Тогда $y_n > 0$ для всех достаточно больших n, если m нечетно. Положим $z_k = y_{mk}$ и покажем, что

$$w_k = |z_{k+1}| - q|z_k| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Действительно, имеем

$$Aq^{mk} = a_m z_k^m + g(z_k), \; Aq^{m(k+1)} = a_m z_{k+1}^m + g(z_{k+1}),$$

откуда

$$a_m\left(z_{k+1}^m - q^m z_k^m\right) = q^m g(z_k) - g(z_{k+1}),$$

что при достаточно больших k можно переписать в виде

$$a_m\left(|z_{k+1}|^m - q^m|z_k|^m\right) = q^m g(z_k) - g(z_{k+1}).$$

Следовательно,

$$a_m\left(|z_{k+1}| - q|z_k|\right) =$$
$$= \left(q^m g(z_k) - g(z_{k+1})\right) \Big/ \left(|z_{k+1}|^{m-1} + q|z_{k+1}|^{m-2}|z_k| + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + q^{m-2}|z_{k+1}||z_k|^{m-2} + q^{m-1}|z_k|^{m-1}\right). \; (*)$$

Так как $\deg g(y) \le m-2$ и $|z_k| \to \infty$ $(k \to \infty)$, то правая часть равенства $(*)$ стремится к нулю, т.е. $w_k \to 0$ $(k \to \infty)$. Поскольку последовательность w_k состоит из целых чисел, то $w_k = 0$ для всех k, начиная с некоторого k_0. Итак,

$$|z_{k+1}| = q|z_k| \quad (k \ge k_0).$$

Следовательно, $z_{l+k_0} = \pm q^l z_{k_0}$ $(l = 0, 1, \ldots)$. Но тогда

$$Aq^{m(l+k_0)} = \pm a_m q^{ml} z_{k_0}^m + g\left(\pm q^l z_{k_0}\right) \quad (l = 0, 1, \ldots). \; (**)$$

Если $g(y) \ne 0$, то равенство $(**)$ противоречиво при достаточно больших l (левая часть делится на q^{ml}, а правая – нет).

Таким образом, $f_1(y) = a_m y^m$, так что

$$f(x) = a_m\left(x + \frac{a_{m-1}}{ma_m}\right)^m = a(bx+c)^m$$

для некоторых целых чисел a, b, c ($a \ne 0$, $b \ne 0$). Этим сформулированное в задаче утверждение полностью доказано.

Н.Осипов

М1855. *Плоскости, параллельные граням прямоугольного параллелепипеда, разрезали его на меньшие параллелепипеды, которые окрасили в черный и белый цвета в шахматном порядке. Известно, что суммарный объем черных равен суммарному объему белых параллелепипедов. Докажите, что из черных можно составить параллелепипед P, а из белых можно составить параллелепипед Q так, что P и Q будут равны.*

Все секущие плоскости, разрезающие большой параллелепипед на меньшие параллелепипеды, распадаются на три группы сообразно с тем, какой из граней большого параллелепипеда они параллельны. Секущие плоскости каждой группы разрезают большой параллелепипед на слои, причем любой из слоев состоит из черных и белых параллелепипедов.

Произведем перестройку внутри большого параллелепипеда, специальным образом перемещая слои каждой группы.

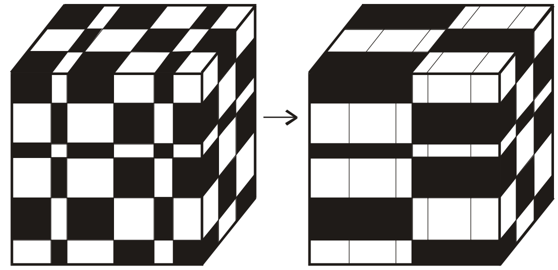

Рис.1

Перестройка проходит в три этапа. На первом этапе занумеруем все слои, параллельные боковой грани, слева направо. Затем все нечетные слои переместим влево, а все четные – вправо (рис.1).

Так перестроенный параллелепипед подвергнем второму этапу перестройки. Для этого все нечетные по порядку слои, параллельные верхней грани параллелепипеда, переместим вверх друг за другом, а все четные – вниз.

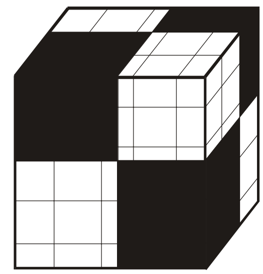

Рис.2

После чего на третьем этапе все нечетные слои, параллельные передней грани параллелепипеда, переместим вперед, а все четные – назад.

В результате перестройки все черные параллелепипеды «склеятся» в четыре черных параллелепипеда, а все белые – в четыре белых (рис.2). При этом три плоскости, параллельные граням большого параллелепипеда, разделят черные и белые параллелепипеды. Пусть ребра большого параллелепипеда имеют длины $2a$, $2b$ и $2c$, а названные три плоскости проходят через их точки $a+x$, $b+y$ и $c+z$, где $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$. По условию, суммарный объем черных параллелепипедов равен суммарному объему белых. Поэтому справедливо равенство

$$(a+x)(b+y)(c+z) + (a+x)(b-y)(c-z) +$$
$$+ (a-x)(b+y)(c-z) + (a-x)(b-y)(c+z) =$$
$$= (a-x)(b-y)(c-z) +$$
$$+ (a-x)(b+y)(c+z) + (a+x)(b-y)(c+z) +$$
$$+ (a+x)(b+y)(c-z).$$

После раскрытия скобок получаем $xyz = 0$, т.е. хотя бы один из сомножителей равен нулю. Это означает, что хотя бы одна из трех плоскостей делит большой параллелепипед ровно пополам. В силу этого возможен завершающий этап перестройки большого параллелепипеда: по одну сторону от этой плоскости размещаем четыре черных, а по другую – четыре белых параллелепипеда. Это и есть требуемые P и Q.

В.Произволов

Ф1863. *В системе (см. рисунок) нить очень легкая и нерастяжимая. Грузы, массы которых M и 2M, вначале удерживают, а затем отпускают. С каким ускорением начнет двигаться груз массой m? Трение в системе отсутствует.*