то

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

что и требовалось доказать.

Далее, стационарность решения означает действительно минимум:

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{v_1\sqrt{x^2 + h_1^2}} -$$

$$-\frac{x^2}{v_1\left(x^2 + h_1^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{v_2\sqrt{(d-x)^2 + h_2^2}} - \frac{(d-x)^2}{v_2\left((d-x)^2 + h_2^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{v_1l_1} - \frac{1}{v_1l_1}\sin^2\alpha + \frac{1}{v_2l_2} - \frac{1}{v_2l_2}\sin^2\beta =$$

$$= \frac{1}{v_1l_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{v_2l_2}\cos^2\beta .$$

Так как все слагаемые положительные, то $\frac{d^2t}{dx^2} > 0$, и это соответствует минимуму.

Пример 5. *Пусть точка B – действительное изображение ($B \equiv F$) точки A при преломлении пучка света на выпуклой сферической поверхности KCL (рис.10). Докажем, что время распространения света между фиксированными точками A и B по двум путям ACB и AC′B одинаково. Предполагается, что углы α и β малые.*

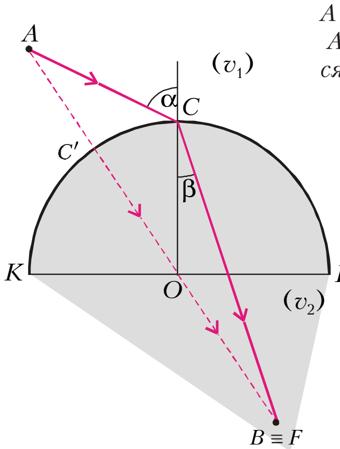

Рис. 10

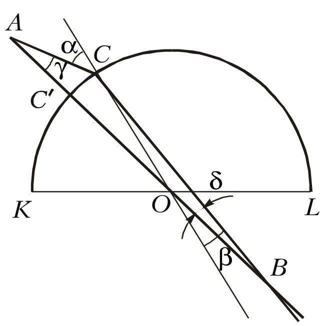

Рис. 11

Обозначим (рис.11) $\angle CAC' = \gamma$, $\angle CBC' = \delta$, $AC' = s$, $C'B = s'$. Тогда

$$t_{AC'B} = \frac{AC'}{v_1} + \frac{C'B}{v_2} = \frac{s}{v_1} + \frac{s'}{v_2}$$

и

$$t_{ACB} = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2} = \frac{AC'}{\cos\gamma}\frac{1}{v_1} + \frac{C'B}{\cos\delta}\frac{1}{v_2} =$$

$$= \frac{s}{v_1\left(1-\gamma^2/2\right)} + \frac{s'}{v_2\left(1-\delta^2/2\right)} = \frac{s}{v_1}\left(1+\frac{\gamma^2}{2}\right) + \frac{s'}{v_2}\left(1+\frac{\delta^2}{2}\right),$$

если учесть параксиальность пучка лучей, т.е. малость углов α, β, γ и δ. А если пренебречь членами второго порядка малости по сравнению с членами первого порядка, то получим

$$t_{ACB} = \frac{s}{v_1} + \frac{s'}{v_2} = t_{AC'B},$$

что и требовалось доказать.

Пример 6. *Докажем, что время распространения света через выпуклую сферическую поверхность раздела двух сред KCL (рис.12) из точки A в точку B, находящуюся за действительным изображением F точки A, максимально на такой траектории ACB, для которой выполняется закон преломления* $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = const$.

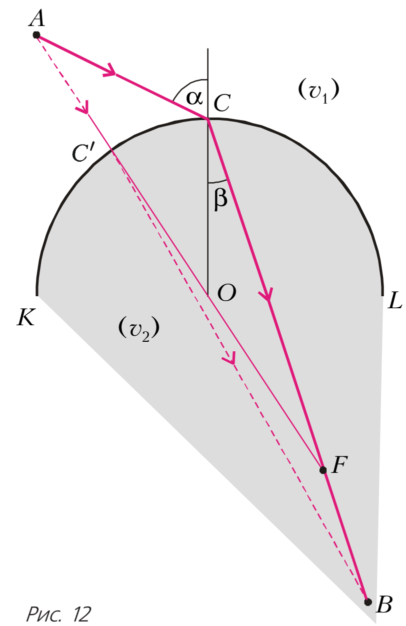

Рис. 12

В однородной среде свет распространяется по прямой линии, поэтому любая возможная траектория должна быть составлена из отрезков прямых. Построим наряду с реальной траекторией $ACFB$ возможную окольную траекторию $AC'B$ (рис.13). Обе траектории выходят из одной и той же точки A и кончаются в одной и той же точке B. Докажем, что время распространения света вдоль истинной траектории будет больше, т.е. что

$$t_{ACB} > t_{AC'B} .$$

Проведем малую дугу с центром в точке F и радиусом FB, она пересечет прямую AOF в точке B'. Проведем большую дугу с центром в точке C' и радиусом $C'B'$, она пересечет прямую $C'B$ на ее продолжении в точке D, а точка B окажется выше. Поскольку F – действительное изображение, то

$$t_{ACF} = t_{AC'F} .$$

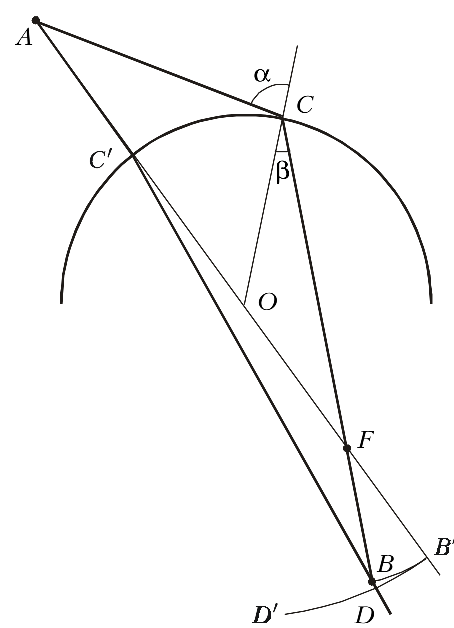

Рис. 13