Доказательство теоремы Крейна–Мильмана сохраняется в конечномерном случае. Его надо проводить по индукции. Для плоскости теорема доказана. Пусть она доказана для (n − 1)-мерных выпуклых множеств; докажем ее для n-мерных множеств (в n-мерном пространстве). Рассмотрим тогда любую гиперплоскость $\boldsymbol{H}_0$ в этом пространстве, найдем на $\boldsymbol{A}$ самую дальнюю от $\boldsymbol{H}_0$ точку A_0 и проведем через нее гиперплоскость $\boldsymbol{H}_0'$, параллельную $\boldsymbol{H}_0$. Гиперплоскость $\boldsymbol{H}_0'$ пересекается с $\boldsymbol{A}$ по выпуклому множеству размерности $\leq n-1$ (ибо сама гиперплоскость имеет размерность n − 1), и, по предположению индукции, в этом пересечении есть крайняя точка, которая будет крайней и для самого множества $\boldsymbol{A}$. Дальнейшую часть доказательства читатель может восполнить самостоятельно. (В бесконечномерном случае применяется особая индукция, а геометрическая суть остается прежней.)

Теорема Каратеодори также обобщается на n-мерное пространство: каждая точка, принадлежащая выпуклой оболочке конечной системы точек, расположенных в n-мерном пространстве, принадлежит выпуклой оболочке системы из не более чем n + 1 точки системы.

Доказательство этого результата проводится индукцией по размерности. Можно посоветовать читателю продумать его в трехмерном пространстве.

То же самое можно посоветовать читателю и относительно теоремы Радона (в которой в n-мерном пространстве надо 4 заменить на n + 2). Но если до сих пор геометрические доказательства были проще или сравнимы с аналитическими, то по отношению к теореме Радона это не так. Обобщение того рассуждения, с помощью которого мы доказали плоскую теорему Радона, достаточно громоздко, в то время как алгебраическое доказательство почти тривиально (см. [2]).

В теореме Хелли в n-мерном случае число 3 надо заменить на n + 1, а доказательство сохраняется.

Наконец, формулировка и доказательство теоремы Фенхеля–Моро сохраняется аж в гильбертовом случае. Надо только слово «прямая» заменять на «гиперплоскость», «вертикальная прямая» на «вертикальная гиперплоскость», а «точка C» на «множество $\boldsymbol{C}$», являющееся пересечением гиперплоскостей $\boldsymbol{H}_0$ и $\boldsymbol{H}_1$. Через $\boldsymbol{C}$ и точку B_1' проводится единственная гиперплоскость, являющаяся графиком аффинной функции. Так что все элементы рассуждения сохраняются.

3. Мы могли бы выше рассматривать не только евклидову плоскость, но и плоскость Лобачевского.

Когда-то исследования Лобачевского были приняты в штыки, над ним издевались, объявляя его геометрию ахинеей (таким человеком был, например, Н.Г.Чернышевский). Но сейчас для любого читателя «Кванта» объяснить, что существует объект, в котором имеются аналоги точек, прямых и полуплоскостей, есть расстояния, но нет параллельности, совсем нетрудно.

Таким объектом является «полуплоскость Пуанкаре» – верхняя полуплоскость (без ограничивающей ее горизонтальной прямой). Точки полуплоскости – это точки геометрии Лобачевского, а аналоги прямых (прямые Лобачевского) – это либо вертикальные лучи, либо полуокружности, центр которых лежит на горизонтальной прямой, ограничивающей полуплоскость (рис.15).

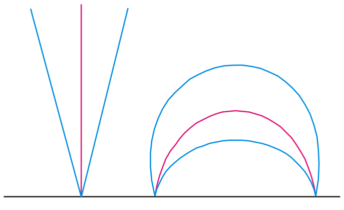

Рис.14. Прямые Лобачевского (красные линии) и эквидистанты (синие линии)

Упражнение 7. Докажите, что через две различные точки полуплоскости Пуанкаре проходит единственная прямая Лобачевского.

Прямая Лобачевского делит полуплоскость на две части, являющиеся аналогами полуплоскостей на евклидовой плоскости; точка на прямой Лобачевского разбивает ее на два луча, а две точки на прямой Лобачевского стягивает дуга, которая является аналогом отрезка. Так что имеется полная аналогия с теми свойствами, которые выше были отмечены на нашей евклидовой плоскости. А значит, на полуплоскости Пуанкаре можно определить понятие выпуклой фигуры – фигуры, которая вместе с двумя точками содержит весь «отрезок», их стягивающий.

Между прямыми Лобачевского естественным образом определяется угол, как угол между касательными к окружностям – прямым Лобачевского – в точке их пересечения (или угол между вертикальной прямой и касательной к пересекающей ее окружности – прямой Лобачевского).

Для того чтобы ввести расстояние на полуплоскости Пуанкаре и определить движения на этой полуплоскости, нужны комплексные числа. Приведем нужные формулы для полноты картины. Полуплоскость Пуанкаре состоит из точек $z = x + iy$ комплексной плоскости, для которых мнимая часть $\operatorname{Im} z = y > 0$. Расстояние между точками z_1 и z_2 определяется по формуле

$$\rho(z_1; z_2) = k \ln \frac{1 + \left|\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1}\right|}{1 - \left|\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1}\right|}, \ k > 0,$$

а движения – это преобразования вида $z \to \dfrac{az + b}{cz + d}$, где a, b, c, d – действительные числа, причем $ad - bc = 1$ (здесь $\bar{z} = x - iy$).

Но собственно для теории выпуклости на плоскости Лобачевского важны лишь два факта, связанных с понятием расстояния. Множеством точек (или, как говорят еще, «геометрическим местом точек»), равноудаленных от прямой на евклидовой плоскости, являются параллельные прямые. А на плоскости Лобачевского параллельных прямых много, но множеством точек, равноудаленных от прямой Лобачевского, не будет ни одна из них. Такими множествами (*эквидистантами* – множествами равных расстояний) будут на полуплоскости Пуанкаре дуги окружностей, проходящие через те две точки, в которых прямая Лобачевского пересекается с горизонтальной прямой (или лучи, исходящие из той же точки, что и вертикальная прямая).

Множеством точек, равноудаленных от точки на полуплоскости Пуанкаре, будет (как и на евклидовой плоскости) окружность, правда, центр ее не совпадает с самой точкой.

Этих сведений достаточно для того, чтобы читатель самостоятельно, без поводыря, смог бродить по выпуклому миру плоскости Лобачевского. Он может, например, сделать попытку самостоятельно построить там теорию выпуклых множеств.

В качестве упражнения попробуйте сформулировать и доказать аналоги всех теорем плоской выпуклой геометрии, о которых рассказывалось выше (т. е. теорем о строгой отделимости, Минковского, Крейна–Мильмана, Каратеодори, Радона и Хелли), для геометрии Лобачевского в ее модели на полуплоскости Пуанкаре.

Литература

1. *Болтянский В. Г., Яглом И. М.* Выпуклые фигуры. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1951.

2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. – М.: УРСС, 2003.