O. На плоскости взята такая точка D, что $ALDK$ – параллелограмм. Докажите, что если D лежит внутри треугольника ABC, то площадь четырехугольника $ALOK$ меньше площади треугольника BOC. (11)

А.Храбров

8. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \sin a_{n+1}$, если $a_{n+1} > a_n$, и $a_{n+2} = a_{n+1} + \cos a_{n+1}$, если $a_{n+1} \le a_n$. Докажите, что $a_n < 100$ для любого натурального n. (11)

К.Кохась

Городской тур

9. В обращении имеются лишь монеты в 3 и 5 тугриков. У каждого из покупателей и у кассира денег ровно 22 тугрика. Докажите, что покупатели могут заплатить по 4 тугрика каждый в порядке очереди. (6)

А.Железняк

10. По дороге шла толпа людей. Более трети из них повернули направо, более 30% – налево, а все остальные, которых оказалось более $4/11$, пошли обратно. Докажите, что в толпе было не менее 173 человек. (6)

К.Кохась

11. Произведение некоторых 25 натуральных чисел оканчивается на 25. Докажите, что среди них можно выбрать три числа, произведение которых тоже оканчивается на 25. (6)

А.Храбров

12. Из доски размером 8×8 вырезали «по клеточкам» 12 прямоугольников размером 1×2. Можно ли из оставшейся части доски вырезать прямоугольник размером 1×3? (7)

К.Кохась, В.Франк

13. На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC отметили точки K, L и M соответственно так, что $KL \parallel BC$, $KL = LC$ и $\angle LMB = \angle BAC$ (рис. 2). Докажите равенство $LM = AK$. (7)

С.Берлов

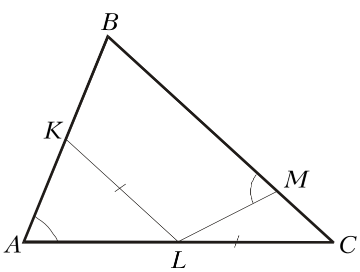


Рис. 2

14. 100 красных, 100 синих и 100 зеленых конфет упаковали в четыре коробки – по 65, 70, 80 и 85 штук соответственно. На каждой коробке написано, сколько внутри нее конфет. Оленька вскрыла одну из коробок. Докажите, что она может указать на одну из остальных коробок и назвать два цвета так, что в этой коробке обязательно найдется конфета хотя бы одного из двух названных ею цветов. (7)

О.Ванюшина

15. Существуют ли такие 30 отрезков, никакие два из которых не имеют общих точек и не лежат на одной прямой, что для любого из них содержащая его прямая пересекает не менее 15 других отрезков? (7)

С.Иванов

16. Есть полоска 1×101. Двое ходят по очереди. За ход можно поставить плюс или минус в еще не заполненную клетку. Тот, кто поставил знак рядом с противоположным, проигрывает. Если этого не случилось, а полоска уже заполнена, то выигрывает второй. Докажите, что второй может обеспечить себе победу. (7)

С.Иванов

17. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла B выбрана такая точка M, что $AM = AC$ и $\angle BCM = 30^\circ$. Докажите, что $\angle AMB = 150^\circ$. (8)

Ф.Петров

18. На доске 9×9 закрашено несколько клеток так, что от любой закрашенной клетки можно добраться до любой другой, двигаясь только по закрашенным клеткам и каждый раз переходя на соседнюю клетку через сторону. Докажите, что периметр закрашенной фигуры не превосходит 120. (Длина стороны клетки равна 1.) (8)

С.Иванов

19. У Гарри есть мышонок и лягушата. Гарри может превращать лягушат в мышат или наоборот по следующему правилу: если мышат и лягушат не поровну, то количество тех животных, которых было меньше половины, удваивается. После того как Гарри сумел проделать эту операцию 17 раз подряд, мышат впервые оказалось ровно в два раза больше, чем лягушат. Сколько животных было у Гарри? (9)

Ю.Лифшиц

20. Костя выложил из палочек целочисленной длины квадрат 10×10 (вместе с границей), разбитый на клеточки 1×1. Палочки не пересекаются во внутренних точках. Какое наименьшее число палочек единичной длины могло быть при этом использовано? (9)

К.Кохась

21. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 2KC$ и $\angle ABK = 2\angle KBC$ (рис.3). Точка F – середина стороны AC, L – проекция A на BK. Докажите, что прямые FL и BC перпендикулярны. (9)

Ф.Бахарев

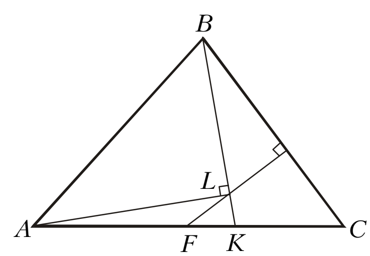


Рис. 3

22. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют общую точку. (10)

М. Пратусевич, Ю.Лифшиц

23. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол B прямой, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$ (рис.4). Точка F – середина отрезка AD. Отрезки BF и AC пересекаются в точке L. Докажите, что $BC = CL$. (10)

Ф.Бахарев

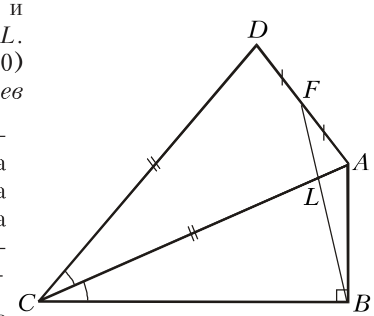
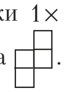
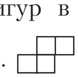
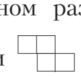


Рис. 4

24. Прямоугольник размером 100×2002 (сторона длины 2002 расположена горизонтально) разбит на доминошки (т.е. прямоугольники 1×2) и фигурки вида . Известно, что в этом разбиении не более 600 доминошек. Докажите, что как минимум а) 800; б) 20000 четырехклеточных фигур в данном разбиении расположены горизонтально (т.е.  или ). (10)

Д.Карпов, А.Пастор