59. Если $y = 0$, то $aB = Ab$ и

$$1 = A^2 - dB^2 = A^2 - d\left(\frac{Ab}{a}\right)^2 = \frac{A^2}{a^2}\left(a^2 - db^2\right) = \frac{A^2}{a^2},$$

так что $\frac{A^2}{a^2} = 1$. Следовательно, $A = a$ и $b = B$. Но пары $(a;\, b)$ и $(A;\, B)$ – разные.

60. Воспользуйтесь теоремой 10 для $d = 3^{2n+1}$.
Далее, если $x^2 - 3^{2n+1} = 1$, то $(x-1)(x+1) = 3^{2n+1}$, откуда $(x-1)$ и $(x+1)$ – степени тройки, т.е. $x - 1 = 1$ и $x + 1 = 3$, чему соответствует $y = 1$.

61. Да. Начнем с того, что $239 + 2\cdot169 = 577$ и $239 + 169 = 408$. Далее имеем $577 + 2\cdot408 = 1393$ и $577 + 408 = 985$. Значит, $1393^2 - 2\cdot985^2 = -1$. Следовательно,

$$0 < \sqrt2 - \frac{1393}{985} = \frac{1}{985^2\left(\sqrt2 + \frac{1393}{985}\right)} < \frac{1}{900^2\cdot2} < 0{,}000\,001.$$

62. б) Если $\left|\frac{m}{n} - \sqrt2\right| > 1$, то неравенство выполнено. Пусть $\left|\frac{m}{n} - \sqrt2\right| \le 1$. Поскольку число $\sqrt2$ иррационально, то $\left|m^2 - 2n^2\right| \ne 0$ и, следовательно, $\left|m^2 - 2n^2\right| \ge 1$. Поэтому

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt2\right| = \left|\frac{\left(m - n\sqrt2\right)\left(m + n\sqrt2\right)}{n\left(m + n\sqrt2\right)}\right| = \left|\frac{m^2 - 2n^2}{n^2\left(\frac{m}{n} + \sqrt2\right)}\right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{n^2\left(\frac{m}{n} + \sqrt2\right)} > \frac{1}{4n^2},$$

ибо

$$\frac{m}{n} + \sqrt2 = \frac{m}{n} - \sqrt2 + 2\sqrt2 \le \left|\frac{m}{n} - \sqrt2\right| + 2\sqrt2 \le 1 + 2\sqrt2 < 4.$$

в) Годится последовательность $x_n = 4\left\{n\sqrt2\right\}$, где фигурные скобки означают дробную часть: $\{x\} = x - [x]$. В самом деле, обозначив $a = \left[n\sqrt2\right]$ и $b = \left[m\sqrt2\right]$, мы сможем записать

$$\left|x_n - x_m\right| = \left|4\left(n\sqrt2 - a\right) - 4\left(m\sqrt2 - b\right)\right| =$$

$$= 4\left|n - m\right|\cdot\left|\sqrt2 - \frac{a-b}{n-m}\right| > 4\left|n - m\right|\cdot\frac{1}{4(n-m)^2} = \frac{1}{|n-m|}.$$

г) Имеем

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt2\right| \ge \frac{1}{n^2\left(\frac{m}{n} + \sqrt2\right)}.$$

Неравенство

$$\frac{1}{n^2\left(\frac{m}{n} + \sqrt2\right)} < \frac{1}{\left(\varepsilon + 2\sqrt2\right)n^2}$$

можно записать в виде

$$\frac{m}{n} - \sqrt2 > \varepsilon.$$

Вспомнив исходное неравенство, имеем

$$\varepsilon < \frac{1}{\left(\varepsilon + 2\sqrt2\right)n^2},$$

т.е.

$$n^2 < \frac{1}{\varepsilon\left(\varepsilon + 2\sqrt2\right)}.$$

Конечность множества значений n (а значит, и m) теперь очевидна.

63. $$\left|a_{n+1} - \sqrt2\right| = \left|\frac{2 + a_n}{1 + a_n} - \sqrt2\right| = \left|\frac{2 - \sqrt2\left(1 - \sqrt2\right)a_n}{1 + a_n}\right| =$$

$$= \frac{\left(\sqrt2 - 1\right)\cdot\left|\sqrt2 - a_n\right|}{1 + a_n} < 0{,}5\left|a_n - \sqrt2\right|.$$

Значит, a_{n+1} более чем вдвое ближе к $\sqrt2$, чем a_n.

64. Если $\frac{x}{y}$ – подходящая дробь, то и $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{y}}}$ – подходящая дробь (в которой на два «этажа» больше). Преобразуя ее, получим $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{y}{y+x}} = 1 + \frac{y+x}{x+2y} = \frac{2x+3y}{x+2y}$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Московский Центр непрерывного математического образования
kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru

Курьер образования
www.courier.com.ru

Vivos Voco!
vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.А.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.Е.Пацхверия, Е.А.Силина, Л.Н.Тишков, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №