Геометрия выпуклости

В.ТИХОМИРОВ

Введение

Понятие выпуклости возникло в античные времена. Оно встречается в сочинениях Архимеда (III век до н.э.). В труде, озаглавленном «О шаре и цилиндре», есть такие слова: «Я называю выпуклыми в одну и ту же сторону такие поверхности, для которых отрезки, соединяющие две точки, будут… находиться по одну сторону от поверхности».

В новое время изучение выпуклых фигур началось в XIX веке. Как отдельная ветвь геометрии выпуклая геометрия родилась в трудах О.Коши, Я.Штейнера и Г.Минковского.

У нас в стране задачи о выпуклых фигурах были популярны в довоенных школьных математических кружках. Выдающийся математик Лев Генрихович Шнирельман, один из организаторов математического кружка при Московском университете, избрал одной из тем для занятий выпуклую геометрию. Эта тема была подхвачена Давидом Шклярским, аспирантом мехмата, математиком, подававшим большие надежды, но не вернувшимся с войны. Шклярский придал кружкам совершенно новую форму, сохранившуюся и до нашего времени. Основное внимание стало уделяться решению нестандартных задач. Выпуклость оказалась благодатнейшей почвой для развития геометрических способностей: красота и значимость ее результатов сочеталась с совершенной элементарностью постановок задач и средств их исследования.

На базе многолетних занятий по выпуклой геометрии со школьниками и студентами И.М.Яглом и В.Г.Болтянский, участники кружка Шклярского, продолжившие его дело, написали замечательную книгу [1].

Но в ту пору, когда писалась эта книга, авторы не подозревали, что на Западе происходит настоящий «выпуклый бум», связанный с рождением нового направления в теории экстремума, получившего название линейного программирования. Это направление зародилось в нашей стране. Его родоначальником был Леонид Витальевич Канторович, удостоенный за свой вклад в теорию линейного программирования и экономику Нобелевской премии. Результаты Канторовича были переоткрыты на Западе, там было осознано значение выпуклых экстремальных задач при решении актуальных проблем экономики и военно-промышленного комплекса, и многие исследователи приняли участие в развитии новой дисциплины, получившей название *выпуклого анализа*.

Здесь мне хочется коснуться некоторых узловых тем выпуклого анализа, сделав упор на их геометрическую суть.

Иллюстрация В.Власова

Евклидова плоскость

Сначала мы будем говорить о выпуклых фигурах на обычной евклидовой плоскости – той самой, которую проходят в школе (а позже у нас появятся и евклидовы пространства, и плоскость Лобачевского).

Наглядной моделью евклидовой плоскости может служить поверхность школьной доски.

Плоскость состоит из точек. Точки плоскости будем обозначать, как обычно, большими латинскими буквами A, B и т.д. Через каждые две различные точки можно провести единственную прямую. Прямая делит плоскость на две полуплоскости. Точка на прямой делит ее на два луча. Две точки на прямой соединяет отрезок, концами которого являются эти точки. Множества точек плоскости называют также плоскими фигурами, или просто фигурами. Их будем обозначать жирными латинскими буквами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и т.д.

Множество точек плоскости называется *выпуклым*, если оно вместе с двумя своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки (рис.1).

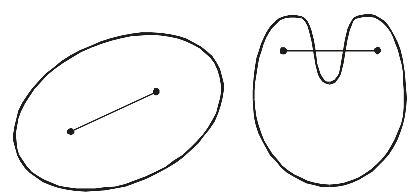

Рис.1. Выпуклое и невыпуклое множества

Пересечение выпуклых множеств в любом числе – выпуклое множество. Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное множество, называется *выпуклой оболочкой* множества.

Мир Евклида – это мир циркуля и линейки, с помощью которых возможно совершать всяческие построения. Простейшие выпуклые фигуры, которые можно изобразить с помощью этих приборов, – это отрезок, треугольник и круг (рис.2). Кривая, ограничивающая круг – окружность, – выпуклой фигурой не является.

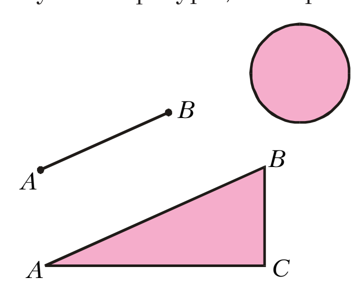

Рис.2. Простейшие выпуклые фигуры

Циркуль и масштабная линейка позволяют находить расстояния между точками. Множество точек, находящихся на расстоянии не меньшем r от некоторой точки A на плоскости, – круг радиуса r с центром в A.

Собственно говоря, понятие расстояния нам будет нужно, в основном, лишь для того, чтобы определить понятие замкнутого множества на плоскости. Замкнутые множества проще всего определить через дополнительные – открытые – множества.