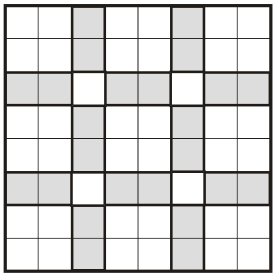

Рис. 11

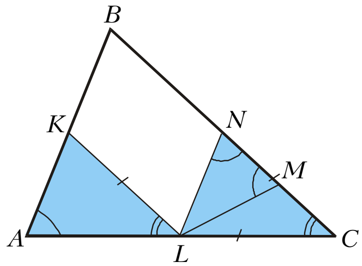

Рис. 12

и LCN. Следовательно, треугольники AKL и LNC равны, откуда $AK = LN = LM$.

14. Пусть во вскрытой коробке x красных, y синих и z зеленых конфет. Не умаляя общности, можно считать, что $x \le y \le z$. Так как во вскрытой коробке не менее 65 конфет, то $z \ge \frac{65}{3} > 21$. Значит, в запечатанных коробках всего не более 78 зеленых конфет. Среди оставшихся коробок есть коробка, содержащая 80 или 85 конфет. В такой коробке не все конфеты зеленые.

15. Пусть они существуют.

Первый случай. Проведем через каждый из 30 отрезков прямую и оценим количество точек пересечения прямых. (Если через какую-то точку проходят более чем две прямые, будем учитывать ее столько раз, сколько пар прямых в ней пересекаются. Например, если через точку проходят 4 прямые, то учтем ее 6 раз.)

С одной стороны, число точек пересечения 30 прямых не превосходит $\frac{29 \cdot 30}{2} = 29 \cdot 15$, так как на каждой прямой есть не более 29 точек пересечения, а каждая точка учитывается дважды: один раз на одной прямой и один – на другой. С другой стороны, можно подсчитать для каждой прямой точки ее пересечения с *отрезками*. Таких пересечений для каждой прямой не меньше 15, поэтому всего – не меньше $30 \cdot 15$. Таким образом, число точек пересечения не превосходит $29 \cdot 15$ и не меньше $30 \cdot 15$. Противоречие.

Второй способ. Если продолжение отрезка a пересекает отрезок b, нарисуем стрелку от a к b. Очевидно, не могут одновременно существовать стрелки от a к b и от b к a. По условию, из каждого отрезка должно выходить не менее 15 стрелок. Значит, в каждый отрезок входят не более 14 стрелок и у стрелок оказывается больше начал, чем концов.

16. Назовем расстановку плюсов и минусов *удачной*, если в ней самый левый и самый правый знаки различны и расположены симметрично относительно центра полоски; *выжидательной* – если это сплошной интервал, заполненный одинаковыми знаками и расположенный «почти симметрично», т.е. так, что количества пустых клеток слева и справа отличаются на 1.

Докажем, что второй игрок может действовать так, чтобы после каждого его хода позиция была выжидательной или удачной. Рассмотрим некоторый ход первого игрока.

Если это самый первый ход игры и он сделан не в центральную клетку, то второй игрок может поставить противоположный знак в симметричную клетку; если же в центральную – создать выжидательную позицию.

Случай, когда первый делает ход из выжидательной позиции, очевиден. Пусть первый ходит из удачной позиции. Если он ставит какой-то знак ближе к краю, чем все ранее поставленные, то второй может создать удачную позицию. Если же первый ставит знак внутрь свободного интервала, то второй может ответить тем же. Ведь если бы ответить было нельзя, то были бы интервалы, заполненные одинаковыми знаками и отделенные друг от друга одиночными пустыми клетками, причем знаки в соседних интервалах различны. Поскольку крайние знаки разные, то смена знака внутри области происходит нечетное число раз и количество пустых клеток нечетно. Поскольку длина всей области нечетна, то количество заполненных клеток четно. Но после хода первого заполнено нечетное число клеток!

Замечание. Пусть двое по очереди ставят плюсы и минусы в полоске размером $1 \times n$; тот, кто поставил знак рядом с противоположным, проигрывает; если этого не случилось, а полоска уже заполнена (естественно, одинаковыми знаками), то ничья. Докажите, что игра ничейна – ни один из игроков не имеет выигрышной стратегии.

17. Опустим из M перпендикуляры MK и ML на стороны AB и BC соответственно. Так как BM – биссектриса угла B, имеем $MK = ML$. Углы треугольника LMC равны 90°, 60° и 30°, значит, $ML = MC/2$. Пусть N – середина MC, тогда $MN = ML = MK$. Отрезок AN – медиана, биссектриса и высота треугольника AMC, в частности, $\angle ANM = 90^\circ$. Теперь заметим, что AMK и AMN – прямоугольные треугольники с общей гипотенузой AM и равными катетами MK и MN, следовательно, они равны. В частности, $\angle MAK = \angle MAN$, откуда $\angle MAC = 2\angle MAN = 2\angle MAB$. Теперь, обозначив $\angle MAB = \alpha$ и посчитав величины углов, легко завершить решение.

18. Если закрашенных клеток не больше 59, утверждение следует из следующей леммы: *периметр любой связной фигуры из n клеток не превосходит 2n + 2.*

Если же закрашено не менее 60 клеток, то в дополнительной фигуре (состоящей из незакрашенных клеток) не более $81 - 60 = 21$ клетки. Поскольку каждый отрезок границы закрашенной фигуры принадлежит либо границе дополнительной фигуры, либо границе квадрата 9×9, то периметр не превосходит $4 \cdot 21 + 4 \cdot 9 = 120$.

Замечание. Периметр может быть равен 120 (рис.13).

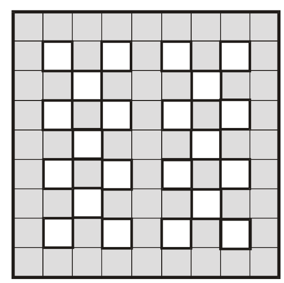

Рис. 13

19. Пусть у Гарри было n животных. Легко понять, что при каждой операции количество мышат удваивается по модулю n. Поэтому после семнадцати ходов количество мышат будет равно $2^{17} - nk$, где k – целое неотрицательное число. Поскольку это вдвое больше, чем количество остальных животных, получаем уравнение

$$2^{17} - nk = 2\left(n - \left(2^{17} - nk\right)\right),$$

откуда $3 \cdot 2^{17} = n(3k+2)$. Поэтому $n = 3 \cdot 2^s$, где $0 \le s \le 16$. Поскольку мышат становится вдвое больше, чем лягушат, на $(s+1)$-м ходу, то $s = 16$. У Гарри было $3 \cdot 2^{16}$ животных.

20. 18 отрезков. Пример – на рисунке 14. Чтобы доказать, что палочек единичной длины не меньше 18, раскрасьте клетки квадрата в шахматном порядке и заметьте, что к каждой из 18 черных клеток, прилегающих к границе, примыкает отрезок единичной длины. (Для угловых клеток это очевидно. Если же черная клетка прилегает, скажем, к нижней горизонтальной стороне и ее вертикальные стороны составлены отрезками неединичной длины, то ее верхняя сторона – единичный отрезок.)

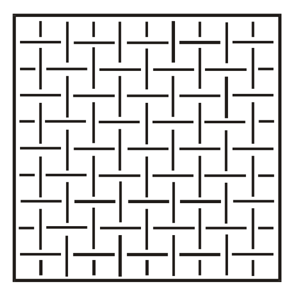

Рис. 14