22. Обозначим эти трехчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, а их старшие коэффициенты – a, b и c. Можно считать, что $a < b < c$. Поскольку трехчлен $f(x)-g(x)$ имеет только один корень и его старший коэффициент отрицателен, то $f(x)-g(x)\le 0$ для любого x. Аналогично, $g(x)\le h(x)$. Таким образом, $f(x)\le g(x)\le h(x)$ для всех x. Но в некоторой точке t имеем $f(t)=h(t)$. Тогда и $f(t)=g(t)=h(t)$.

23. В равнобедренном треугольнике ACD медиана CF совпадает с биссектрисой и высотой, следовательно, $\angle ACF=\angle DCF$ и $\angle AFC=90^\circ$. Значит, четырехугольник $ABCF$ – вписанный. Поэтому

$$\angle BLC=\frac{\breve{BC}+\breve{AF}}{2}=\angle BAC+\angle ABF=$$

$$=90^\circ-\angle ACB+\angle ABF=90^\circ-2\angle ACF+\angle ABF=90^\circ-\angle ACF=$$

$$=\angle FAC=\angle FBC=\angle LBC.$$

26. Не всегда. Рассмотрим 2001 одинаковых графов, в каждом из которых 2003 вершины, точнее, одна вершина степени 2000 и 2002 вершины степени 2001. И еще рассмотрим одну вершину, не принадлежащую ни одному из этих графов. Соединим ее ребрами с каждой из 2001 вершин степени 2000. Мы получили граф, в котором $1+2001\cdot 2003=4008004$ вершин, причем степени всех вершин одинаковы. Пользуясь тем, что сумма степеней вершин любого связного графа четна, легко доказать, что в построенном графе нет подграфа, степени всех вершин которого одинаковы и нечетны. При помощи перехода к дополнительному подграфу из этого легко выводится, что нет и собственного подграфа, степени всех вершин которого одинаковы и четны.

27. $\angle YXI=\angle XYI$ и $\angle XYI=\breve{XI}/2=\angle BXI$, стало быть, $\angle YXI=\angle BXI$. Аналогично, $\angle XYI=\angle CXI$. Значит, точка I лежит на биссектрисах углов BXY и XYC, что и требовалось доказать.

Замечание. Условие «точки X и Y лежат на сторонах треугольника» однозначно определяет картинку. Если «стороны» заменить на «продолжения сторон», то утверждение задачи останется верным. (Убедитесь в этом!)

28. 12. Сначала по индукции докажите, что набором гирь 1, 1, 2, 4, 8, …, 2^k и A при $A\le 2^{k+1}$ можно уравновесить любую пару грузов суммарной массы не более $A+2^{k+1}$, а затем докажите, что 11 гирь недостаточно.

30. $\alpha=11/20$. Вычислим среднее арифметическое всех 11 чисел. Если оно больше $1/2$, поместим в первую группу число $a_1=0$, а во вторую – все остальные. Среднее арифметическое чисел $a_2,\dots,a_{11}$ в $11/10$ раз больше среднего арифметического всех чисел, а потому больше $11/20$.

Если же среднее арифметическое всех чисел не больше $1/2$, помещаем в одну группу $a_{11}=1$, а в другую $a_1,a_2,\dots,a_{10}$. Сумма всех одиннадцати чисел не больше $11/2$, значит, сумма первых десяти не больше $9/2$, поэтому их среднее арифметическое не больше $9/20 = 1 - 11/20$.

Примером набора, который нельзя разбить на две группы с меньшей разностью средних арифметических, служит, например, набор 0, $1/10$, $2/10$, …, $9/10$, 1.

31. а) Пусть OK пересекает BC в точке X, AC – в точке Y. Пусть Z – точка описанной окружности треугольника ODC_1, диаметрально противоположная O. Тогда, поскольку угол ODA прямой, $Z=OK\cap AB$. Из вписанности четырехугольника $ZODC_1$ получаем, что $\angle COX=\angle ADC_1$. Кроме того, $\angle DAC_1=\angle OCX$ (из вписанности четырехугольника C_1ACB). Поэтому подобны треугольники COX и ADC_1, откуда $OX/OC=DC_1/AD$. Аналогично, $OY/OC=DC_1/DB$. Осталось приравнять правые части двух последних равенств.

б) Не умаляя общности, можно считать, что точка L расположена на продолжении диагонали AC за точку C. Заметим, что $\angle DAC=\angle DBC$ и $\angle DCA=\angle DBA$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. В силу того, что $AB\parallel DY$, мы имеем $\angle DCA=\angle DBA=\angle BDY$. Таким образом, треугольники DAC и YBD подобны по двум углам. Следовательно, треугольники DMC и YND подобны как соответствующие «половинки», отрезанные от двух подобных треугольников медианами. Отсюда $\angle DML=\angle DNL$. Это означает, что точки M, N, L и D лежат на одной окружности.

32. Можно. Например, в силу китайской теоремы об остатках можно расставить числа так, чтобы число i-й строки и j-го столбца было сравнимо с $(-1)^i(2i-1)$ по модулю 17 и с $(-1)^j(2j-1)$ по модулю 101.

34. Выигрывает первый игрок. Число $1959=6+\frac{63\cdot 62}{2}$ на 6 больше количества ребер полного графа с 63 вершинами. Докажем, что первый игрок может получить вершину, в которую входят 6 ребер и ни одного ребра не выходит. Сначала он разобьет вершины на пары и проведет по ребру между вершинами каждой пары. Второй как-то ориентирует эти ребра, в результате получатся 32 вершины, в которые входит по одному ребру и ни одного не выходит. Первый разобьет эти 32 вершины на пары и проведет в них ребра. Второй эти ребра ориентирует, в результате чего образуются 16 вершин, в которые входит по 2 ребра и ни одного не выходит. И так далее. В итоге получится вершина A, в которую входят 6 ребер и ни одного ребра не выходит.

После этого первый проведет все возможные ребра среди 63 отличных от A вершин. Получится ориентированный граф с 1959 ребрами, в котором из вершины A нельзя выйти.

37. При $k=2^r+1$, где r – целое неотрицательное число. Представим число $k-1$ в виде $k-1=2^pq$, где p – неотрицательное целое, а q – нечетное число. Ясно, что все степени k дают остаток 1 при делении на q. Предположим, что $q\ne 1$ и на доске написано число a, не дающее остаток 1 при делении на q. Покажем, что в этом случае Саша всегда сможет изменить число так, чтобы и новое число не давало остаток 1 при делении на q. Допустим, Дима назвал некоторое число x. Саша будет вынужден написать число, дающее остаток 1 при делении на q, лишь если числа $a+x$ и $a-x$ дают остаток 1, но в этом случае число $(a+x)-(a-x)=2x$ кратно q, а тогда $x\,\vdots\,q$ и $a+x\equiv a-x\equiv a\not\equiv 1 \pmod q$. Итак, в случае $q\ne 1$ Саша может не позволить появиться на доске числу, сравнимому с 1 по модулю q, а значит, на доске не появится никакая степень числа k.

Докажем индукцией по r, что при $k=2^r+1$ Дима сможет получить на доске степень числа k. *База*: $r=0$, т.е. $k=2$. Действия Димы будут такими: если на доске написано число $a=2^u(2v+1)$, где $v\ge 1$, Дима называет $x=2^u$. Тогда $a-x=2^{u+1}v$ и $a+x=2^{u+1}(v+1)$. В обоих случаях максимальный нечетный делитель числа, написанного на доске, уменьшился. Следовательно, когда-нибудь Дима получит степень двойки. *Переход*. Пусть $k=2^r+1$, тогда $n=2^{r+1}+1$ можно представить в виде $n=2k-1$. Допустим, Дима уже получил степень числа k. Покажем, как он из степени числа k сможет сделать степень числа n. Для этого объясним, как из числа a вида k^un^v можно получить число того же вида с меньшим u. Если Дима называет число $x=(k-1)k^{u-1}n^v$, то $a-x=k^{u-1}n^v$ и $a+x=(2k-1)k^{u-1}n^v=k^{u-1}n^{v+1}$. Следовательно, за u ходов получится степень числа n.