Траектории замечательных точек треугольника Понселе

(см. «Квант» №2)

1. Пусть точка $X(\alpha;\beta;\gamma)$ лежит на отрезке X_1X_2. Проведем прямую l, перпендикулярную AB, и введем на этой прямой

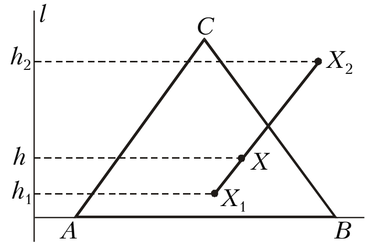

Рис. 15

координаты. Проекция любой точки на прямую l – это взятое с соответствующим знаком расстояние от точки до прямой AB (рис.15). Пусть

$$\frac{h_2-h}{h_2-h_1}=\lambda=\frac{X_2X}{X_2X_1}.$$

Тогда $h=\lambda h_1+(1-\lambda)h_2$. Поделив на высоту h_c, получаем требуемое:

$$\gamma=\lambda\gamma_1+(1-\lambda)\gamma_2.$$

2. Пусть $\overrightarrow{CB}=\vec a$, $\overrightarrow{BA}=\vec c$, $\overrightarrow{AC}=\vec b$. Проведем через точку X прямые, параллельные сторонам AC и BC, B', A' – точки пересечения этих прямых с AB и AC. Тогда

$$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}=\gamma\vec b-\beta\vec c.$$

3. Наметим это вычисление. Рассмотрим скалярный квадрат вектора u:

$$\vec u\cdot\vec u=u^2=(\gamma_2-\gamma_1)^2\vec b^{\,2}+(\beta_2-\beta_1)^2\vec c^{\,2}-2(\gamma_2-\gamma_1)(\beta_2-\beta_1)\vec b\vec c=$$
$$=(\gamma_2-\gamma_1)\Big((\gamma_2-\gamma_1)\vec b-(\beta_2-\beta_1)\vec c\Big)\vec b+$$
$$+(\beta_2-\beta_1)\Big((\beta_2-\beta_1)\vec c-(\gamma_2-\gamma_1)\vec b\Big)\vec c.$$

В первом слагаемом заменим $\vec c$ на $-\vec a-\vec b$, а во втором заменим $\vec b$ на $-\vec a-\vec c$.

Дальше преобразуем наше выражение, пользуясь тем, что $\alpha+\beta+\gamma=1$, т.е. $\beta+\gamma=1-\alpha$:

$$(\gamma_2-\gamma_1)\Big((\gamma_2+\beta_2-\gamma_1-\beta_1)\vec b+(\beta_2-\beta_1)\vec a\Big)\vec b+$$
$$+(\beta_2-\beta_1)\Big((\gamma_2+\beta_2-\gamma_1-\beta_1)\vec c+(\gamma_2-\gamma_1)\vec a\Big)\vec c=$$
$$=-(\gamma_2-\gamma_1)(\alpha_2-\alpha_1)b^2-(\beta_2-\beta_1)(\alpha_2-\alpha_1)c^2+$$
$$+(\gamma_2-\gamma_1)(\beta_2-\beta_1)\left(\vec a\vec b+\vec a\vec c\right),$$

но

$$\vec a\vec b+\vec a\vec c=\vec a\left(\vec b+\vec c\right)=-a^2.$$

4. а) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$,

т.е. $a^2+b^2+c^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$.

б) $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$. Можно действовать, например, так:

$$a^3+b^3+c^3=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)=$$
$$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc+3ab\right)-3ab(a+b)=$$
$$=\sigma_1\left(\sigma_1^2-3\sigma_2\right)+3ab(a+b+c)-3ab(a+b).$$

5. Поскольку $S=rp$, $r^2p=p^3-\sigma_1p^2+\sigma_2p-abc$, т.е.

$$r^2p=-p^3+p\sigma_2-4Rrp,$$

откуда

$$\sigma_2=ab+ac+bc=p^2+r^2+4Rr.$$

6. Вычислим, например, координату γ_H (для остальных координат – аналогично). Высота треугольника AHB с точностью до знака равна $b\cos\angle A\operatorname{ctg}\angle B$, так что

$$S_{AHB}=\frac12 c\cos\angle A\operatorname{ctg}\angle B=$$
$$\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}{8ac\sin\angle B}=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}{16rp}.$$

Отсюда

$$\gamma_H=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}{16p^2r^2}.$$

Раньше мы видели, что для центра описанной окружности

$$\gamma_O=\frac{c^2\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16p^2r^2},$$

а для центра тяжести $\gamma_M=\dfrac13$. Прямым вычислением можно убедиться в том, что

$$\frac23\gamma_O+\frac13\gamma_H=\frac13=\gamma_M,$$

что и составляет содержание теоремы Эйлера.

7. Пусть D, E и F – точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника (рис.16). Тогда $\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CF}{FA}=1$ и по теореме Чевы отрезки AE, BF и CD пересекаются в одной точке G, причем $AD=p-a$, $BD=p-b$, $CF=p-c$. Если α, β и γ – барицентрические координаты точки G, то

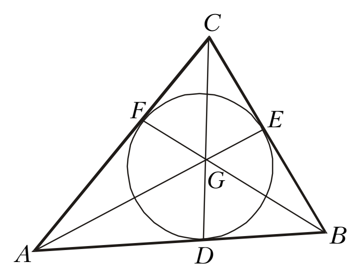

Рис. 16

$$\alpha(p-a)=\beta(p-b)=\gamma(p-c).$$

Докажем это для координат α и β:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{S_{CBG}}{S_{CAG}}=\frac{S_{CBD}-S_{GBD}}{S_{CAD}-S_{GAD}}=\frac{BD}{AD}=\frac{p-b}{p-a},$$

откуда $\alpha(p-a)=\beta(p-b)$.

Пусть $\alpha(p-a)=k$. Тогда

$$\alpha=\frac{k}{p-a},\ \beta=\frac{k}{p-b},\ \gamma=\frac{k}{p-c}.$$

Из равенства $\alpha+\beta+\gamma=1$ получаем

$$k\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)=1,$$

т.е.

$$k=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)+(p-a)(p-c)+(p-b)(p-c)},$$

но тогда, например в силу ранее установленных формул,

$$\alpha=\frac{(p-b)(p-c)}{pr^2+4Rr},$$

так как знаменатель равен

$$3p^2-2p(a+b+c)+ab+ac+bc=r^2+4Rr.$$

8. Пусть D, E и F – точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника (рис.17). Тогда (докажите) $AF=p-b$, $FB=p-a$, $BD=p-c$, $DC=p-b$,