горизонтальной плоскостью, а груз массой m_2 стоит на этой плоскости, причем отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны. Затем грузы отпускают без начальной скорости. Найдите, на какую максимальную высоту поднимется первый груз после абсолютно неупругого удара о плоскость, если нить можно считать гибкой, неупругой и практически нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно g, блок находится достаточно далеко от грузов.

М.Семенов

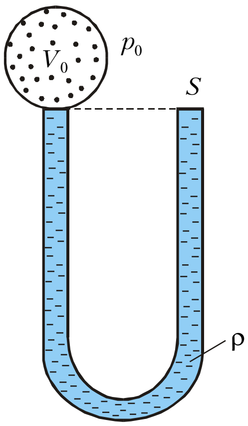

Рис.3

Ф1880. В установленной вертикально U-образной трубке площадью S с внутренним объемом V_0 находится жидкость плотностью ρ (рис.3). Колена трубки одинаковы по высоте, одно из них открыто в атмосферу, а второе герметично соединено с сосудом объемом V_0, внутри которого находится идеальный одноатомный газ. Жидкость заполняет всю U-образную трубку. Найдите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу в сосуде для того, чтобы медленно вытеснить из трубки половину жидкости. Атмосферное давление постоянно и равно p_0. Давлением паров жидкости, поверхностным натяжением и потерями тепла пренебречь. Радиус полукруглого участка трубки, соединяющего ее колена, считать много меньшим высоты трубки.

А.Якута

Ф1881. Что покажет каждый из трех одинаковых амперметров A_1, A_2 и A_3 в схеме, изображенной на рисунке 4, при подключении клемм A и B к источнику

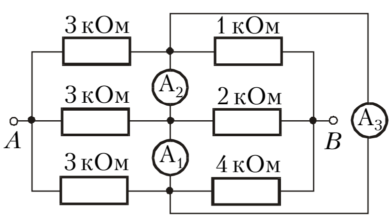

Рис.4

с напряжением U = 3,3 В? Сопротивления амперметров много меньше сопротивлений резисторов.

О.Шведов

Ф1882. Путнику, возвращавшемуся темной ночью домой в свою деревню по дороге, идущей прямо к его дому, с расстояния r = 5 км стал виден огонек свечи в одном из окон. Внутри дома вблизи соседнего окна стоит наряженная к Новому году елка с зеркальными шарами. Оцените, на каком расстоянии от дома путнику станет видно отражение свечи в елочном шаре диаметром D = 10 см, если он идеально отражает свет и находится на расстоянии d = 1,8 м от свечи на линии, перпендикулярной дороге. Окна одинаковые, свеча горит ровно.

М.Семенов

Решения задач М1846–М1855, Ф1863–Ф1867

М1846. *Докажите, что для любого натурального n и любого натурального $k \le n$ выполняется неравенство*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \le 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

Это любопытное неравенство доказывается просто по индукции. Для $k = 1$ и любого n оно справедливо. Проверим его справедливость для $k + 1$ при условии, что оно справедливо для $k < n$. Последовательно получаем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} \le \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3} < 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}.$$

Этим все доказано. В частности, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

В.Орлов

М1847. *В 8 банках сидят 80 пауков. Разрешается выбрать любые две банки, суммарное число пауков в которых четное, и пересадить часть пауков из одной банки в другую, чтобы их стало поровну. При любом ли начальном распределении пауков в банках с помощью нескольких таких операций можно добиться того, чтобы в каждой банке оказалось одинаковое число пауков?*

Предположим, что в n банках, где $0 < n < 8$, сидят по $2r$ пауков, а в остальных $(8 - n)$ банках – по $2s + 1$ пауков. Тогда

$$80 = 2nr + (8-n)(2s+1),$$

откуда

$$72 - 16s = n(2r - 2s - 1),$$

так что n делится на 16, что невозможно.

Следовательно, либо пауки сидят по 10 в банке, либо существуют две банки, количества пауков в которых одинаковой четности, но разные. Уравняем количества пауков в таких двух банках. Если и после этого пауки сидят не по 10 штук в каждой банке, опять выберем две банки, в которых количества пауков одинаковой четности, но разные, уравняем количества пауков в таких двух банках, и так будем действовать и дальше. Очевидно, рано или поздно процесс завершится.

Почему «очевидно»? Проще всего воспользоваться тем, что сумма квадратов количеств пауков в банках при операциях уравнивания уменьшается: в самом деле, при замене банок с a и b пауками, где a, b – числа одинаковой четности, на две банки с $(a+b)/2$ пауками в каждой, мы меняем сумму квадратов a^2+b^2 на величину

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2},$$

а неравенство

$$2a^2+2b^2 > (a+b)^2$$