в элементах цепи текут токи, изображенные на рисунке 7. Через резисторы сопротивлением R в любой момент будут протекать одинаковые токи I_R – это следует из закона Ома для контура $ABDC$. Через перемычку AB протекает ток I_π , через катушку индуктивности течет ток I_L , а через резистор r – ток I_r . Для узлов A и B можно записать закон сохранения заряда:

$$I_\pi + I_L = I_R$$

и

$$I_r = I_R + I_\pi.$$

Для контура $ABNM$ мож-

но записать закон Ома:

$$L \frac{dI_L}{dt} = r(I_r - I_L),$$

или, воспользовавшись соотношениями для токов,

$$L \frac{dI_L}{dt} = 2rI_\pi.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$L dI_L = 2rI_\pi \cdot dt = 2r \cdot dq$$

и проинтегрируем:

$$\int_0^Q dq = \frac{L}{2r} \int_0^{I_{Lк}} dI_L.$$

Сразу после замыкания ключа ток через катушку индуктивности равен нулю. Поэтому нижний предел интеграла в правой части уравнения также равен нулю. Найдем верхний предел $I_{Lк}$, т.е. установившийся через катушку ток. Очевидно, что он будет равен

$$I_{Lк} = \frac{E}{R+r}.$$

После интегрирования получим суммарный заряд, протекший через перемычку AB :

$$Q = \frac{LI_{Lк}}{2r} = \frac{LE}{2r(R+r)}.$$

Задача 7. Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием (рис. 8) индуктивность катушки быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔL ($\Delta L \ll L$) каждый раз, когда ток в цепи равен нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, быстро возвращают в исходное состояние. Определите величину ΔL , если $L = 0,15$ Гн, $C = 1,5 \cdot 10^{-7}$ Ф, $R = 20$ Ом.

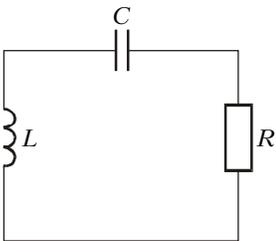


Рис. 8

Если изменение индуктивности катушки происходит за малое время (по сравнению с периодом колебаний тока в контуре), то сохраняется магнитный поток Φ , пронизывающий катушку. Увеличение индуктивности при нулевом токе

в цепи не приводит к изменению тока – он остается нулевым. Сохраняется и энергия контура. Через четверть периода ток в контуре достигает максимального значения. Обозначим величину этого тока через I_m . Энергию магнитного поля катушки выразим через поток Φ ($\Phi = LI$):

$$W_L = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}.$$

Поскольку $\Phi = \text{const}$, при малом изменении индуктивности изменение энергии катушки можно записать в виде

$$\Delta W_L = -\frac{\Phi^2 \Delta L}{2L^2} = -\frac{I_m^2 \Delta L}{2}.$$

Видно, что уменьшение индуктивности приводит к росту энергии магнитного поля. Подкачка энергии в контур будет происходить через временные отрезки, равные половине периода колебаний, т.е. через $T/2 = \pi\sqrt{LC}$. Между двумя соседними подкачками энергия колебательного контура будет уменьшаться за счет тепловых потерь в резисторе. Эти потери за время $T/2$ можно оценить как

$$\Delta W_R = \frac{1}{2} I_m^2 R \pi \sqrt{LC}.$$

Для поддержания незатухающих колебаний необходимо, чтобы поступающая энергия в контур была больше или равна тепловым потерям:

$$|\Delta W_L| \geq \Delta W_R,$$

или

$$\frac{I_m^2 \Delta L}{2} \geq \frac{I_m^2 R \pi \sqrt{LC}}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta L \geq \pi R \sqrt{LC} \approx 9,4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Упражнения

1. В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке 9, в начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Сначала замыкают ключ K_1 . Когда ток через катушку индуктивности достигает значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Определите напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа K_2 и напряжение на конденсаторе в установившемся режиме. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

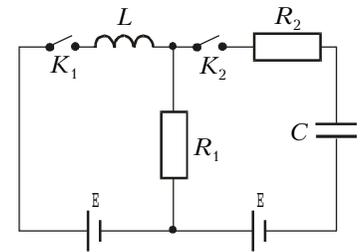


Рис. 9

2. В схеме, изображенной на рисунке 10, сверхпроводящие катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены последовательно с конденсатором емкостью C . В начальный момент ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор заряжен до напряжения U_0 . Сначала замыкают ключ K_1 , а после того, как напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2 . Через некоторое время после замыкания ключа K_2 конденсатор перезарядится до некоторого максимального напряжения U_m . Найдите ток через катушки непос-

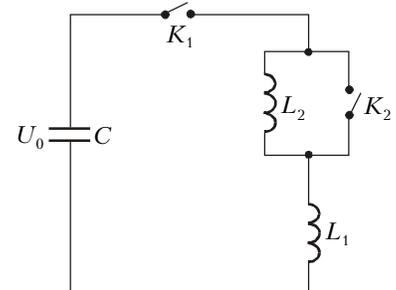


Рис. 10