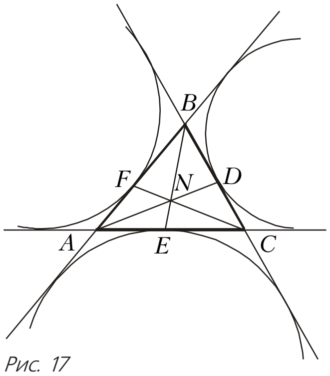

Рис. 17

$CE = p - a$, $EA = p - c$. Поскольку

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = \frac{p-b}{p-a}\cdot\frac{p-c}{p-b}\cdot\frac{p-a}{p-c} = 1,$$

по теореме Чевы отрезки AD, BE и CF пересекаются в одной точке N. Для вычисления барицентрических координат точки N докажите, что для них $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p-a}{p-b}$, $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{p-b}{p-c}$, после чего найдите α, β, γ.

9. Как и при решении упражнения 6, докажите, что $\frac{2}{3}\alpha_I + \frac{1}{3}\alpha_N = \frac{1}{3}\alpha_M$ и что аналогичные равенства справедливы и для координат β и γ.

Уравнения Пелля

(см. «Квант» №4, 6 за 2002 г.)

52. а) $(s; r) = (1; 1)$ или $(2; 3)$. Если s нечетно и $r > 1$, то $3^s \equiv 3 \not\equiv 1 \equiv 2^r + 1 \pmod 4$. Если же $s = 2k$ четно, то $2^r = \left(3^k - 1\right)\left(3^k + 1\right)$, откуда $3^k - 1 = 2^a$ и $3^k + 1 = 2^b$ для некоторых целых неотрицательных a и b, так что $2^b - 2^a = 2$, откуда $b = 2$, $a = 1$, $k = 1$, $s = 2$ и, наконец, $r = 3$.

б) $(x; y; z) = (1; 1; 1)$, $(1; 3; 2)$, $(5; 1; 3)$ или $(7; 5; 4)$. Пусть $y > 1$. Поскольку x нечетно, то $x \equiv 1 \pmod 4$. Следовательно, z четно, т.е. $z = 2s$. Значит,

$$2^y = \left(3^s\right)^2 - x^2 = \left(3^s - x\right)\left(3^s + x\right),$$

так что

$$\begin{cases} 3^s - x = 2^a, \\ 3^s + x = 2^b, \end{cases}$$

где a, b – целые неотрицательные числа. Сложив уравнения и поделив на 2, находим

$$3^s = 2^{a-1} + 2^{b-1}.$$

Поскольку число 3^s нечетно, то $a = 1$. Значит, $x = 3^s - 2$. Подставив найденное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$3^s = 2^{b-1} + 1.$$

В силу пункта а), имеем $(s; b) = (1; 2)$ или $(2; 4)$. Этим двум случаям соответствуют ответы $(x; y; z) = (1; 3; 2)$ или $(7; 5; 4)$.

Пусть теперь $y = 1$. Если z четно, то $2 = \left(3^{z/2}\right)^2 - x^2$, что невозможно, так как число 2 нельзя представить в виде разности квадратов целых чисел. Значит, z нечетно: $z = 2s + 1$. Обозначим $t = 3^s$. Тогда $x^2 - 3t^2 = -2$. Значит, $x + t\sqrt{3} = \left(1 + \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)^n$ для некоторого целого неотрицательного числа n. Поскольку $2 \pm \sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\right)^2$, то

$$3^s = t = \frac{\left(x + t\sqrt{3}\right) - \left(x - t\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} - \left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1}}{2^{n+1}\sqrt{3}}.$$

Докажем, что $2n + 1$ – степень тройки. Если q – простой делитель числа $2n + 1$, отличный от 3, то

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1} - \left(1-\sqrt{3}\right)^{2n+1} = C\left(\left(1+\sqrt{3}\right)^q - \left(1-\sqrt{3}\right)^q\right),$$

где C – натуральное число. Но $\left(1+\sqrt{3}\right)^q - \left(1-\sqrt{3}\right)^q = 2m\sqrt{3}$, где m – целое число, не делящееся на 3. Нетрудно проверить, что m – не степень двойки. (В противном случае также и некоторое T, являющееся решением уравнения $V^2 - 3T^2 = -2$, было бы степенью двойки, а это невозможно.) Мы пришли к противоречию: число $t = 3^s$ не имеет простого делителя, отличного от 3.

Итак, $2n + 1$ – степень тройки. Если $2n + 1$ делится на 9, то из равенства $\left(1 \pm \sqrt{3}\right)^9 = 16\left(275 \pm 153\sqrt{3}\right)$ следует, что $z = 3^s$ делится на 17. Значит, $2n + 1 = 1$ или 3, откуда $n = 0$, $x = 1$ и $z = 1$ или $n = 1$, $x = 5$ и $z = 3$.

53. а) Выполнив замену $x = X - 4y$, получаем уравнение

$$X^2 + 2X - 15y^2 - 12y + 1 = 0,$$

которое можно записать в виде

$$(X+1)^2 - 3\left(5y^2 - 4y\right) = 0.$$

Обозначив $u = X + 1$ и домножив обе части уравнения на 5, получаем

$$5u^2 - 3\left(25y^2 - 20y\right) = 0,$$

откуда

$$5u^2 - 3(5y - 2)^2 = -12.$$

Домножив обе части на 5 и обозначив $v = 5u$ и $w = 5y - 2$, получаем уравнение

$$v^2 - 15w^2 = -60.$$

Поскольку для $d = 15$ имеем $q = 4 + \sqrt{15}$ и

$$\frac{4 + \sqrt{15} + 60}{2\sqrt{15}} < 9,$$

то для нахождения множества M достаточно проверить значения $w = 1, 2, \ldots, 8$. Подходит только $w = 8$, которому соответствует значение $v = 30$. Значит,

$$v + w\sqrt{15} = \pm\left(30 + 8\sqrt{15}\right)\left(4 + \sqrt{15}\right)^n,$$

где $n \in \boldsymbol{Z}$. Поскольку нас интересуют только те пары $(v; w)$, для которых $v \equiv 0$ и $w \equiv 3 \pmod 5$, то, как легко проверить, подходит лишь

$$v + w\sqrt{15} = \left(30 + 8\sqrt{15}\right)\left(-4 - \sqrt{15}\right)^n.$$

Теперь легко выписать ответ:

$$y = \frac{w+2}{5} = \frac{\left(15 + 4\sqrt{15}\right)\left(-4-\sqrt{15}\right)^n - \left(15 - 4\sqrt{15}\right)\left(-4+\sqrt{15}\right)^n + 2\sqrt{15}}{5\sqrt{15}},$$

$$x = u - 4y - 1 = \left(15 + 4\sqrt{15}\right)\left(-4-\sqrt{15}\right)^n + \left(15 - 4\sqrt{15}\right)\left(-4+\sqrt{15}\right)^n - 4y - 1.$$

54. б) $x = \left(m^2 - n^2\right)/\left(m^2 + n^2\right)$, $y = 2mn/\left(m^2 + n^2\right)$.

55. Взяв $r = 9$, имеем $221^2 - 67\cdot 27^2 = -2$; далее опять $r = 9$ и $1899^2 - 67\cdot 232^2 = -7$; потом $r = 5$ и $3577^2 - 67\cdot 437^2 = 6$; на предпоследнем шаге $r = 7$ приводит к равенству $9053^2 - 67\cdot 1106^2 = -3$; наконец, $r = 8$ дает ответ.

(Оригинальное индийское решение этой задачи использует прием, сокращающий вычисления. Обе части равенства $221^2 - 67\cdot 27^2 = -2$ возводят в квадрат, получая $\left(221^2 + 67\cdot 27^2\right)^2 - 67\,(2\cdot 27\cdot 221)^2 = (-2)^2$, после сокращения которого на 4 получается искомый ответ.)