разлом) и использует эти половины в качестве горизонтальных сторон.

б) Ослик может разломить пополам какую-нибудь палочку. Эти половинки будут вертикальными сторонами прямоугольника. Из оставшихся палочек Иа сложит отрезок и разделит его пополам (если нужно, разломив). Это будут горизонтальные стороны.

в) Пусть в конструкторе x палочек по 8 см и y палочек по 9 см. Тогда

$$8x + 9y = 1800.$$

Поскольку 1800 делится и на 8, и на 9, то y делится на 8, а x – на 9. Значит, $y = 8b$ и $x = 9a$, где a, b – натуральные числа. Очевидно,

$$a + b = 1800 : 72 = 25.$$

Осталось объяснить, как из палочек сложить восемь отрезков длиной $1800 : 8 = 225 = 9 + 3 \cdot 72$ см каждый. Положим на каждую сторону по одной палочке длиной 9 см. Палочки длины 8 см можно разбить на a кучек по 9 палочек, а оставшиеся палочки длины 9 см можно разбить на $(b - 1)$ кучек по 8 палочек (сумма длин палочек каждой кучки равна 72 см). Мы получили $a + b - 1 = 24$ кучки. Их можно разложить по три на каждую из 8 сторон.

3. *Первый способ*. Пусть O – точка пересечения диагоналей. В треугольниках ABC и BOC угол C – общий, а угол A первого равен углу B второго. Следовательно, $\angle ABC = \angle BOC$. Аналогично, $\angle ADC = \angle AOD$. Поскольку углы BOC и AOD вертикальные, то $\angle ABC = \angle ADC$.

Второй способ.

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle CAB - \angle ACB =$$

$$= 180^\circ - \angle CBD - (\angle BCD - \angle ACD) =$$

$$= (180^\circ - \angle CBD - \angle BCD) + \angle ACD = \angle BDC + \angle BDA = \angle ADC.$$

4. На 6 нулей. Задумаемся, на какую степень пятерки может делиться это произведение. Каждое из чисел меньше $5^4 = 625$ и поэтому делится разве лишь на 5^3. Хотя бы одно из чисел не делится на 5, иначе их сумма делилась бы на 5. Поэтому больше шести нулей быть не может. А шесть нулей бывает: 407 = 250 + 125 + 32.

Вот другое доказательство того, что больше шести нулей не бывает. Пусть $x + y + z = 407$. Тогда по неравенству между среднем арифметическим и среднем геометрическим

$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x + y + z}{3} = \frac{407}{3} < 200,$$

откуда $xyz < 200^3 < 10^7$.

5. Пусть k – число учеников в классе, x – количество всех ошибок, y – количество грубых ошибок. Тогда число негрубых ошибок равно $x - y$ и по условию

$$x - y + 2k = 5 \cdot 3y,$$

откуда $y = \dfrac{x + 2k}{16}$. Вспомнив неравенство $y > \dfrac{x}{4}$, получаем

$$\frac{x + 2k}{16} > \frac{x}{4},$$

т.е. $x < \dfrac{2}{3}k$. Так как число учеников, сделавших ошибки, не превосходит количества ошибок, то ошибки сделали менее $\dfrac{2}{3}$ учеников класса, что и требовалось доказать.

6. Предположим, что такого числа нет.

Первый способ. Из каждого числа с нечетным номером, кроме первого, проведем стрелку к соседу, который меньше его (к одному из них, если оба меньше). Ни в какое число не входят две стрелки, так как иначе это число было бы меньше двух своих соседей. Значит, все числа, кроме первого и еще одного, разбились на пары соседних, причем в каждой паре число с нечетным номером больше числа с четным номером. Оставшееся без пары число с четным номером отличается от первого числа менее чем на 1, поэтому разность суммы чисел с четными номерами и суммы чисел с нечетными номерами меньше 1, а это противоречит условию задачи.

Второй способ. Рассмотрим наибольшее число a последовательности. Разобьем остальные на две части: числа «до» и числа «после» a. Вторая часть – убывающая последовательность (иначе первое число, после которого монотонность нарушается, было бы меньше своих соседей). Аналогично, первая часть – возрастающая последовательность. Добавим число a в ту часть, где количество чисел нечетно. Таким образом, последовательность разбита на две – убывающую и возрастающую. (Одна из последовательностей может быть пустой.)

В убывающей последовательности сумма чисел с четными номерами меньше суммы чисел с нечетными номерами, так как второе меньше первого, четвертое меньше третьего и т.д. В возрастающей сумма чисел с четными номерами, кроме последнего, меньше суммы чисел с нечетными номерами, кроме первого, так как второе меньше третьего, четвертое меньше пятого и т.д. Наконец, разность последнего и первого чисел возрастающей части меньше 1, так как оба числа принадлежат интервалу (0; 1). Следовательно, сумма чисел с четными номерами меньше увеличенной на 1 суммы чисел с нечетными номерами.

7. Поскольку $LD \parallel AB$, то $S_{ABD} = S_{ABL}$. Аналогично, $S_{ACD} = S_{ACK}$. Следовательно,

$$S_{ABC} > S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABL} + S_{ACK},$$

откуда и следует требуемое.

8. По индукции легко доказать неравенство $a_n < 3\pi$. Легко доказать даже, что последовательность a_n монотонна и стремится к 3π.

9. Существует лишь один способ набрать 22 тугрика монетами по 5 и 3 тугрика, а именно, $22 = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3$. В любой момент времени у кассира будет не менее 22 тугриков, поэтому у него в любой момент времени найдутся две монеты по 3 тугрика или одна монета в 5 тугриков. Кассир может либо взять у очередника 3 монеты по 3 тугрика и в качестве сдачи дать 5 тугриков, либо взять две монеты по 5 тугриков и отдать две монеты по 3 тугрика.

10. Если в толпе было n человек, то

$$\frac{n+1}{3} + \frac{3n+1}{10} + \frac{4n+1}{11} \le n,$$

т.е.

$$110n + 110 + 99n + 33 + 120n + 30 \le 330n,$$

откуда $173 \le n$, что и требовалось доказать.

11. Поскольку $25 = 5^2$, то среди данных чисел можно найти такие два числа a и b, что ab делится на 5^2. Все остальные числа нечетны. При делении на 4 любое нечетное число дает остаток 1 или 3. Начав разбивать 23 числа на пары чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 4, придем к разбиению 23 чисел на 11 пар и еще одно число c. Очевидно, $c \equiv 1 \pmod 4$. Произведение abc делится на 25 и дает остаток 1 при делении на 4. Поэтому оно оканчивается на 25.

12. Нет, не обязательно (рис.11).

13. Отметим на луче CB такую точку N, что $\angle LNC = \angle LMB = \angle BAC$ (рис. 12). Тогда $LN = LM$. Из параллельности прямых KL и BC следует равенство углов ALK